Φυσική Ι
(Μηχανική)

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Κωνσταντίνος Κουσουρής

Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σκοποί

1. σχετικότητα Galileo-Newton και σχετικότητα Einstein
2. μετασχηματισμοί Lorentz
3. χωροχρόνος , γεγονότα, διαγράμματα Minkowski
4. σχετικιστική κινηματική
5. σχετικιστική δυναμική, σκεδάσεις, ενέργεια & ορμή

Ειδική θεωρία της σχετικότητας

Κυματική εξίσωση για τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο κενό όπως προκύπτει από τις εξισώσεις Maxwell.

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός (ηλεκτρομαγνητικό κύμα) είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς και η τιμή της σχετίζεται με τις θεμελιώδεις σταθερές ε_0 και μ_0.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$$

- Όλα τα πειραματικά δεδομένα συμφωνούν ότι η ταχύτητα του φωτός είναι απόλυτη (ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές).
- Στην ιστορική εργασία του 1905 ο Einstein διατύπωσε την “ειδική θεωρία της σχετικότητας” η οποία ανέτρεψε τις παγιωμένες αντιλήψεις για τον χώρο και τον χρόνο.

“On the Electrodynamics of Moving Bodies”
A. Einstein — 1905

891

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an

annalen der physik

Zum Schlusse bemerke ich, daß mir beim Arbeiten an dem hier behandelten Probleme mein Freund und Kollege M. Besso treu zur Seite stand und daß ich demselben manche wertvolle Anregung verdanke.

Bern, Juni 1905.

(Eingegangen 30. Juni 1905.)

Αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας

- **Πρώτο αξίωμα (αρχή της σχετικότητας)**

  Οι νόμοι της φυσικής έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

  Ισοδύναμα:

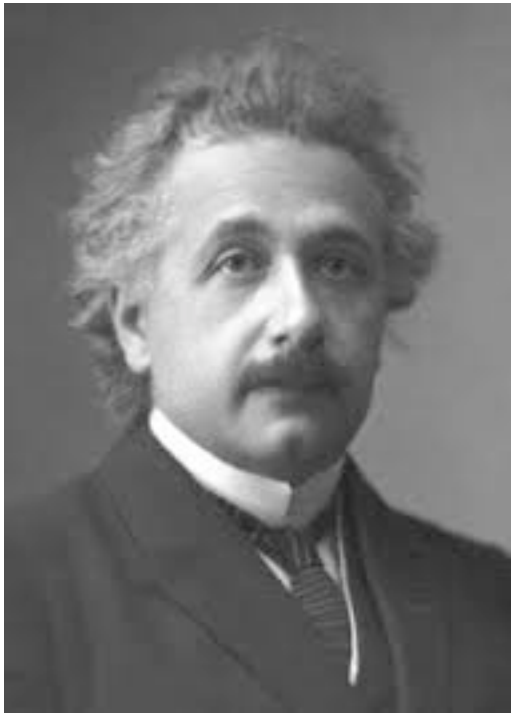
  Δεν υπάρχει κανένα πείραμα φυσικής που να μπορεί να προσδιορίσει την απόλυτη ταχύτητα ενός κινούμενου αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

- **Δεύτερο αξίωμα (αναλλοιότητα της ταχύτητας του φωτός)**

  Σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το φως διαδίδεται στο κενό με συγκεκριμένη ταχύτητα c, η οποία είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση του σώματος που εκπέμπει το φως.

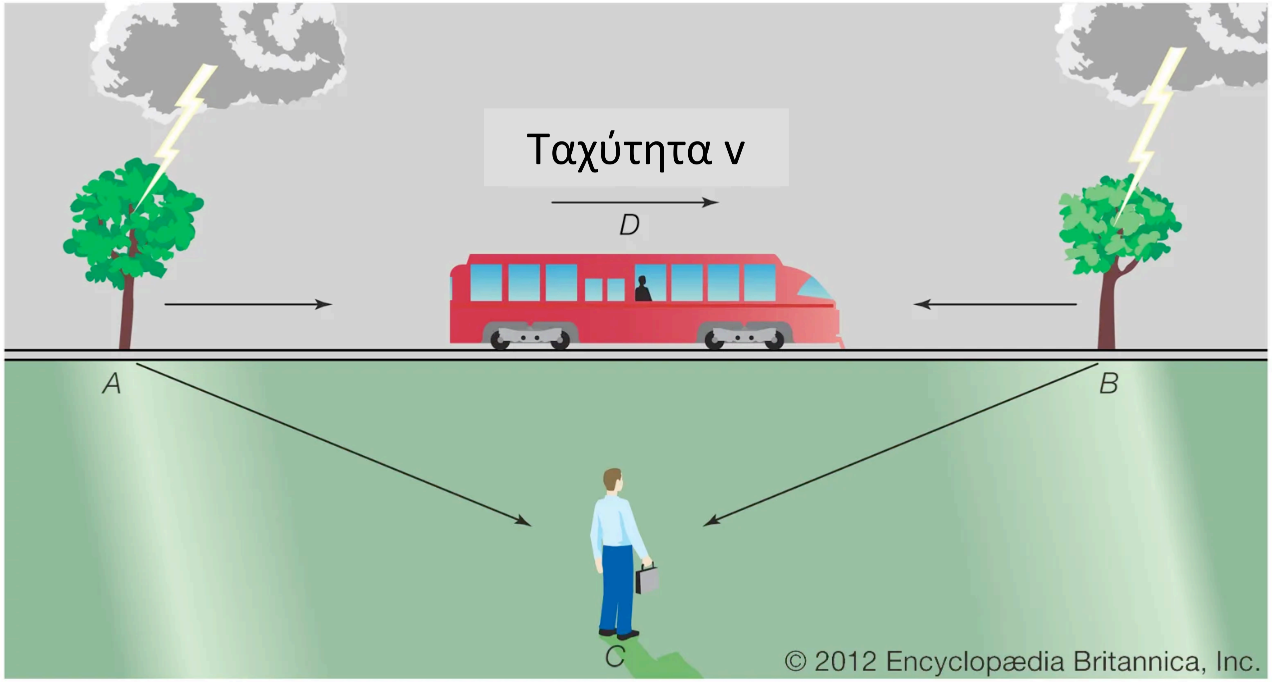
  Ισοδύναμα:

  Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.



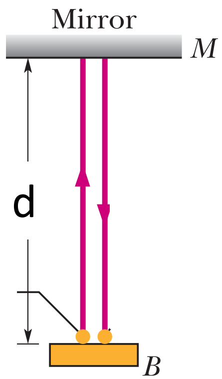
Τα δύο αυτά αξιώματα μαζί με ορισμένες άλλες υποθέσεις (π.χ. ομογένεια & ισοτροπία του χώρου) αποτελούν το θεμέλιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας και από αυτά προκύπτουν όλα τα υπόλοιπα συμπεράσματα της θεωρίας. **Τονίζεται δε ο αξιωματικός χαρακτήρας αυτών των προτάσεων, δηλαδή δεν αποδεικνύονται παρά μόνο επιβεβαιώνονται πειραματικά.**

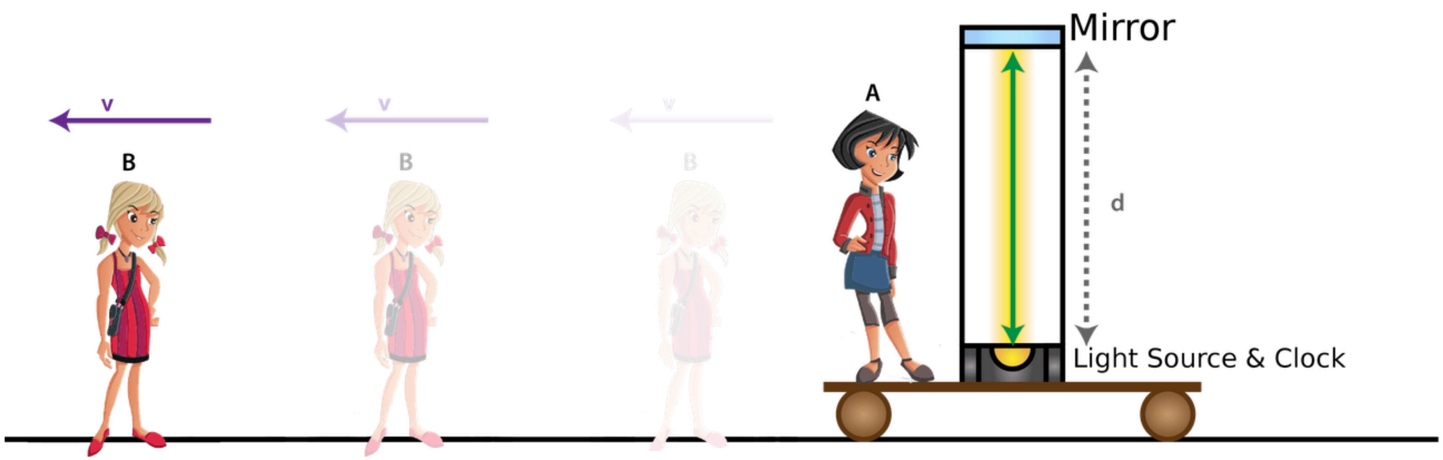
Ταυτοχρονισμός

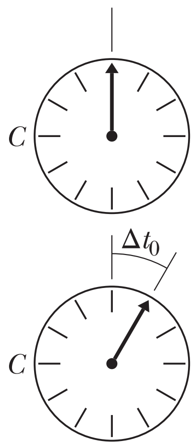


- Ο παρατηρητής C είναι ακίνητος και σε ίσες αποστάσεις AC, BC από αυτόν υπάρχουν δύο δέντρα A, B.
- Ο παρατηρητής D κινείται από το A στο B με ταχύτητα v.
- Ακριβώς όταν ο D διέρχεται μπροστά από τον C, δύο κεραυνοί χτυπούν τα δύο δέντρα.
- Επειδή ο C ισαπέχει από τα δέντρα, θα δει τη λάμψη των δύο κεραυνών **ταυτόχρονα** καθώς το φως των κεραυνών θα διανύσει τις αποστάσεις AC και BC στον ίδιο χρόνο.
- **Ο παρατηρητής D δεν αντιλαμβάνεται ταυτόχρονα** τις δύο λάμψεις διότι κινείται προς το B. Οπότε, βλέπει πρώτα τη λάμψη από το B σε χρόνο $t_B = 0.5(AB)/(c-v)$ και ύστερα τη λάμψη από το A σε χρόνο $tA = 0.5(AB)/(c+v)$.
- **Επομένως, ο ταυτοχρονισμός δεν είναι απόλυτος εξαιτίας της πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός.**

Σχετικότητα του χρόνου



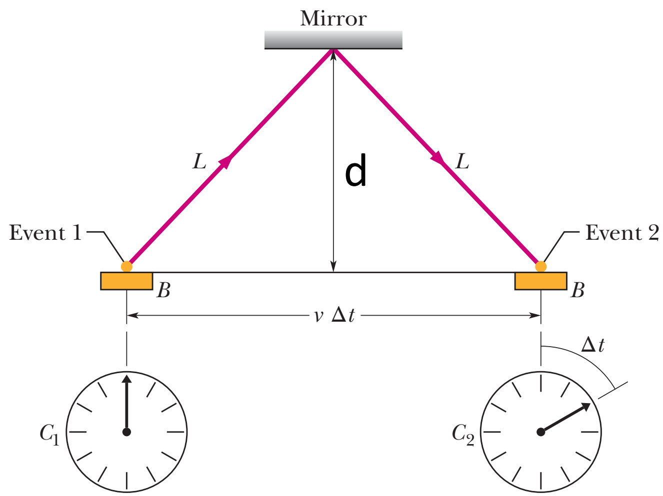


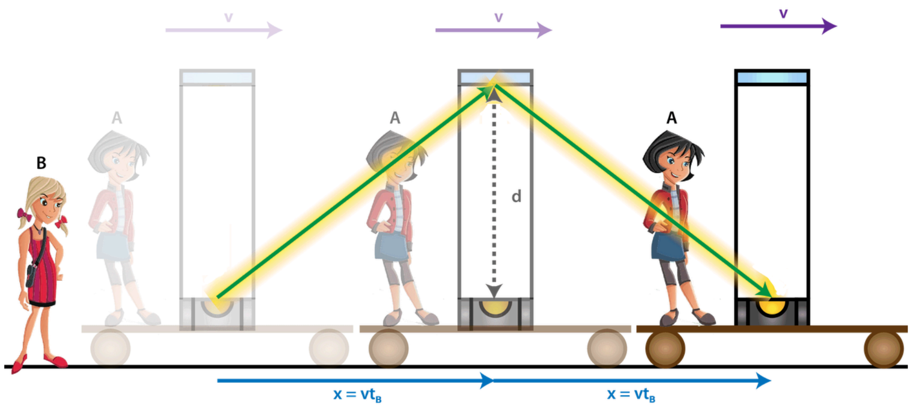


$$\boxed{\Delta t_0 = \frac{2d}{c}}$$

- Ο παρατηρητής Α βλέπει τον παρατηρητή Β να κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα v.
- Ο παρατηρητής Α βλέπει το φως να ξεκινά (γεγονός 1) και να επιστρέφει (γεγονός 2) στο ίδιο σημείο.
- Ο παρατηρητής Α μετράει με το ρολόι του χρόνο $\Delta t_0 = \dfrac{2d}{c}$.

Σχετικότητα του χρόνου (συνέχεια)



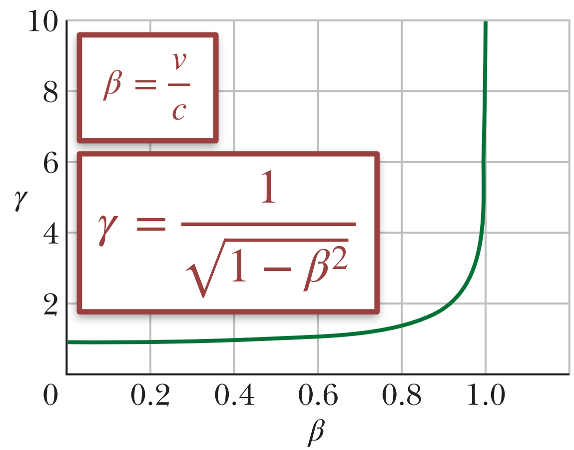


$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t_0$$

- Ο παρατηρητής Β βλέπει τον παρατηρητή Α να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα v.
- Ο παρατηρητής Β βλέπει το φως να ξεκινά (γεγονός 1) και να επιστρέφει (γεγονός 2) σε διαφορετικό σημείο.
- Ο παρατηρητής Β μετράει με το ρολόι του χρόνο $\Delta t = \gamma \Delta t_0$.



$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Διαστολή του χρόνου: ο χρόνος Δt που μετράει ο ακίνητος παρατηρητής Β είναι γ φορές μεγαλύτερος από τον χρόνο που μετράει ο κινούμενος παρατηρητής Α.

Ιδιόχρονος: ο χρόνος Δt_0 που μετράει ο παρατηρητής Α για τον οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο.

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

Διαστολή του χρόνου (παράδειγμα)

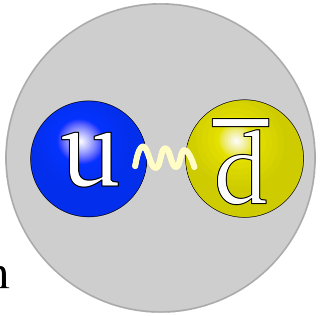
Το στοιχειώδες σωματίδιο που είναι γνωστό ως *θετικό πιόνιο* (π^+) είναι ασταθές με την έννοια ότι μπορεί να *διασπαστεί* σε άλλα σωματίδια. Μολονότι η διάσπαση συμβαίνει τυχαία, βρίσκουμε ότι, κατά μέσο όρο, ένα θετικό πιόνιο έχει χρόνο ζωής 26 *n*s όταν είναι ακίνητο — δηλαδή, όταν ο χρόνος ζωής του μετριέται στο σύστημα ηρεμίας του καονίου. Αν ένα θετικό πιόνιο έχει ταχύτητα 0.990*c* σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου όταν παράγεται, πόση απόσταση μπορεί να διανύσει σε αυτό το σύστημα κατά τη διάρκεια της ύπαρξής του σύμφωνα με την *κλασική φυσική* και σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας;

$$\Delta t_0 = 26\,\text{ns}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.990^2}} \approx 7.1$$

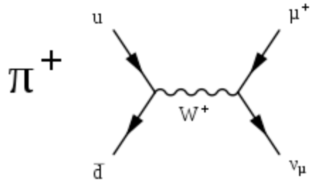
$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 7.1 \cdot 26\,\text{ns} \approx 185\,\text{ns}$$

$$d_{cl} = v\Delta t_0 = 0.990c\Delta t_0 = (0.990)(3\times 10^8\,\text{m/s})(26\times 10^{-9}\,\text{s}) \approx 7.7\,\text{m}$$

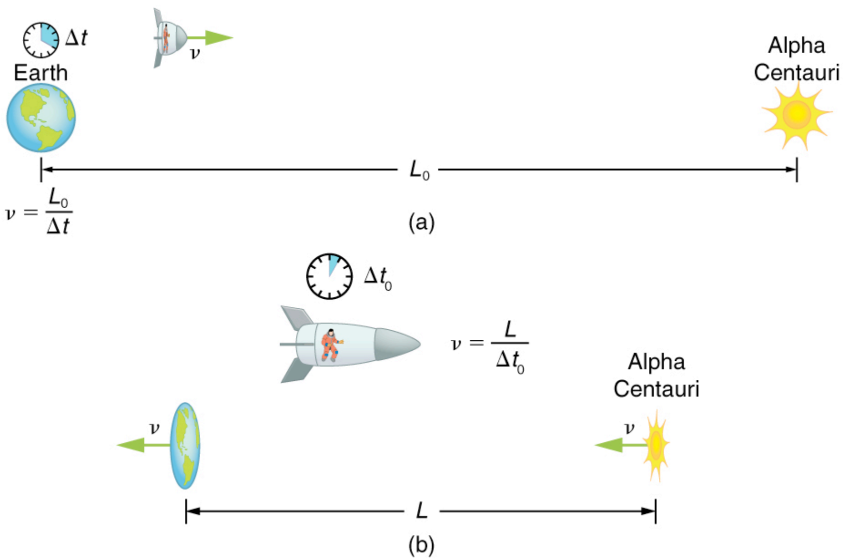


$$d_{rel} = v\Delta t = 0.990c\Delta t = (0.990)(3\times 10^8\,\text{m/s})(185\times 10^{-9}\,\text{s}) \approx 54.7\,\text{m}$$

Ο παρατηρητής στο σύστημα του εργαστηρίου βλέπει το πιόνια να διασπώνται σε 185 ns (κατά μέσον όρο), έχοντας διανύσει απόσταση 54.7 m. Σύμφωνα με την κλασική φυσική ο χρόνος θα ήταν απόλυτος και τα πιόνια θα είχαν διανύσει απόσταση 7.7 m. **Αυτό το αποτέλεσμα ελέγχεται άμεσα πειραματικά!**



Σχετικότητα του μήκους

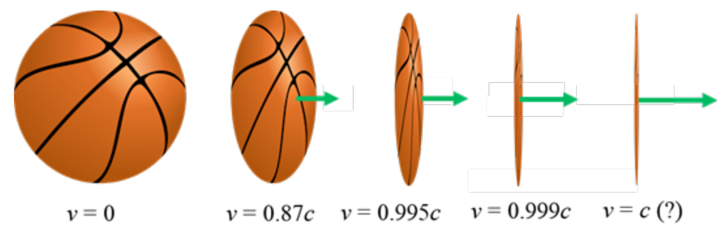


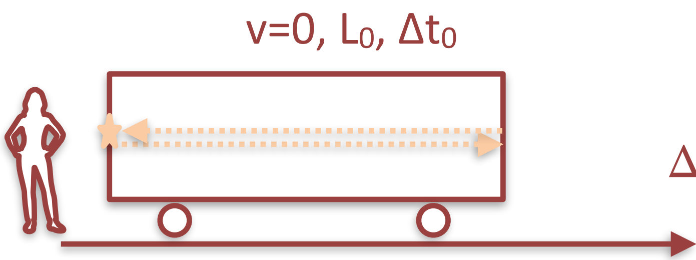
Για να μετρήσει το μήκος ενός αντικειμένου κάποιος παρατηρητής πρέπει να βρει την απόσταση των άκρων του **την ίδια χρονική στιγμή** (**ταυτόχρονα**). Επειδή ο ταυτοχρονισμός είναι σχετική έννοια, διαφορετικοί παρατηρητής μετρούν διαφορετικό μήκος.

- Ο παρατηρητής στη Γη μετράει την απόσταση μέχρι τον μακρινό αστέρα από τον χρόνο που χρειάζεται να φτάσει εκεί ένα διαστημόπλοιο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα: $L_0=v\Delta t$.
- Ο παρατηρητής στο διαστημόπλοιο μετράει την απόσταση από τον χρόνο που χρειάζεται να φτάσει ο αστέρας σε αυτόν (εφόσον ο δεν αντιλαμβάνεται τη δική του κίνηση): $L=v\Delta t_0$.
- Οι χρόνοι που μετράνε οι δύο παρατηρητές είναι διαφορετικοί.
- Το μήκος L που μετράει ο κινούμενος παρατηρητής είναι μικρότερο (**συστολή του μήκους**).
- Το μήκος L_0 που μετράει ο παρατηρητής στο σύστημα του οποίου τα άκρα του διαστήματος είναι ακίνητα ονομάζεται **ιδιομήκος**.

$$L_0 = \gamma L = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

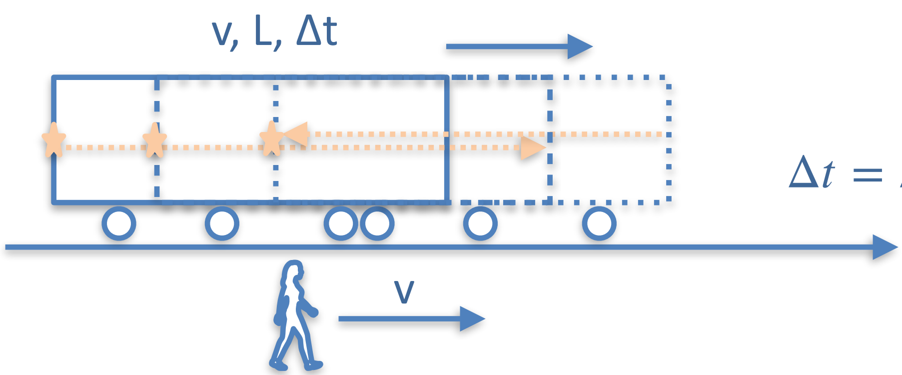
Σχετικότητα του μήκους (συνέχεια)





$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$

$$\boxed{\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}}$$



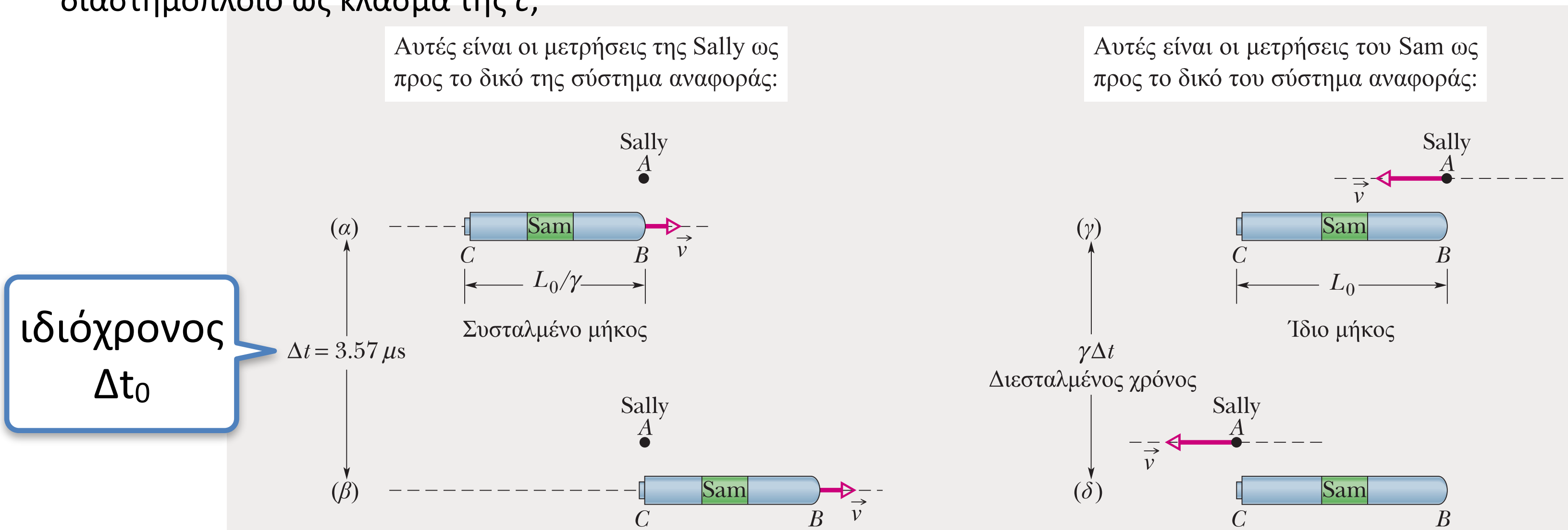
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c(1-v^2/c^2)}$$

$$\boxed{L_0 = \gamma L = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

- Η συστολή του μήκους παρατηρείται κατά τη διεύθυνση της σχετικής κίνησης του αντικειμένου ως προς τον παρατηρητή (στο παράδειγμα εδώ είναι η οριζόντια διάμετρος της σφαίρας).
- Ο δεύτερος παρατηρητής πρέπει να κινείται με την ίδια ταχύτητα με το βαγόνι για να μπορέσει να μετρήσει το μήκος του (παρατηρητής και βαγόνι θα βρίσκονται τότε σε ηρεμία μεταξύ τους).

Συστολή του μήκους (παράδειγμα)

Το διαστημόπλοιο του Sam (με ιδιομήκος L_0 = 230 m) προσπερνάει τη Sally (στο σημείο *A*) με σχετική ταχύτητα *v*. Η Sally μετράει χρονικό διάστημα 3.57 μs για τη διέλευση του διαστημοπλοίου από δίπλα της (από τη διέλευση του σημείου *B* στο (α) έως τη διέλευση του σημείου *C* στο (β). Πόση είναι η ταχύτητα *v* ανάμεσα στη Sally και στο διαστημόπλοιο ως κλάσμα της *c*;

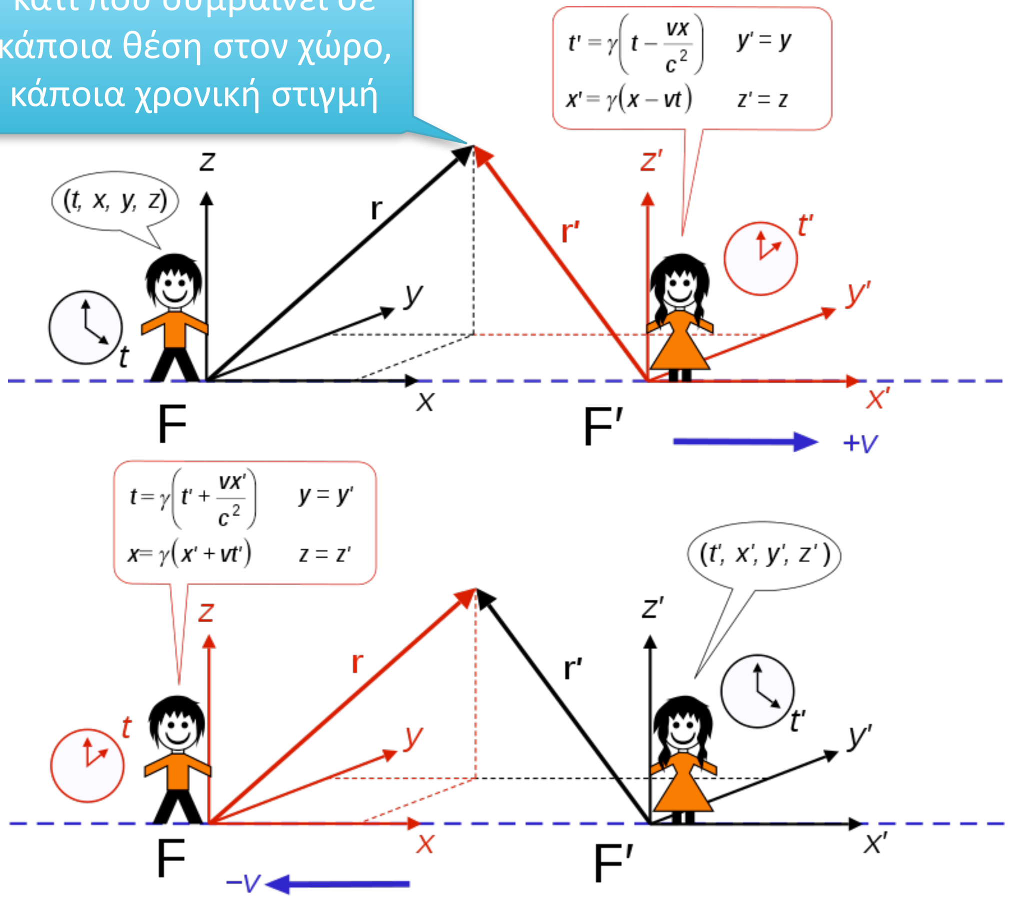


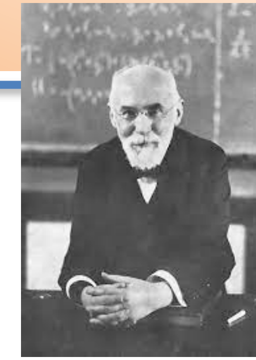
- Η Sally μετράει μήκος L < L_0 για το κινούμενο διαστημόπλοιο του Sam (συστολή του μήκους).
- Η ταχύτητα που μετράει η Sally βρίσκεται από το μήκος L και τον χρόνο διέλευσης των δυο άκρων: v = L/Δt_0.
- Η μέτρηση του Sam θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα καθώς αυτός μετράει το ιδιομήκος L_0 αλλά μεγαλύτερο χρόνο (διαστολή του χρόνου): v = L_0/Δt.

$$v = \frac{L}{\Delta t_0} = \frac{L_0}{\gamma \Delta t_0} \Rightarrow v = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{L_0}{\Delta t_0} \Rightarrow v = \frac{L_0 c}{\sqrt{(c\Delta t_0)^2 + L_0^2}} \Rightarrow v = \frac{230}{\sqrt{(3\times 10^8 \cdot 3.57\times 10^{-6})^2 + 230^2}} c \approx 0.21c$$

Μετασχηματισμός Lorentz

Γεγονός
κάτι που συμβαίνει σε κάποια θέση στον χώρο, κάποια χρονική στιγμή





Ευθύς

$$x' = \gamma\,(x - vt)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

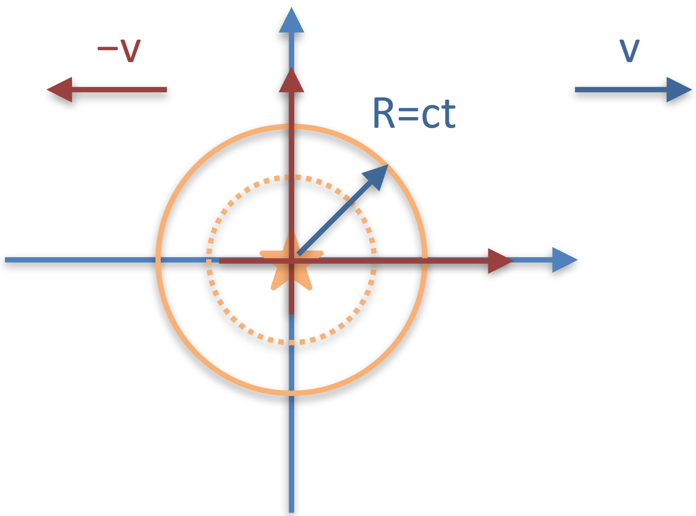
Αντίστροφος

$$x = \gamma\,(x' + vt')$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

Οι δύο παρατηρητές περιγράφουν το ίδιο γεγονός με διαφορετικές συντεταγμένες χώρου και χρόνου
F: (x, y, z, t)
F′: (x′, y′, z′, t′)

Lorentz boost: ο παρατηρητής F′ έχει άξονες παράλληλους με του F και κινείται με σταθερή ταχύτητα στον άξονα x ως προς τον F.

Μετασχηματισμός Lorentz (απόδειξη)



Γραμμικός μετασχηματισμός

$$x' = \alpha x + \delta t \Rightarrow dx' = \alpha dx + \delta dt$$
$$y' = y,\ z' = z$$
$$t' = \kappa x + \lambda t$$

Για ένα ακίνητο σημείο στο Σ΄:

$$dx' = 0 \Rightarrow \alpha dx + \delta dt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = -\frac{\delta}{\alpha}$$

- Δύο παρατηρητές βρίσκονται κάποια χρονική στιγμή στην κοινή αρχή των αξόνων και εκπέμπεται ένα κύμα φωτός.
- Λόγω της αναλλοιότητας της ταχύτητας του φωτός, οι δύο παρατηρητές βλέπουν την ακτίνα της σφαίρας φωτός να αυξάνεται με την ίδια ταχύτητα c.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$
$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2 (t')^2$$

$$(\alpha x + \delta t)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\kappa x + \lambda t)^2 \Rightarrow$$
$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\delta x t + \delta^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2\kappa^2 x^2 + 2c^2\kappa\lambda x t + c^2\lambda^2 t^2 \Rightarrow$$
$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\delta x t + \delta^2 t^2 + c^2 t^2 - x^2 = c^2\kappa^2 x^2 + 2c^2\kappa\lambda x t + c^2\lambda^2 t^2 \Rightarrow$$
$$\alpha^2 - c^2\kappa^2 = 1, \quad \alpha\delta = c^2\kappa\lambda, \quad \delta^2 t^2 + c^2 = c^2\lambda^2, \quad \delta = -\alpha v$$

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \kappa = -\frac{v}{c^2}\gamma = -\frac{v}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\delta = -v\gamma = -\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \lambda = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Μεταχηματισμός Lorentz (συνέχεια)

Έστω δύο γεγονότα Α και Β που περιγράφονται από δύο διαφορετικούς παρατηρητές:
Π: $A(t_A, x_A, y_A, z_A)$, $B(t_B, x_B, y_B, z_B)$
Π΄: $A(t'_A, x'_A, y'_A, z'_A)$, $B(t'_B, x'_B, y'_B, z'_B)$

Χωροχρονικά διαστήματα από μετασχ. Lorentz

Ευθύς

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \upsilon \Delta t\right)$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\upsilon \Delta x}{c^2}\right)$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$

Αντίστροφος

$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + \upsilon \Delta t'\right)$$
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\upsilon \Delta x'}{c^2}\right)$$
$$\Delta y = \Delta y'$$
$$\Delta z = \Delta z'$$

Διαστολή του χρόνου:
στο σύστημα Σ δύο γεγονότα μετριούνται στο ίδιο σημείο ($\Delta x = 0$) — ιδιόχρονος Δt_0
$$\Delta t' = \gamma \Delta t_0$$

Συστολή του μήκους:
στο σύστημα Σ΄ ένα αντικείμενο είναι ακίνητο, οπότε το Δx΄ των άκρων του είναι το ιδιομήκος. Στο σύστημα Σ, το Δx είναι το μήκος μόνο αν οι θέσεις των άκρων μετριούνται ταυτόχρονα ($\Delta t = 0$)
$$\Delta x' = L_0 = \gamma \Delta x = \gamma L$$

Μετασχηματισμός Lorentz (παράδειγμα)

Ένα ρολόι κινείται κατά μήκος του άξονα *x* με ταχύτητα 0.6 *c* και έχει ένδειξη μηδέν καθώς διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (α) Να υπολογίσετε τον παράγοντα Lorentz του ρολογιού. (β) Τι ώρα δείχνει το ρολόι καθώς περνάει από το σημείο *x* = 180 m;

Σύστημα ακίνητου παρατηρητή:
A = (t_A, x_A) = (0, 0), B = (t_B, x_B) = (t_B, 180 m)

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1.25$$

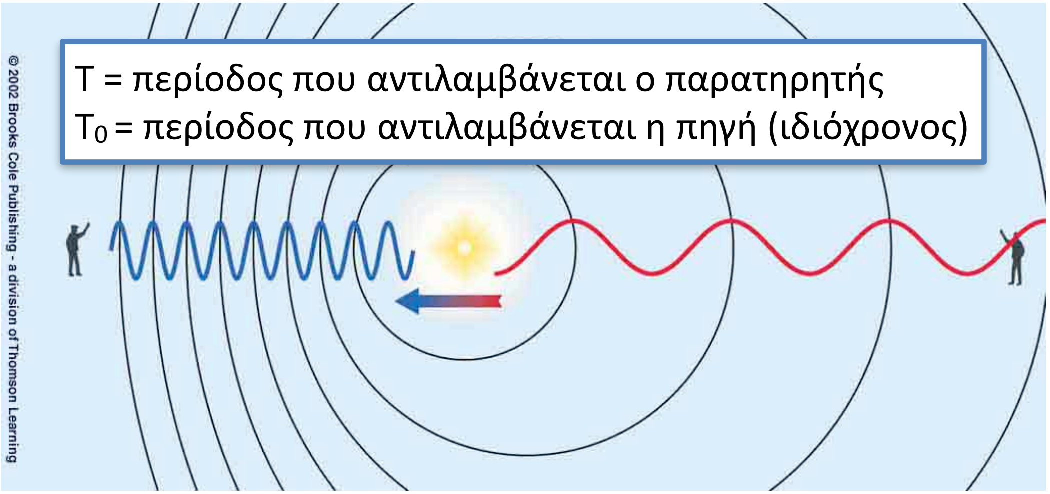
Σύστημα κινούμενου ρολογιού (τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο):
A = (t'_A, x'_A) = (0, 0), B = (t'_B, x'_B) = (t'_B, 0)

$$x'_B = \gamma_v\left(x_B - vt_B\right) \Rightarrow 0 = 1.25(x_B - vt_B) \Rightarrow x_B = vt_B \Rightarrow t_B = \frac{180\,\mathrm{m}}{0.6\cdot 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 1\,\mu\mathrm{s}$$

$$t'_B = \gamma_v\left(t_B - \frac{vx_B}{c^2}\right) \Rightarrow t'_B = 1.25\left(10^{-6}\,\mathrm{s} - \frac{0.6c\cdot 180\,\mathrm{m}}{c^2}\right) = 1.25\left(10^{-6} - \frac{0.6\cdot 180}{3\times 10^8}\right)\mathrm{s} = 0.8\,\mu\mathrm{s}$$

α) Ο παράγοντας Lorentz του ρολογιού είναι 1.25.
β) Το ρολόι δείχνει 0.8 μs όταν περνάει από το σημείο x = 180 m. Αυτό το αποτέλεσμα είναι συμβατό με τη διαστολή του χρόνου (0.8 μs είναι ο ιδιόχρονος).

Φαινόμενο Doppler



$$\boxed{f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_0}$$

- **β < 0:** (πηγή και παρατηρητής **πλησιάζουν**) **$f > f_0$**
- **β > 0:** (πηγή και παρατηρητής **απομακρύνονται**) **$f < f_0$**

Διαστολή του χρόνου

$$\boxed{T = \gamma_v T_0}$$

$$\lambda = (c-v)T = (c-v)\gamma_v T_0 = \frac{c-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}T_0 = \frac{c(c-v)}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}T_0 = cT_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

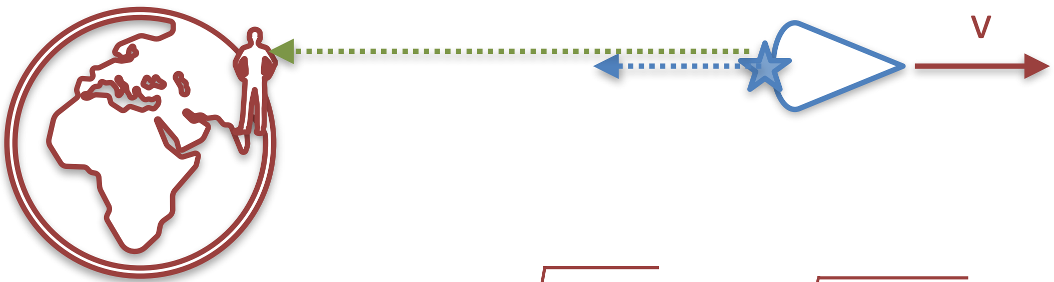
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{cT_0}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$ όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή, το μήκος κύματος είναι μικρότερο

$$\lambda = (c+v)T = (c+v)\gamma_v T_0 = \frac{c+v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}T_0 = \frac{c(c+v)}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}T_0 = cT_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

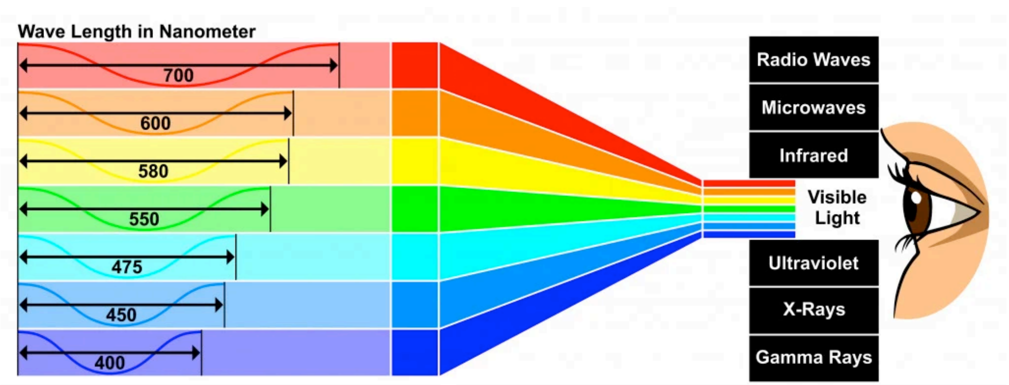
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{cT_0}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$ όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, το μήκος κύματος είναι μεγαλύτερο

Φαινόμενο Doppler (εφαρμογή)

Ένα διαστημόπλοιο απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα 0.20*c*. Μια πηγή στο πίσω μέρος του διαστημοπλοίου εκπέμπει φως σε μήκος κύματος 450 nm σύμφωνα με κάποιον παρατηρητή πάνω σε αυτό. Ποιο μήκος κύματος ανιχνεύεται από κάποιον παρατηρητή στη Γη που κοιτάει το διαστημόπλοιο;

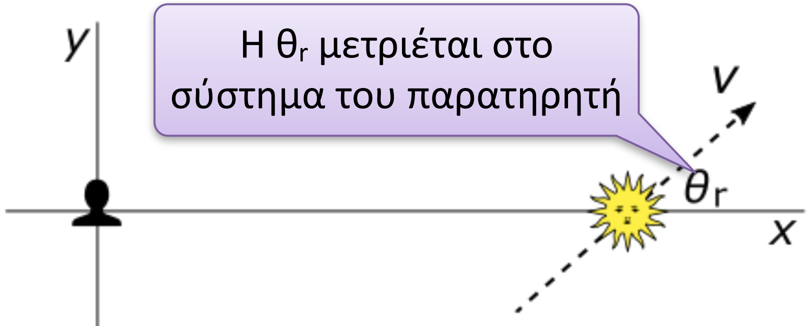


$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{f_0}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda_0\sqrt{\frac{1+0.2}{1-0.2}} = 450\sqrt{\frac{1.2}{0.8}}\ \mathrm{nm} \approx 551\ \mathrm{nm}$$



Το φως της πηγής είναι **μπλε** αλλά ο παρατηρητής στη Γη βλέπει **πράσινο** χρώμα!!

Μη Συνευθειακό Φαινόμενο Doppler



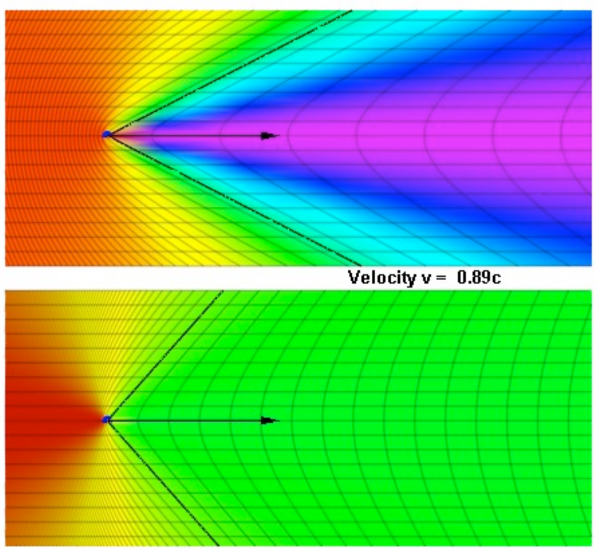
Η σχετική κίνηση της πηγής και του παρατηρητή δεν είναι συνευθειακή με τον άξονα παρατηρητή-πηγής.

$$\beta = \frac{v}{c}, \ \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$f = \frac{f_0}{\gamma_v\left(1+\beta\cos\theta_r\right)} = f_0\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta_r}$$

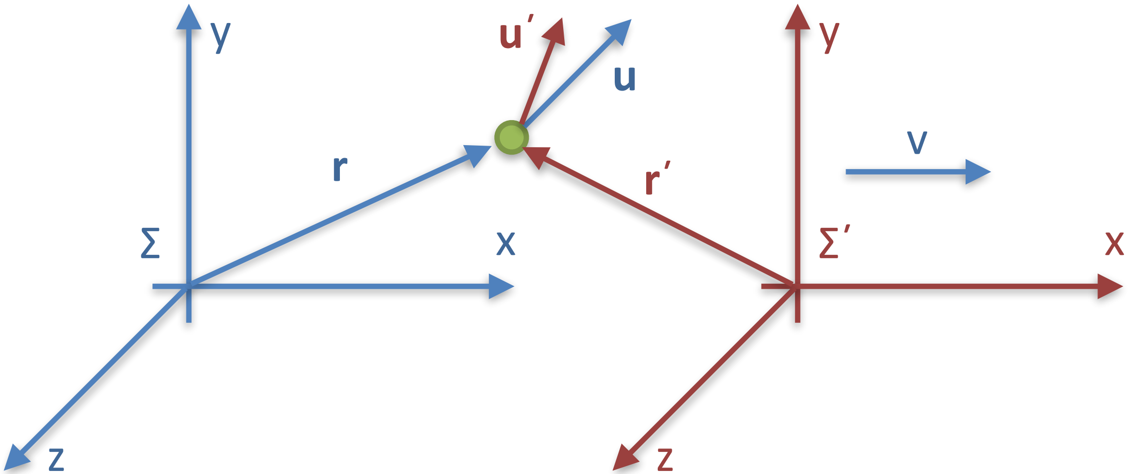
Σχετικιστικό

Μη σχετικιστικό



- Ένας παρατηρητής περιβάλλεται από πηγές μονοχρωματικού φωτός λ = 570 nm και κινείται οριζόντια με ταχύτητα 0.89 *c*.
- Το σχήμα απεικονίζει τα χρώματα (μήκη κύματος) που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής γύρω του εξαιτίας του φαινομένου Doppler.

Μετασχηματισμός ταχυτήτων



Πώς αντιλαμβάνεται την ταχύτητα ενός σωματιδίου ο παρατηρητής Σ′;

Για v << c πρέπει να αναπαράγεται ο μετασχηματισμός Galileo

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma_v\left(dx - v\,dt\right)}{\gamma_v\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}}$$

Μετασχηματισμός Lorentz

$$dx' = \gamma_v\left(dx - v\,dt\right)$$
$$dt' = \gamma_v\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$

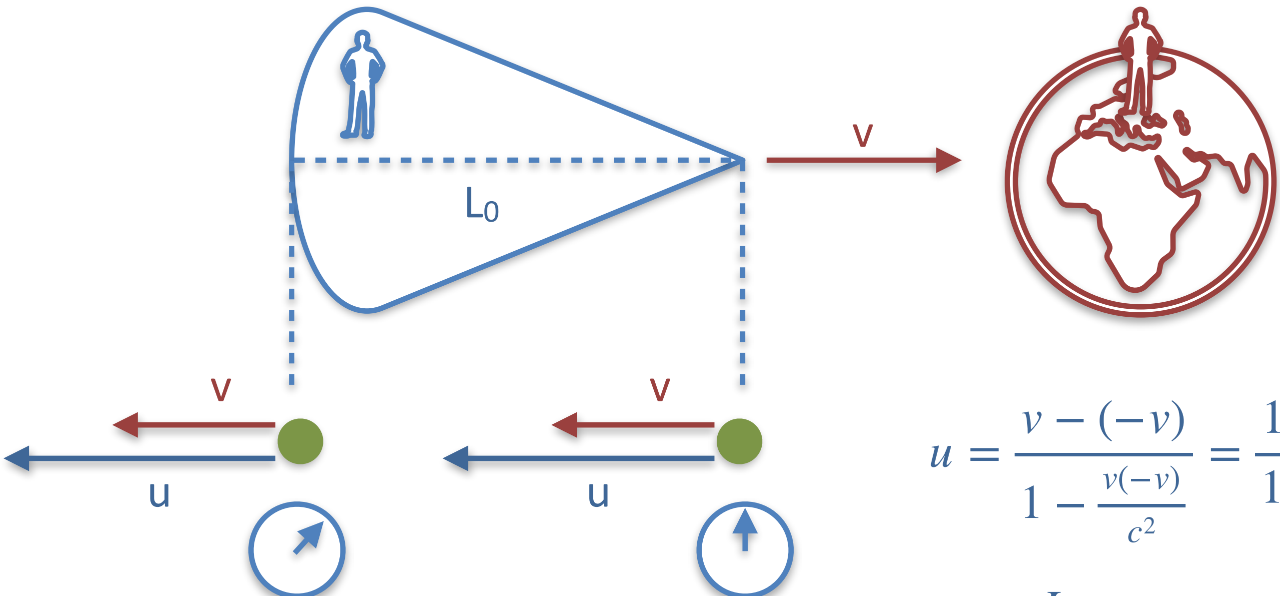
$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma_v\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma_v\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow \boxed{u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma_v\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma_v\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow \boxed{u'_z = \frac{u_z}{\gamma_v\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}}$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Μετασχηματισμός ταχυτήτων (παράδειγμα)

Ένα διαστημόπλοιο με μήκος ηρεμίας (ιδιομήκος) 350 m έχει ταχύτητα 0.8*c* ως προς ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Ένας μικρομετεωρίτης, με ταχύτητα επίσης 0.8*c* σε αυτό το σύστημα περνάει από το διαστημόπλοιο με αντιπαράλληλη τροχιά. Πόσος χρόνος θα χρειαστεί ώστε αυτό το αντικείμενο να διέλθει πλάι από το διαστημόπλοιο, όπως μετριέται από το ίδιο το διαστημόπλοιο;

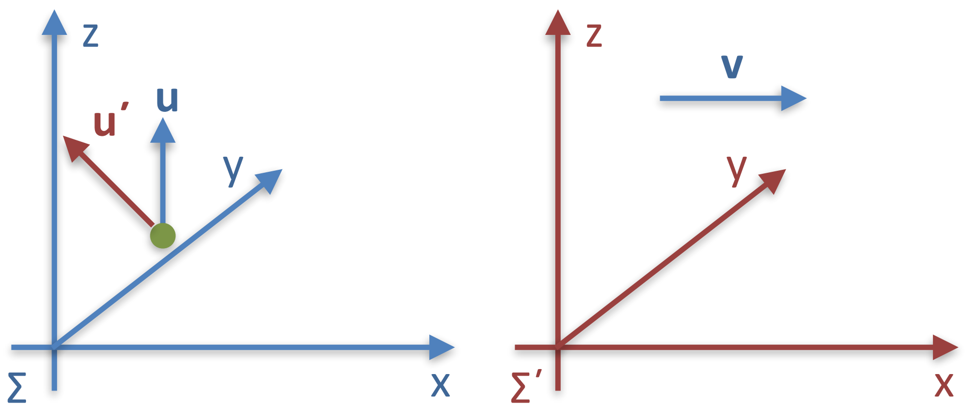


$$u = \frac{v-(-v)}{1-\frac{v(-v)}{c^2}} = \frac{1.6c}{1.64} \approx 0.975c$$

$$\Delta t = \frac{L_0}{u} = \frac{350\,\mathrm{m}}{0.975 \cdot 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} \approx 1.2\,\mu\mathrm{s}$$

Μετασχηματισμός ταχυτήτων (παράδειγμα)

Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ΄ κινείται με ταχύτητα **v** = (0.4c, 0, 0) ως προς το αδρανειακό σύστημα Σ. Στο Σ ένα σώμα κινείται με ταχύτητα **u** = (0, 0, 0.2c). Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος ως προς το Σ΄.



$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.4^2}} \approx 1.09$$

$$u'_x = \frac{u_x - v_x}{1 - \frac{u_x v_x}{c^2}} = \frac{0 - 0.4c}{1 - 0} = -\,0.4c$$

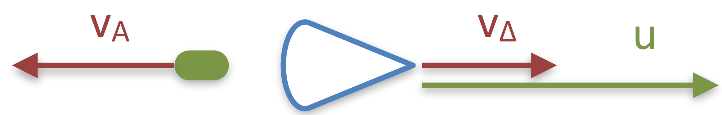
$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma_v\left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right)} = \frac{0}{1.09 \cdot (1 - 0)} = 0$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma_v\left(1 - \frac{u_x v_x}{c^2}\right)} = \frac{0.2c}{1.09 \cdot (1 - 0)} \approx 0.18c$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} &= (0,\ 0,\ 0.2c) \\ \vec{u}' &= (-0.4c,\ 0,\ 0.18c) \end{aligned}}$$

Μετασχηματισμός ταχυτήτων & Doppler (παράδειγμα)

Ένα μητρικό διαστημόπλοιο Δ κινείται με ταχύτητα 0.5c απομακρυνόμενο από τη Γη, ενώ η βοηθητική άκατος Α κινείται προς τη Γη με ταχύτητα 0.6c (ως προς τη Γη). Προκειμένου να επικοινωνήσει ο πλοίαρχος του Δ με το πλήρωμα στην Α, εκπέμπει ραδιοκύματα συχνότητας 100 MHz. α) Σε ποια συχνότητα θα λάβει τα ραδιοκύματα η Α; β) Πόσο είναι το μήκος κύματος που μετράει ένας παρατηρητής στη Γη;



$$u = \frac{v_A - v_\Delta}{1 - \frac{v_A v_\Delta}{c^2}} = \frac{0.5c - (-0.6c)}{1 - \frac{0.5c(-0.6c)}{c^2}} = \frac{1.1c}{1.3} \approx 0.85c$$

Συχνότητα ως προς την άκατο:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta_u}{1+\beta_u}}\, f_0 = \sqrt{\frac{1-0.85}{1+0.85}}\, 100\,\mathrm{MHz} \Rightarrow f \approx 28.5\,\mathrm{MHz}$$

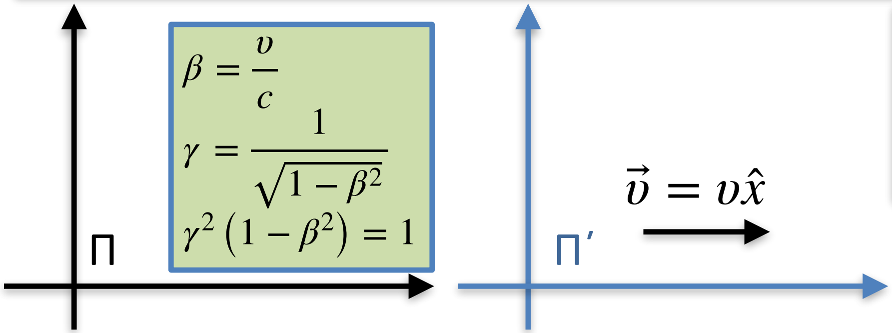
Συχνότητα ως προς τη Γη:

$$f' = \sqrt{\frac{1-\beta_{v_\Delta}}{1+\beta_{v_\Delta}}}\, f_0 = \sqrt{\frac{1-0.5}{1+0.5}}\, 100\,\mathrm{MHz} \Rightarrow f' \approx 57.7\,\mathrm{MHz}$$

Μήκος κύματος ως προς τη Γη:

$$\lambda' = \frac{c}{f'} = \frac{3\times 10^8\,\mathrm{m/s}}{57.7\times 10^6\,\mathrm{Hz}} \Rightarrow \lambda' \approx 5.2\,\mathrm{m}$$

Τετρανύσματα



$$\beta = \frac{v}{c}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$$

Ονομάζουμε **τετράνυσμα** a^μ κάθε διατεταγμένη τετράδα αριθμών η οποία μετασχηματίζεται κατά Lorentz όπως το $x^\mu = \left(ct, x, y, z\right)$

$$a^\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)$$
$$b^\mu = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

Ευθύς

$$a_0' = \gamma\left(a_0 - \beta a_1\right)$$
$$a_1' = \gamma\left(a_1 - \beta a_0\right)$$
$$a_2' = a_2$$
$$a_3' = a_3$$

Αντίστροφος

$$a_0 = \gamma\left(a_0' + \beta a_1'\right)$$
$$a_1 = \gamma\left(a_1' + \beta a_0'\right)$$
$$a_2 = a_2'$$
$$a_3 = a_3'$$

$$a^\mu \cdot b^\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

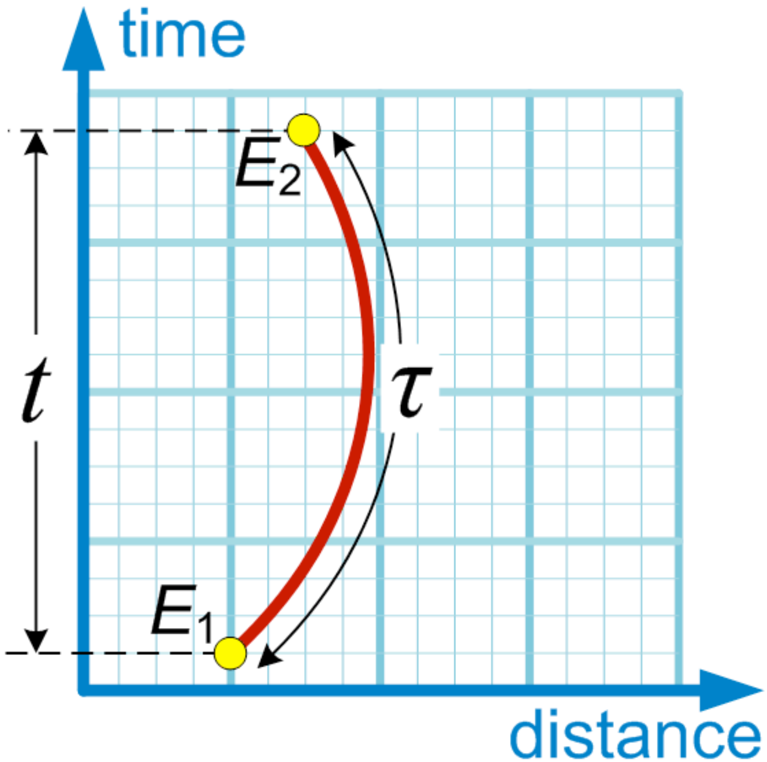
Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο τετρανυσμάτων είναι αναλλοίωτο

Το **μέτρο** ενός τετρανύσματος είναι αναλλοίωτο

$$a^2 \equiv a^\mu \cdot a^\mu = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$$

$$\begin{aligned}
a'^\mu \cdot b'^\mu &= a_0' b_0' - a_1' b_1' - a_2' b_2' - a_3' b_3' \\
&= \gamma(a_0 - \beta a_1)\gamma(b_0 - \beta b_1) - \gamma(a_1 - \beta a_0)\gamma(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\
&= \gamma^2\left(a_0 b_0 - \beta a_0 b_1 - \beta b_0 a_1 + \beta^2 a_1 b_1 - a_1 b_1 + \beta a_1 b_0 + \beta a_0 b_1 - \beta^2 a_0 b_0\right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\
&= \gamma^2\left(a_0 b_0 - \beta^2 a_0 b_0 - a_1 b_1 + \beta^2 a_1 b_1\right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\
&= \gamma^2\left(1 - \beta^2\right)\left(a_0 b_0 - a_1 b_1\right) - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\
&= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a^\mu \cdot b^\mu
\end{aligned}$$

Αναλλοίωτο χωροχρονικό “μήκος” - ιδιόχρονος



Παρατηρητής Π που βλέπει
ένα σωματίδιο να κινείται

$$dx^{\mu} = \left(cdt, dx, dy, dz\right)$$

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Παρατηρητής Π΄ που κινείται
μαζί με το σωματίδιο

$$dx'^{\mu} = \left(cd\tau, 0, 0, 0\right)$$

$$ds'^2 = c^2(d\tau)^2$$

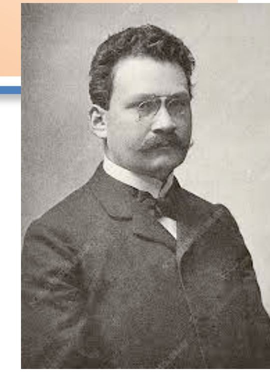
$$ds'^2 = ds^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{(dt)^2 - \frac{1}{c^2}\left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right]} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

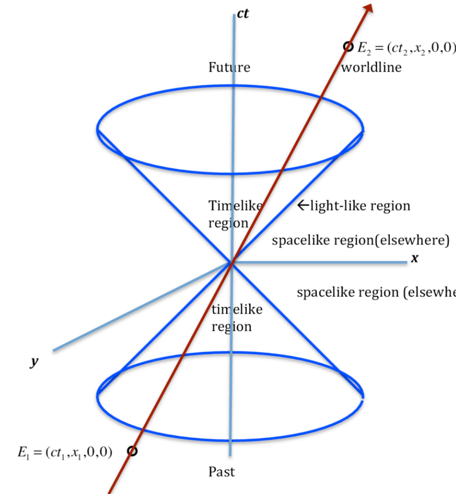
$$\boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma_v}}$$

ιδιόχρονος

Διάγραμμα Minkowski - κώνος φωτός

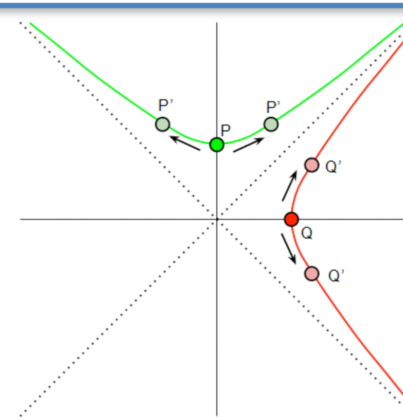


- Προσθέτουμε μια τέταρτη διάσταση: ct.
- Η αρχή των αξόνων είναι το παρόν και οι δύο ημιχώροι είναι το παρελθόν και το μέλλον.
- Ο **κώνος φωτός** ορίζεται από την $x^2+y^2+z^2=(ct)^2$.
- Η τροχιά που διαγράφει ένα σωματίδιο στο χωροχρονικό διάγραμμα ονομάζεται **κοσμική γραμμή** (worldline).
- Δύο γεγονότα με $\Delta s^2 > 0$ ονομάζονται **χρονοειδή** και βρίσκονται **εντός** του κώνου φωτός. Υπάρχει πάντα ένα σύστημα αναφοράς όπου τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο.
- Δύο γεγονότα με $\Delta s^2 < 0$ ονομάζονται **χωροειδή** και βρίσκονται **εντός** και **εκτός** του κώνου φωτός. Υπάρχει πάντα ένα σύστημα αναφοράς όπου τα δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα.
- Δύο γεγονότα με $\Delta s^2 = 0$ ονομάζονται **φωτοειδή** και βρίσκονται πάνω στον κώνο φωτός.



Κάθε μετασχηματισμός Lorentz μετακινεί τα σημεία P, Q κατά μήκος μιας υπερβολής που περιορίζεται ασυμπτωτικά από τον κώνο φωτός. Δηλαδή, δεν μπορεί να υπάρξει μετάβαση από τη μία περιοχή στην άλλη.

Για χρονοειδή γεγονότα η αναστροφή του χρόνου είναι αδύνατη. Δηλαδή όλοι οι παρατηρητές αντιλαμβάνονται την ίδια χρονική αλληλουχία γεγονότων. Αυτό σημαίνει ότι διατηρείται η αιτιότητα (το αίτιο προηγείται του αποτελέσματος). Επομένως, **όλα τα φυσικά συνδεδεμένα γεγονότα είναι χρονοειδή**!



Χωροχρονικά διαστήματα (εφαρμογές)

Για κάθε ζεύγος από τα παρακάτω χωροχρονικά γεγονότα, να βρείτε αν υπάρχει κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο να συμβαίνουν στο ίδιο σημείο ή ταυτόχρονα.

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

$$x' = \gamma\,(x - \upsilon t)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Περίπτωση 1

Σε ένα σύστημα αναφοράς Σ τα γεγονότα A και B έχουν τις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες:

Σ: $(ct_A, x_A, y_A, z_A) = (1, 1, 0, 0)$ m

Σ: $(ct_B, x_B, y_B, z_B) = (2, 3, 0, 0)$ m

$\Delta s^2 = (2-1)^2 - (3-1)^2 = -3 < 0$ (**χωροειδή** γεγονότα)

Υπάρχει παρατηρητής Π΄όπου τα γεγονότα είναι **ταυτόχρονα** ($\Delta t' = 0$).

Από μετ. Lorentz:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{vx}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow v = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)c = 0.5c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} \approx 1.155$$

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \beta c\Delta t\right) \approx 1.115\left(2 - 0.5\cdot 1\right) = 1.673\,\mathrm{m}$$

Δηλαδή, ένας παρατηρητής Π΄ κινούμενος με ταχύτητα 0.5c αντιλαμβάνεται τα δύο γεγονότα να συμβαίνουν ταυτόχρονα, ενώ απέχουν απόσταση 1.673 m.

Σ΄: $(ct'_A, x'_A, y'_A, z'_A) = (0.558, 0.558, 0, 0)$ m

Σ΄: $(ct'_B, x'_B, y'_B, z'_B) = (0.558, 2.23, 0, 0)$ m

Περίπτωση 2

Σε ένα σύστημα αναφοράς Σ τα γεγονότα A και B έχουν τις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες:

Σ: $(ct_A, x_A, y_A, z_A) = (0, 0, 0, 0)$ m

Σ: $(ct_B, x_B, y_B, z_B) = (4, 2, 0, 0)$ m

$\Delta s^2 = (4-0)^2 - (2-0)^2 = 12 > 0$ (**χρονοειδή** γεγονότα)

Υπάρχει παρατηρητής Π΄όπου τα γεγονότα συμβαίνουν **στο ίδιο σημείο** ($\Delta x' = 0$).

Από μετ. Lorentz:

$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - v\Delta t) = 0 \Rightarrow v = \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t}\right)c = 0.5c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} \approx 1.155$$

$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \beta\Delta x\right) \approx 1.115\left(4 - 0.5\cdot 2\right) = 3.345\,\mathrm{m}$$

Δηλαδή, ένας παρατηρητής Π΄ κινούμενος με ταχύτητα 0.5c αντιλαμβάνεται τα δύο γεγονότα να συμβαίνουν στο ίδιο σημείο, ενώ απέχουν χρονική απόσταση $c\Delta t' = 3.345$ m.

Σ΄: $(ct'_A, x'_A, y'_A, z'_A) = (0, 0, 0, 0)$ m

Σ΄: $(ct'_B, x'_B, y'_B, z'_B) = (3.345, 0, 0, 0)$ m

Σχετικιστική κινηματική

Κατασκευάζουμε τετραδιανύσματα (π.χ. η^μ) συνδυάζοντας άλλα, γνωστά τετραδιανύσματα (dx^μ) και αναλλοίωτες ποσότητες ($d\tau$).

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Τετράνυσμα της ταχύτητας ή **τετραταχύτητα**

$$\eta^\mu = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\frac{d}{dt}(ct,\vec{r}) = (\gamma c, \gamma\vec{v})$$

$$\eta^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

Τετράνυσμα της επιτάχυνσης ή **τετραεπιτάχυνση**

$$a^\mu = \frac{d\eta^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{d\eta^\mu}{dt} = \gamma\left(c\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \gamma\left(c\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a}\right)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{\partial}{\partial v_x}\left(1-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \frac{\partial}{\partial v_y}\left(1-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \frac{\partial}{\partial v_z}\left(1-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-2\frac{v_x}{c^2}\frac{dv_x}{dt} - 2\frac{v_y}{c^2}\frac{dv_y}{dt} - 2\frac{v_z}{c^2}\frac{dv_z}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}}$$

Τετραορμή & σχετικιστική ενέργεια

Σχετικιστική ορμή: **p** = mγ**υ**

$$P^{\mu} = m\eta^{\mu} = \left(m\gamma c, m\gamma \vec{\upsilon}\right)$$

Αναλλοίωτο μέτρο της τετραορμής
(όλοι οι παρατηρητές μετρούν την ίδια τιμή)

$$(P)^2 = P^{\mu} \cdot P^{\mu} = m^2\gamma^2c^2 - m^2\gamma^2\upsilon^2 = m^2c^2$$

Τι παριστάνει αυτός ο όρος;
Θα ανατρέξουμε στο κλασικό όριο υ << c.

Ενέργεια ηρεμίας: **mc²** (Κάθε σωματίδιο έχει ενέργεια ακόμη κι αν είναι ακίνητο. Η ενέργεια αυτή εκδηλώνεται στις αλληλεπιδράσεις των στοιχειωδών σωματιδίων.)

Κινητική ενέργεια K

$$m\gamma c = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \xrightarrow[(1+x)^a \approx 1+ax]{\upsilon \ll c} mc\left[1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right] = \frac{1}{c}\left[mc^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2\right] = \frac{E}{c}$$

Ολική ενέργεια

$$P^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Τετραορμή

$$(P)^2 = m^2c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 \Rightarrow \boxed{E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}$$

$$\boxed{K = E - mc^2}$$

Αναλλοίωτο μέτρο

$$\frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta p_x\right)$$

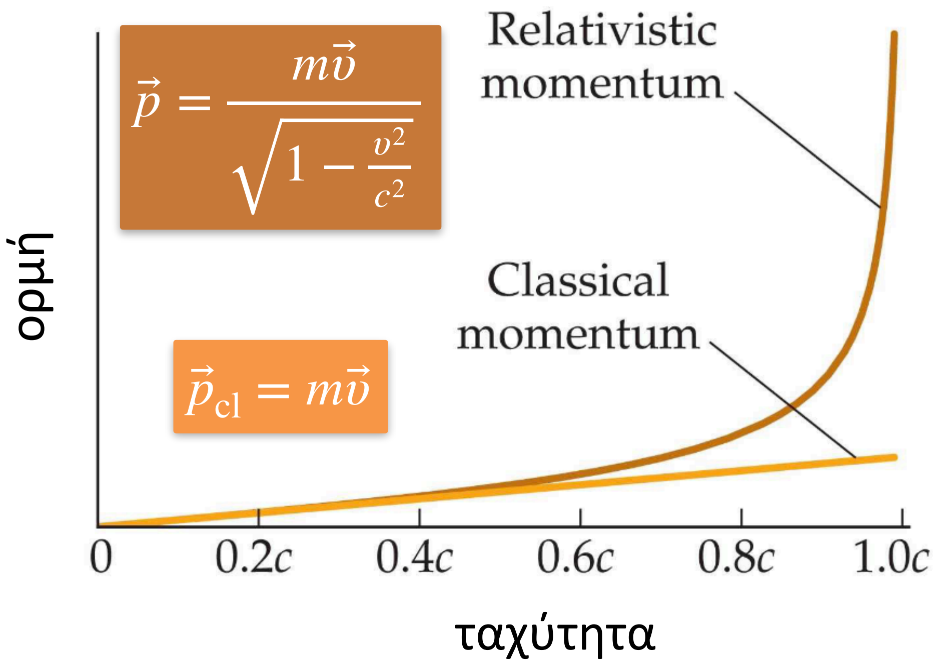
$$p'_x = \gamma\left(p_x - \beta\frac{E}{c}\right)$$

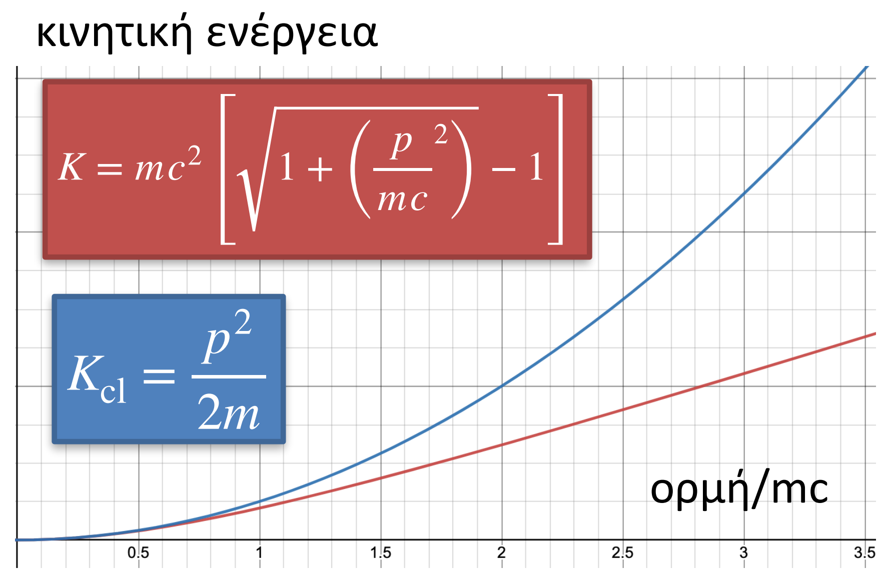
$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

Μετασχηματισμός Lorentz για την τετραορμή

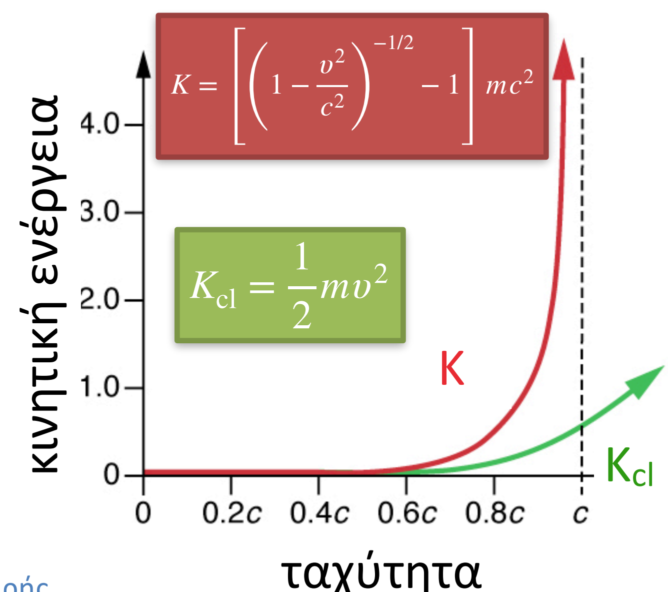
Σχετικιστική ορμή & κινητική ενέργεια





$$p \ll mc: \; K \approx \frac{p^2}{2m} = K_{\rm cl}$$

$$p \gg mc: \; K \approx pc$$



Κίνηση υπό σταθερή δύναμη

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης ενώ είναι αρχικά ακίνητο.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow F\hat{x} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{p}(t) = (Ft + C)\,\hat{x}$$

2ος Ν. Newton

$$p(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$a \equiv \frac{F}{m}$$

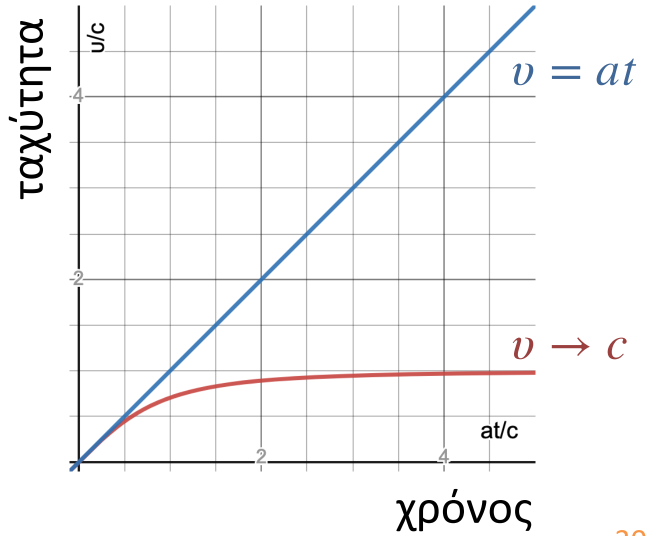
$$p(t) = Ft \Rightarrow \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = Ft \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{(F/m)\,t}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}} = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}$$

$$x(t) = \int_0^t \upsilon(t')\,dt' = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1\right]$$

$$t \to 0 : \upsilon(t) \approx at,\;\; x(t) \approx \frac{1}{2}at^2$$

$$t \to \infty : \upsilon(t) \approx c,\;\; x(t) \approx ct$$

Κλασικό όριο & σχετικιστικό όριο



Σχετικιστική ορμή & ενέργεια (παράδειγμα)

Ένα ηλεκτρόνιο ($m_e = 0.5\,\mathrm{MeV/c^2}$) έχει ταχύτητα $\upsilon = 0.8c$ στο σύστημα αναφοράς ενός ακίνητου παρατηρητή. Να βρείτε την ορμή του, την κινητική του ενέργεια και τη συνολική του ενέργεια. Να βρείτε τα ίδια μεγέθη ως προς έναν παρατηρητή που κινείται με ταχύτητα $v = 0.6c$ ως προς τον πρώτο παρατηρητή, παράλληλα στην ταχύτητα του ηλεκτρονίου.

$$\gamma_\upsilon = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = 1.7$$

$$p = m\gamma\upsilon = 0.5\,\mathrm{MeV}/c^2 \cdot 1.7 \cdot 0.8c = 0.7\,\mathrm{MeV}/c$$

$$E = m\gamma c^2 = 0.5\,\mathrm{MeV}/c^2 \cdot 1.7 \cdot c^2 = 0.85\,\mathrm{MeV}$$

$$K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 = 0.7 \cdot 0.5\,\mathrm{MeV}/c^2 \cdot c^2 = 0.35\,\mathrm{MeV}$$

Σχετικιστικές μονάδες

Ταχύτητα: κλάσμα του c

Ενέργεια: eV (και πολλαπλάσια)

Μάζα: $\mathrm{eV/c^2}$

Ορμή: eV/c

$$\upsilon' = \frac{\upsilon - v}{1 - \frac{\upsilon v}{c^2}} = \frac{0.8c - 0.6c}{1 - 0.8 \cdot 0.6} \approx 0.4c$$

$$\gamma_{\upsilon'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.4^2}} \approx 1.09$$

$\gamma_{\upsilon'}$: για τον υπολογισμό της ενέργειας

$$E' = m\gamma_{\upsilon'}c^2 = 0.54\,\mathrm{MeV}$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1.25$$

γ_v: για τον μετασχ. Lorentz

$$\boxed{\sqrt{E^2 - p^2c^2} = \sqrt{E'^2 - p'^2c^2} = mc^2}$$

$$E' = \gamma_v\left(E - \beta_v pc\right) = 1.25\left(0.85\,\mathrm{MeV} - 0.6 \cdot 0.7\,\mathrm{MeV}/c \cdot c\right) = 0.54\,\mathrm{MeV}$$

$$p' = \gamma_v\left(p - \beta_v \frac{E}{c}\right) = 1.25 \cdot \left(0.7\,\mathrm{MeV}/c - 0.6 \cdot 0.85\,\mathrm{MeV}/c\right) = 0.24\,\mathrm{MeV}/c$$

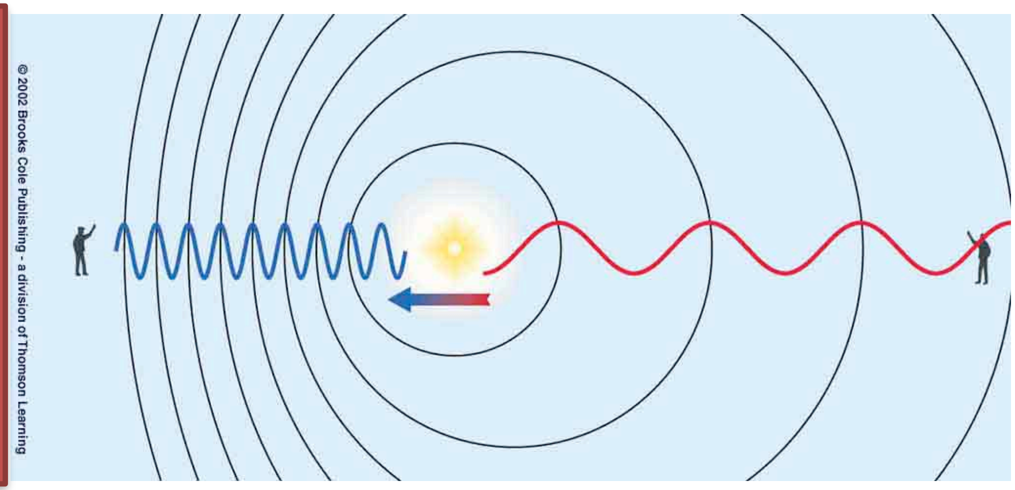
$$K' = E' - mc^2 = 0.04\,\mathrm{MeV}$$

Αναλλοίωτη ποσότητα

Προσοχή: ***η ενέργεια ΔΕΝ είναι αναλλοίωτη!!***

Φωτόνια & φαινόμενο Doppler

- Τα φωτόνια είναι άμαζα στοιχειώδη σωματίδια και αποτελούν τους φορείς της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης.
- Τα φωτόνια έχουν πάντα ταχύτητα c.
- Κάθε φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\gamma = hf = hc/\lambda$.
- Το φωτόνιο δεν έχει ενέργεια ηρεμίας.
- Κάθε φωτόνιο έχει ορμή $p = E_\gamma/c$ (στη σχετικότητα η ορμή σχετίζεται με τη μεταφορά ενέργειας και όχι απαραίτητα με τη μάζα).



Η ενέργεια και η συχνότητα του φωτονίου εξαρτώνται από τον παρατηρητή.

Σύστημα αναφοράς πηγής

$$P_\mu = \left(\frac{E_\gamma}{c}, \frac{E_\gamma}{c}, 0, 0\right)$$

Μετασχηματισμός Lorentz

$$\frac{E'_\gamma}{c} = \gamma\left(\frac{E_\gamma}{c} - \beta\frac{E_\gamma}{c}\right) \Rightarrow E'_\gamma = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}E_\gamma \Rightarrow \boxed{f' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f}$$

Σύστημα αναφοράς παρατηρητή

$$P'_\mu = \left(\frac{E'_\gamma}{c}, \frac{E'_\gamma}{c}, 0, 0\right)$$

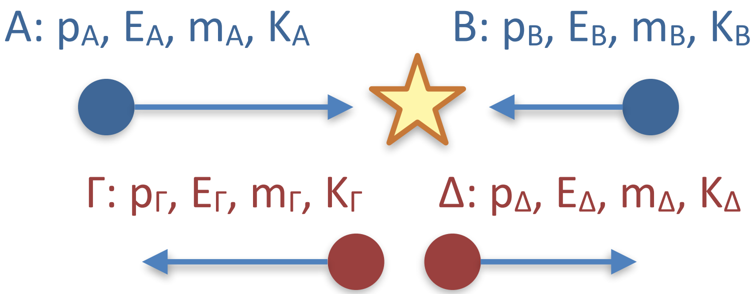
Ενέργεια φωτονίου

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Σχέση ενέργειας-ορμής

$$E_\gamma = p_\gamma c$$

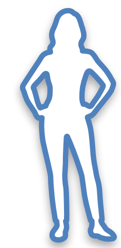
Αντιδράσεις (σκεδάσεις) σωματιδίων



- Οι αλληλεπιδράσεις των υποατομικών σωματιδίων που κινούνται σχετικιστικά έχουν τον χαρακτήρα στιγμιαίων σκεδάσεων.
- Πριν και μετά την αλληλεπίδραση **διατηρείται η συνολική τετραορμή του συστήματος**. Δηλαδή διατηρείται η σχετικιστική ορμή και η συνολική ενέργεια (ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς — συνήθως το LAB).
- Δεν διατηρείται υποχρεωτικά η μάζα!
- **Ελαστική** σκέδαση: τα σωματίδια πριν και μετά είναι τα ίδια, οπότε διατηρείται η μάζα και η κινητική ενέργεια.
- **Ανελαστική** σκέδαση: τα εξερχόμενα σωματίδια είναι διαφορετικά από τα εισερχόμενα.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια των σωματιδίων, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να συμβεί ανελαστική κρούση.

Σύστημα "εργαστηρίου" (LAB)

Ακίνητος παρατηρητής



$$\boxed{P_A + P_B = P_\Gamma + P_\Delta}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_\Gamma + \vec{p}_\Delta \\ E_A + E_B = E_\Gamma + E_\Delta\end{gathered}}$$

$$K_A + m_A c^2 + K_B + m_B c^2 = K_\Gamma + m_\Gamma c^2 + K_\Delta + m_\Delta c^2$$

Αντιδράσεις σωματιδίων (εφαρμογή)

Σε ένα σύστημα αναφοράς Σ ένα ηλεκτρόνιο (e^-) και ένα ποζιτρόνιο (e^+) κινούνται με αντίθετες ταχύτητες 0.8c και −0.6c (όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός) επί του άξονα των *x*, συγκρούονται και εξαϋλώνονται παράγοντας δύο φωτόνια που κινούνται στον ίδιο άξονα με τα αρχικά σωματίδια. Η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου είναι $m_e = 0.5\,\mathrm{MeV/c^2}$.

(α) Να βρείτε την ορμή, την κινητική ενέργεια και την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου στο σύστημα Σ.

(β) Να βρείτε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου ως προς το ποζιτρόνιο.

(γ) Να βρείτε την ενέργεια, την ορμή και την ταχύτητα των δύο παραγόμενων φωτονίων στο σύστημα Σ.

(α)

$$\gamma_{e^-} = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{5}{3} \approx 1.67 \qquad \gamma_{e^+} = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$p_{e^-} = m_e \gamma_{e^-} v_{e^-} = 0.5\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}\cdot 1.67 \cdot 0.8c = 0.667\,\frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

$$p_{e^+} = m_e \gamma_{e^+} v_{e^+} = 0.5\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}\cdot 1.25 \cdot 0.6c = 0.375\,\frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

$$E_{e^-} = m_e \gamma_{e^-} c^2 = 0.5\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}\cdot 1.67 \cdot c^2 = 0.834\,\mathrm{MeV}$$

$$E_{e^+} = m_e \gamma_{e^+} c^2 = 0.5\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}\cdot 1.25 \cdot c^2 = 0.625\,\mathrm{MeV}$$

$$K_{e^-} = E_{e^-} - m_e c^2 = 0.834\,\mathrm{MeV} - 0.5\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}c^2 = 0.334\,\mathrm{MeV}$$

$$K_{e^+} = E_{e^+} - m_e c^2 = 0.625\,\mathrm{MeV} - 0.5\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}c^2 = 0.125\,\mathrm{MeV}$$

Αντιδράσεις σωματιδίων (εφαρμογή)

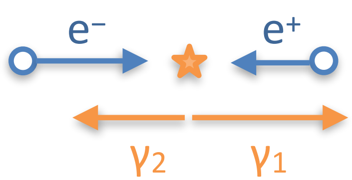
Σε ένα σύστημα αναφοράς Σ ένα ηλεκτρόνιο (e⁻) και ένα ποζιτρόνιο (e⁺) κινούνται με αντίθετες ταχύτητες 0.8c και −0.6c (όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός) επί του άξονα των *x*, συγκρούονται και εξαϋλώνονται παράγοντας δύο φωτόνια που κινούνται στον ίδιο άξονα με τα αρχικά σωματίδια. Η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου είναι $m_e = 0.5\,\mathrm{MeV/c^2}$.

(α) Να βρείτε την ορμή, την κινητική ενέργεια και την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου στο σύστημα Σ.

(β) Να βρείτε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου ως προς το ποζιτρόνιο.

(γ) Να βρείτε την ενέργεια, την ορμή και την ταχύτητα των δύο παραγόμενων φωτονίων στο σύστημα Σ.

(β) $$u_{e^-} = \frac{v_{e^-} - v_{e^+}}{1 - \frac{v_{e^-} v_{e^+}}{c^2}} = \frac{0.8c - (-0.6c)}{1 - \frac{0.8c(-0.6c)}{c^2}} = \frac{1.4c}{1.48c} = 0.946c$$



(γ) $$P_{\gamma_1} + P_{\gamma_2} = P_{e^-} + P_{e^+} \Rightarrow$$

$$E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} = E_{e^-} + E_{e^+} = \left(0.834 + 0.625\right)\mathrm{MeV} = 1.459\,\mathrm{MeV}$$

$$\vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma_2} = \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} \Rightarrow \frac{E_{\gamma_1}}{c} - \frac{E_{\gamma_2}}{c} = p_{e^-} - p_{e^+} \Rightarrow E_{\gamma_1} - E_{\gamma_2} = \left(0.667 - 0.125\right)\frac{\mathrm{MeV}}{c}c = 0.542\,\mathrm{MeV}$$

$$E_{\gamma_1} = 1\,\mathrm{MeV}, \quad E_{\gamma_2} = 0.459\,\mathrm{MeV},$$

$$\boxed{v_{\gamma_1} = v_{\gamma_2} = c}$$

$$p_{\gamma_1} = \frac{E_{\gamma_1}}{c} = 1\,\frac{\mathrm{MeV}}{c}, \quad p_{\gamma_1} = \frac{E_{\gamma_2}}{c} = 0.459\,\frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

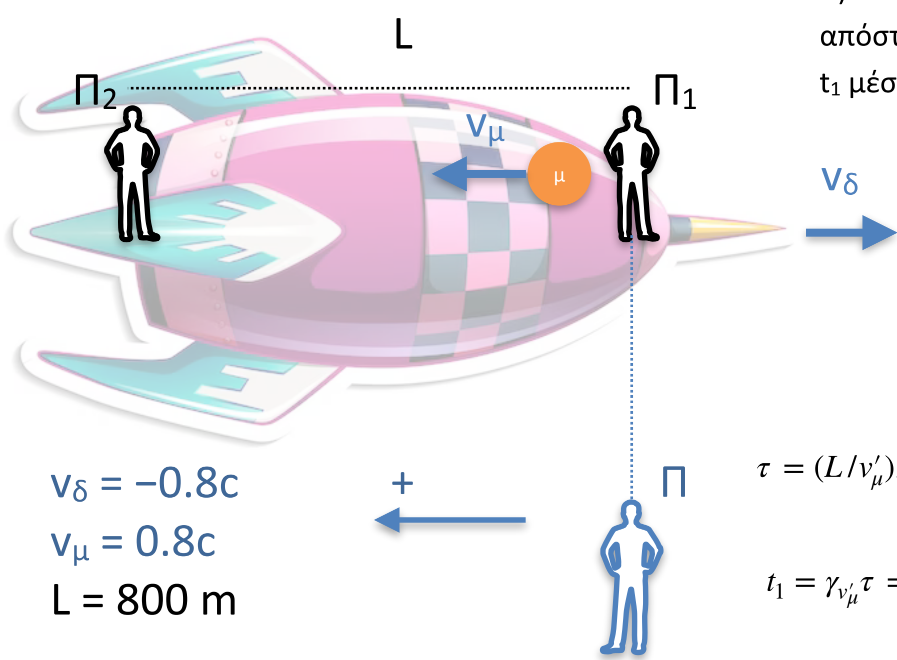
Άσκηση

Διαστημόπλοιο μήκους ηρεμίας 800 m φέρει ακίνητους ως προς αυτό παρατηρητές Π_1 και Π_2 στο μπροστινό και πίσω άκρο του, αντίστοιχα. Το διαστημόπλοιο κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα x με ταχύτητα $0.8c$ ως προς κάποιον παρατηρητή Π (όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός). Τη στιγμή $t = 0$ για τον Π, ο Π_1 περνάει μπροστά από τον Π και συγχρονίζουν τότε τα ρολόγια τους. Εκείνη την στιγμή ο Π_1 εκπέμπει προς τον Π_2 μιόνιο (στοιχειώδες σωματίδιο με χρόνο ζωής τ στο δικό του σύστημα αναφοράς) με ταχύτητα $0.8c$ ως προς τον Π.

(α) Ποιος είναι ο χρόνος τ αν το μιόνιο διασπάται αμέσως μόλις φτάσει στον Π_2;

(β) Ποιες είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες (t', x') της άφιξης του μιονίου στον Π_2 για τον παρατηρητή Π_1;

(γ) Ποια είναι η θέση και η χρονική στιγμή της άφιξης του μιονίου στον Π_2 για τον παρατηρητή Π;



$v_\delta = -0.8c$

$v_\mu = 0.8c$

L = 800 m

α) Στο σύστημα του Π_1 το μιόνιο έχει ταχύτητα v'_μ και διανύει την απόσταση L σε χρόνο $t_1 = L/v'_\mu$. Ο ιδιόχρονος τ σχετίζεται με τον t_1 μέσω της σχέσης $\tau = t_1/\gamma_{v'_\mu}$.

$$v'_\mu = \frac{v_\mu - v_\delta}{1 - (v_\mu v_\delta)/c^2} = \frac{0.8c - (-0.8c)}{1 + 0.8^2} = 0.976c$$

$$\gamma_{v'_\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v'_\mu/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.976^2}} \approx 4.6$$

$$\tau = (L/v'_\mu)/\gamma_{v'_\mu} = \frac{L}{4.6 \cdot 0.976c} = \frac{800\,\text{m}}{13.47 \times 10^8\,\text{m/s}} = 59.4 \times 10^{-8}\,\text{s} \approx 0.6\,\mu\text{s}$$

$$t_1 = \gamma_{v'_\mu}\tau = 4.6 \cdot 0.6\,\mu\text{s}$$

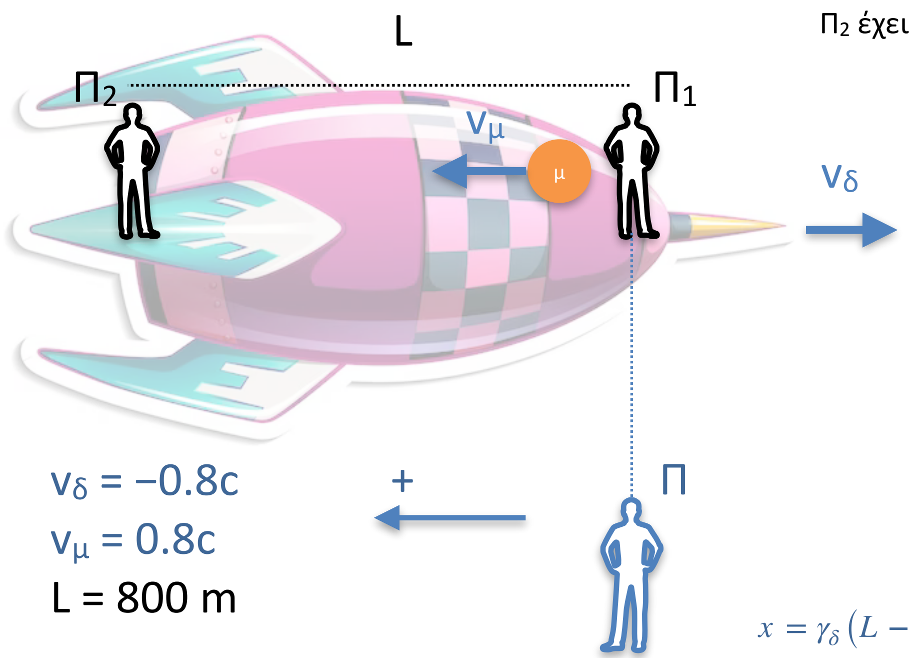
Άσκηση (συνέχεια)

Διαστημόπλοιο μήκους ηρεμίας 800 m φέρει ακίνητους ως προς αυτό παρατηρητές Π_1 και Π_2 στο μπροστινό και πίσω άκρο του, αντίστοιχα. Το διαστημόπλοιο κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα x με ταχύτητα $0.8c$ ως προς κάποιον παρατηρητή Π (όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός). Τη στιγμή $t = 0$ για τον Π, ο Π_1 περνάει μπροστά από τον Π και συγχρονίζουν τότε τα ρολόγια τους. Εκείνη την στιγμή ο Π_1 εκπέμπει προς τον Π_2 μιόνιο (στοιχειώδες σωματίδιο με χρόνο ζωής τ στο δικό του σύστημα αναφοράς) με ταχύτητα $0.8c$ ως προς τον Π.

(α) Ποιος είναι ο χρόνος τ αν το μιόνιο διασπάται αμέσως μόλις φτάσει στον Π_2;

(β) Ποιες είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες (t', x') της άφιξης του μιονίου στον Π_2 για τον παρατηρητή Π_1;

(γ) Ποια είναι η θέση και η χρονική στιγμή της άφιξης του μιονίου στον Π_2 για τον παρατηρητή Π;



$v_\delta = -0.8c$
$v_\mu = 0.8c$
L = 800 m

β) Στο σύστημα του Π_1 το γεγονός της άφιξης του μιονίου στον Π_2 έχει χωροχρονικές συντεταγμένες (t_1, L).

$$t_1 = \gamma_{v'_\mu}\tau = 4.6 \cdot 0.6\,\mu\text{s} \approx 2.8\,\mu\text{s}$$

$$(t_1, L) = (2.8\,\mu\text{s}, 800\,\text{m})$$

γ) Για την άφιξη του μιονίου στον Π_2 ως προς τον Π θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Lorentz από τον Π_1 στον Π. Παρατηρούμε ότι ο Π κινείται ως προς τον Π_1 με ταχύτητα v_δ.

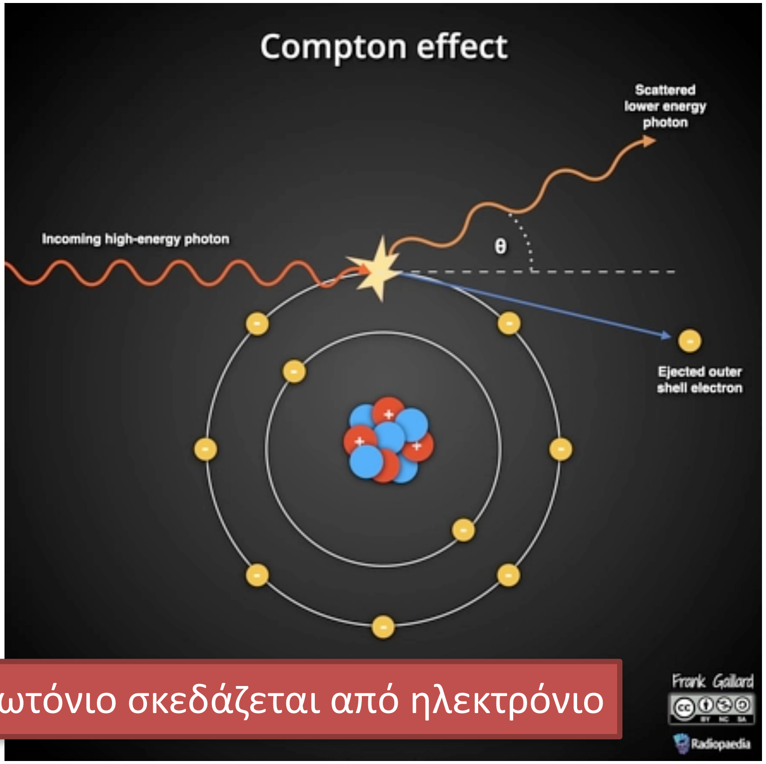
$$\gamma_\delta = \frac{1}{\sqrt{1-(v_\delta/c)^2}} = 1.67$$

$$t = \gamma_\delta\left(t_1 - \frac{v_\delta L}{c^2}\right) = 1.67\left(2.8\times10^{-6} - \frac{0.8\cdot 800}{3\times10^8}\right)\text{s} \approx 1.1\,\mu\text{s}$$

$$x = \gamma_\delta\left(L - v_\delta t_1\right) = 1.67\left(800 - 0.8\cdot 3\times10^8\cdot 2.8\times10^{-6}\right)\text{m} = 128\,\text{m}$$

$$(t, x) = (1.1\,\mu\text{s}, 128\,\text{m})$$

Σκέδαση Compton



Φωτόνιο σκεδάζεται από ηλεκτρόνιο

Αρχικά

$$P_\gamma^\mu = \left(\frac{E_\gamma}{c}, \vec{p}_\gamma\right)$$

$$P_e^\mu = \left(m_e c, \vec{0}\right)$$

Τελικά

$$P_{\gamma'}^\mu = \left(\frac{E_{\gamma'}}{c}, \vec{p}_{\gamma'}\right)$$

$$P_e^{\mu\,\prime} = \left(\frac{E_e'}{c}, \vec{p}_e'\right)$$

Διατήρηση τετραορμής

$$E_e' + E_{\gamma'} = E_e + E_\gamma \qquad \vec{p}_e' + \vec{p}_{\gamma'} = \vec{p}_e + \vec{p}_\gamma$$

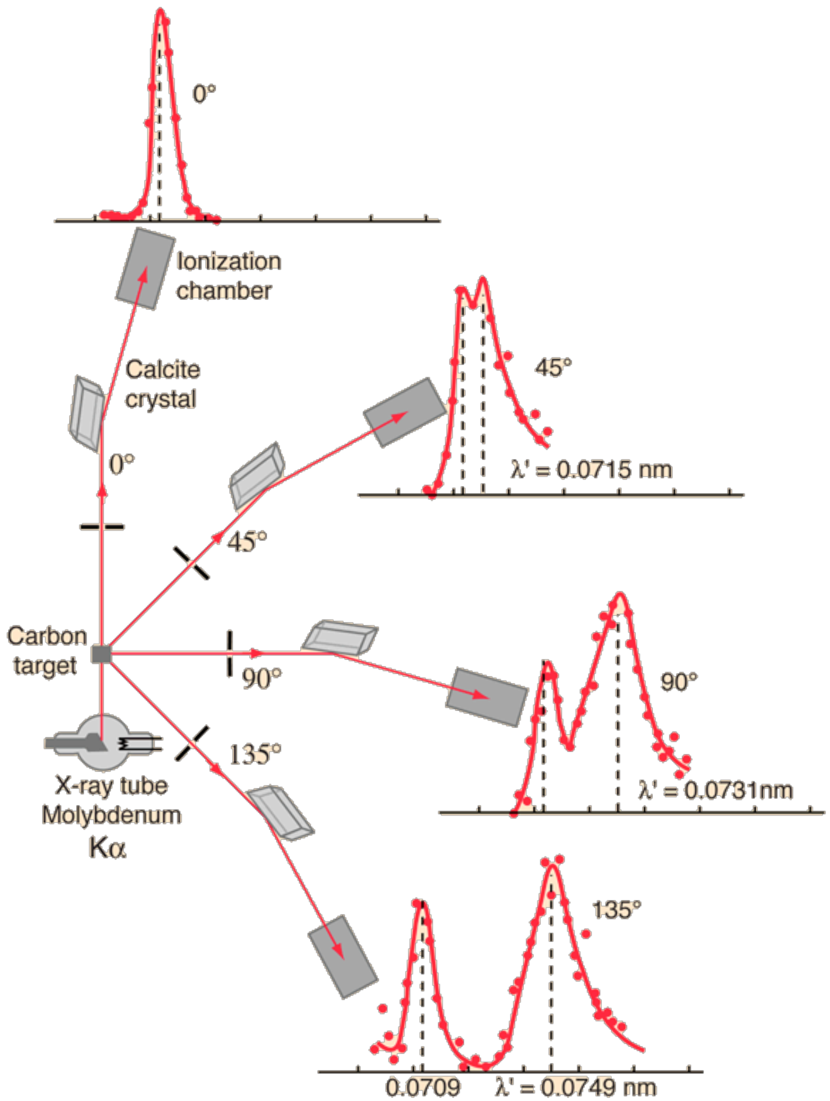
$$\boxed{E_\gamma' = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1-\cos\theta)}}$$

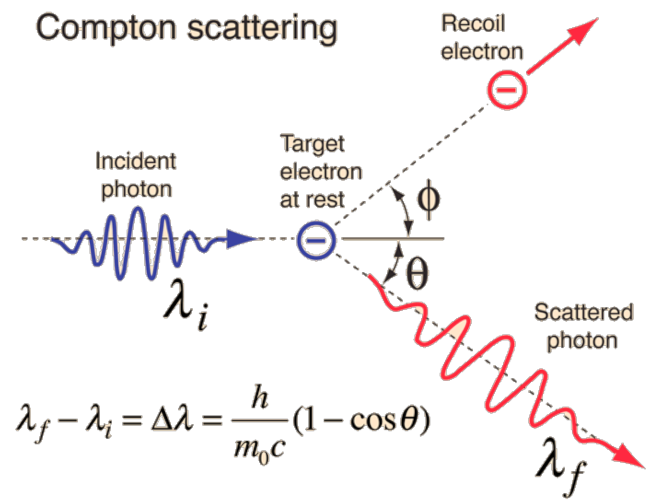
$$p_e'^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos\theta \Rightarrow \left(E_\gamma + m_e c^2 - E_\gamma'\right)^2 = E_\gamma^2 + E_\gamma'^2 - 2E_\gamma E_\gamma' \cos\theta$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{E_\gamma'} - \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{hc}{E_\gamma}\left[1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1-\cos\theta)\right] - \frac{hc}{E_\gamma} \Rightarrow \boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)}$$

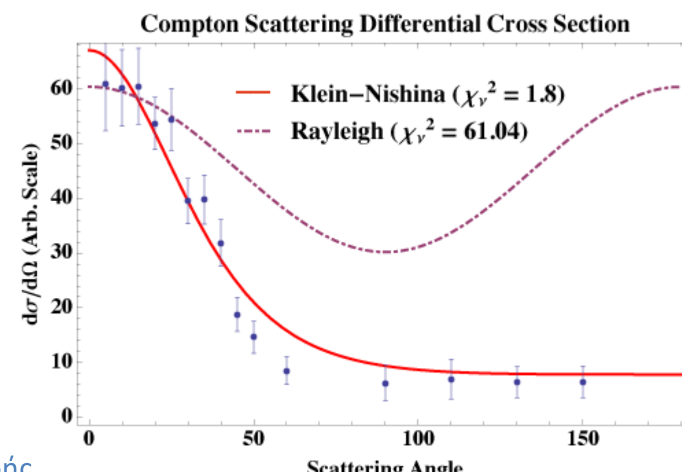
$$\lambda_C = \frac{hc}{m_e} = 2.43 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

Σκέδαση Compton (συνέχεια)

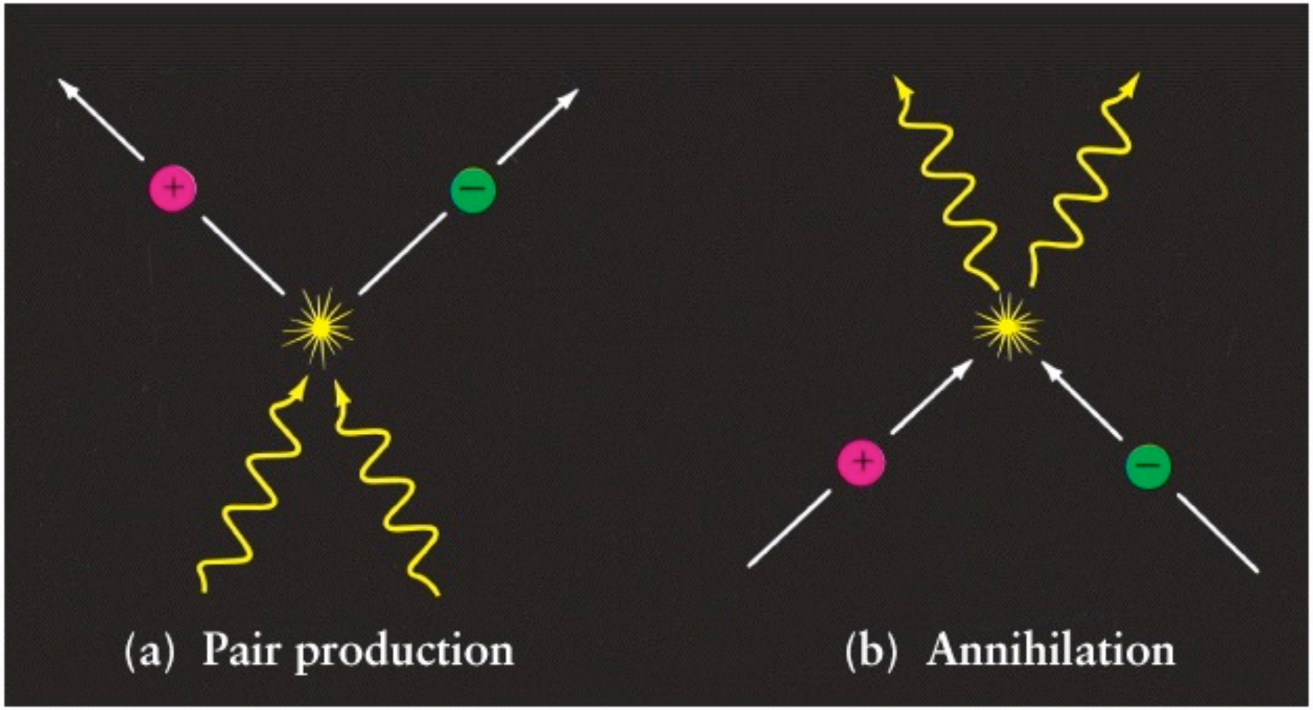




Το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει διαφορετική ενέργεια (και επομένως μήκος κύματος και συχνότητα), ανάλογα με τη γωνία σκέδασης.



Η μάζα ΔΕΝ διατηρείται — ισοδυναμία μάζας-ενέργειας!



Η αμεσότερες αποδείξεις της ισοδυναμίας μάζας-ενέργειας είναι το φαινόμενο της **δίδυμης γένεσης** (pair production) και η **εξαΰλωση** (annihilation). Στην πρώτη περίπτωση δύο φωτόνια (άμαζα) αλληλεπιδρούν και παράγεται ένα ζεύγος σωματιδίου-αντισωματιδίου. Έτσι έχουμε δημιουργία μάζας από την ενέργεια των φωτονίων. Στη δεύτερη περίπτωση συμβαίνει το αντίστροφο: ένα σωματίδιο και ένα αντισωματίδιο αλληλεπιδρούν παράγοντας δύο φωτόνια. Έτσι έχουμε μετατροπή των αρχικών μαζών σε ενέργεια φωτονίων. Αυτές οι αντιδράσεις και πολλές άλλες στη σωματιδιακή φυσική αποδεικνύουν περίτρανα ότι η μάζα δεν διατηρείται.