

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4 Έργο - Ενέργεια

1. Να δείξετε ότι η δύναμη $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{x} + (2xy^2z^3)\hat{y} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{z}$ είναι διατηρητική και να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με αυτή.

$$U(x, y, z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2$$

2. Ένα σώμα μάζας m κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση κάποιας δύναμης F . Αν η κινητική ενέργεια του σώματος είναι $K(t) = \lambda t^2$, όπου λ θετική σταθερά, να υπολογίσετε τη δύναμη F . Είναι διατηρητική;

$$F = \sqrt{2\lambda m}$$

3. Αλυσίδα μάζας m και μήκους L βρίσκεται σε οριζόντιο τραπέζι, η επιφάνεια του οποίου είναι κατασκευασμένη από διαφορετικά υλικά, με συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_1, μ_2 . Αρχικά η αλυσίδα είναι έτσι τοποθετημένη ώστε να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στην περιοχή του πρώτου υλικού, με το άκρο της στην αρχή του δεύτερου. Να υπολογίσετε το έργο που πρέπει να δαπανήσουμε ώστε να φέρουμε σέρνοντας την αλυσίδα ολόκληρη στην περιοχή του δεύτερου υλικού.

$$W = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)mgL$$

4. Βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 υπό γωνία ϕ ως προς τον ορίζοντα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης. Να βρείτε τις συνιστώσες της ταχύτητας όταν το βλήμα βρίσκεται στο μισό του μέγιστου ύψους της τροχιάς του.

$$v_x = v_0 \cos \phi, v_y = (v_0 \sin \phi)/\sqrt{2}$$

5. Ένα σώμα μάζας $m = 0.1$ kg αναρτάται από την άκρη ενός νήματος μήκους $L = 0.9$ m. Στο σώμα δίνεται οριζόντια ταχύτητα $v_0 = 6$ m/s και αυτό διαγράφει τροχιά σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογίσετε την τάση του νήματος σε συνάρτηση με τη γωνία που σχηματίζει με την κατακόρυφο. Σε ποια γωνία εγκαταλείπει την κυκλική τροχιά;

$$T(\phi) = \frac{mv_0^2}{L} - 2mg + 3mg \cos \phi, \quad \phi_0 \approx 132^\circ$$

6. Σώμα μάζας m κινείται σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F} = -k\vec{x}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μ . Αν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα $v_0 > 0$ στη θέση $x = 0$, να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

$$S = \frac{\mu mg}{k} \left(\sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{\mu^2 m^2 g^2}} - 1 \right)$$

7. Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο x - y και η δυναμική του ενέργεια είναι $U(x, y) = ax^2 + by^2$ όπου a, b είναι θετικές σταθερές. Να βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο και τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές ώστε αυτή να είναι κεντρική.

$$\vec{F} = -2ax\hat{x} - 2by\hat{y}, \text{ είναι κεντρική αν } a = b$$

8. Ένα σώμα αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος ενός λείου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R , χωρίς αρχική ταχύτητα. Στη βάση του τεταρτοκυκλίου, το σώμα συναντά κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ επιπέδου και σώματος είναι μ . Να βρείτε σε ποιο ύψος θα φτάσει το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο.

$$h = \frac{R}{1 + \mu \cot \phi}$$

9. Ένα σώμα κινείται επί του άξονα x . Η δυναμική του ενέργεια είναι $U(x) = Ax^2e^{-x/a}$, όπου A, a είναι θετικές σταθερές.
- Να σχεδιάσετε τη $U(x)$ και τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.
 - Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος και να τα χαρακτηρίσετε ως προς την ευστάθειά τους.
 - Να υπολογίσετε την ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το σώμα στη θέση $x = 0$ ώστε να διαφύγει στο άπειρο.
10. Σώμα μάζας m μπορεί να κινείται πάνω στον άξονα x έχοντας δυναμική ενέργεια $U(x) = -Ax(x^2 - a^2)$, όπου A, a είναι θετικές σταθερές.
- Να σχεδιάσετε τη δυναμική ενέργεια και τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.
 - Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος.
 - Πόση κινητική ενέργεια πρέπει να έχει το σώμα στη θέση $x = 0$ ώστε να διαφύγει στο άπειρο;
 - Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο (με μηδενική ταχύτητα) στη θέση $x = 0$ να περιγράψετε την κίνηση που θα εκτελέσει και να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά κατά την κίνηση αυτή.
11. Σώμα μάζας m βρίσκεται στο χώρο μεταξύ δύο σφαιρικών πλανητών που απέχουν μεταξύ τους απόσταση D (τα κέντρα τους), σε κάποιο σημείο πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους. Οι ακτίνες των δύο πλανητών είναι R_1 και R_2 , ενώ οι μάζες τους M_1 και M_2 , αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος m , να τη σχεδιάσετε και να βρείτε τα σημεία ισορροπίας. Με πόση ταχύτητα πρέπει να βληθεί το σώμα από την επιφάνεια του πλανήτη 1 ώστε να φτάσει στον πλανήτη 2;
12. Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο ατόμων σε ένα διατομικό μόριο συναρτηθεί της μεταξύ τους απόστασης x προσεγγίζεται από την έκφραση $U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$, όπου a, b θετικές σταθερές. Να βρείτε:
- Τη δύναμη που ασκείται μεταξύ των ατόμων.
 - Τη θέση ισορροπίας του συστήματος και την ευστάθειά της.
 - Τις αποστάσεις για τις οποίες η δύναμη είναι ελκτική και απωστική, αντίστοιχα.
 - Την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων των ατόμων γύρω από τη θέση ισορροπίας.

$$\alpha) F(x) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}, \beta) x_0 = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}, \gamma) x < x_0 \text{ απωστική}, \delta) \omega = 6 \left(\frac{b}{2a}\right)^{2/3} \sqrt{\frac{b}{m}}$$