Φυσική Ι
(Μηχανική)

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Κωνσταντίνος Κουσουρής

Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Σκοποί

1. μετασχηματισμοί συντεταγμένων
2. αναλλοιότητα Galileo-Newton
3. αδρανειακοί παρατηρητές
4. μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς, αδρανειακές δυνάμεις.

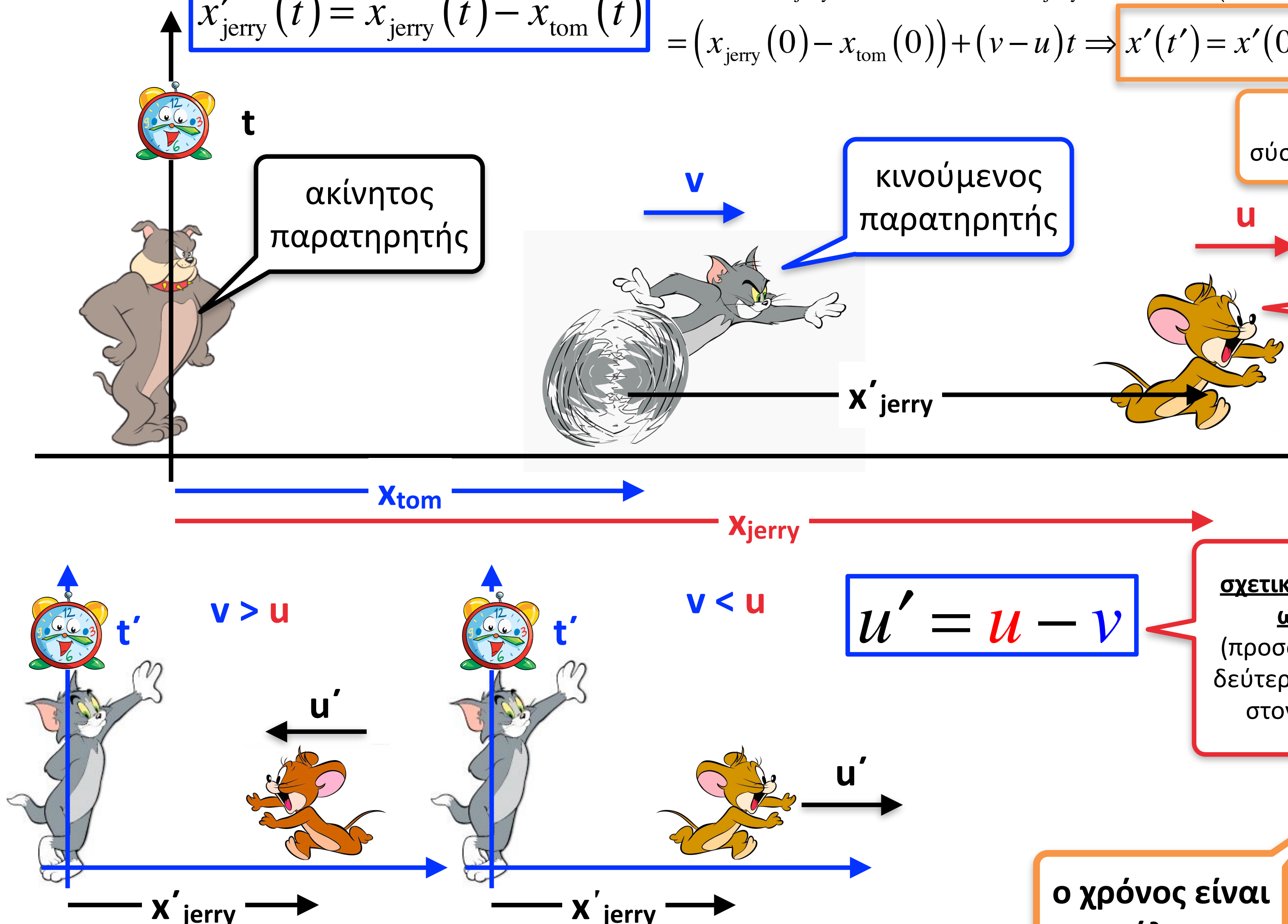
Συστήματα αναφοράς (κίνηση σε μία διάσταση)

$$\boxed{x'_{\text{jerry}}(t) = x_{\text{jerry}}(t) - x_{\text{tom}}(t)}$$

$$x'(t') = x_{\text{jerry}}(t) - x_{\text{tom}}(t) = x_{\text{jerry}}(0) + vt - \left(x_{\text{tom}}(0) + ut\right)$$

$$= \left(x_{\text{jerry}}(0) - x_{\text{tom}}(0)\right) + (v-u)t \Rightarrow \boxed{x'(t') = x'(0) + u't'}$$

κίνηση του Jerry στο σύστημα αναφοράς του Tom



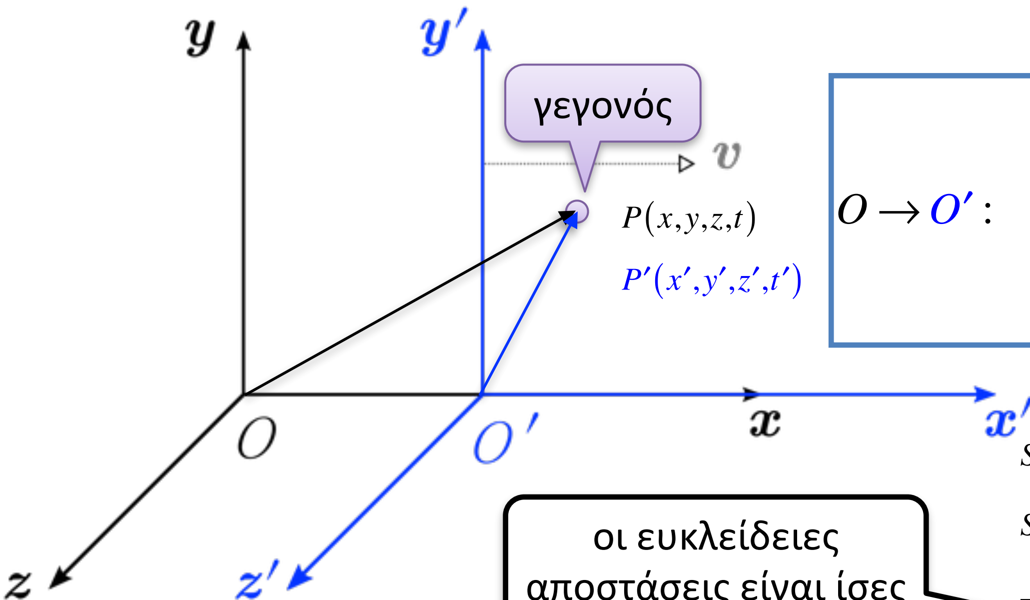
$$\boxed{u' = u - v}$$

<u>σχετική ταχύτητα του Jerry ως προς τον Tom</u>
(προσοχή: οι ταχύτητες στο δεύτερο μέρος αναφέρονται στον ίδιο παρατηρητή)

$$\boxed{t' = t}$$

ο χρόνος είναι απόλυτος

Μετασχηματισμός Γαλιλαίου (κίνηση σε μία διάσταση)



μετασχηματισμός Γαλιλαίου

$$O \to O' : \begin{cases} t' = t \\ x' = x - \upsilon t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} , \quad O' \to O : \begin{cases} t = t' \\ x = x' + \upsilon t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

οι ευκλείδειες αποστάσεις είναι ίσες σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς

$$\left.\begin{aligned} S &\equiv (AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ S' &\equiv (A'B') = \sqrt{(x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2} \\ &= \sqrt{\left((x_B - \cancel{\upsilon t}) - (x_A - \cancel{\upsilon t})\right)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{S = S'}$$

οι άξονες είναι παράλληλοι

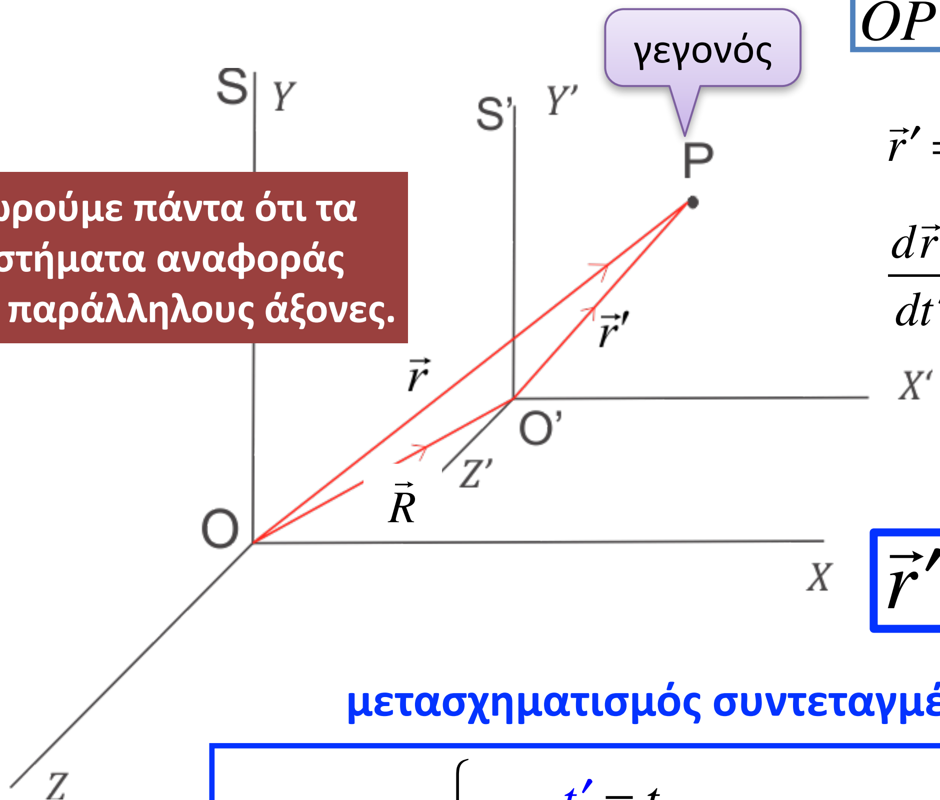
$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x} \\ \hat{y}' &= \hat{y} \\ \hat{z}' &= \hat{z} \end{aligned}}$$

Γαλιλαϊκή Σχετικότητα

- Υπάρχει ο **<u>απόλυτος χώρος</u>**, δηλαδή ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο οι Ν. Newton ισχύουν. Κάθε άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτό (και επομένως συνδέονται με μετασχηματισμό Γαλιλαίου) ονομάζεται **<u>αδρανειακό</u>** και ισχύουν οι Ν. Newton (δηλαδή έχουν την ίδια μορφή).
- Ο **<u>χρόνος είναι απόλυτος</u>** και ίδιος σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

Μετασχηματισμός Γαλιλαίου (κίνηση στον χώρο)

Θεωρούμε πάντα ότι τα συστήματα αναφοράς έχουν παράλληλους άξονες.



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

ο χρόνος είναι απόλυτος

$$\vec r' = \vec r - \vec R \Rightarrow \frac{d\vec r'}{dt} = \frac{d\vec r}{dt} - \frac{dR}{dt} \underset{t'=t}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\vec r'}{dt'} = \frac{d\vec r}{dt} - \frac{dR}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec v' = \vec v - \vec \upsilon}$$

μετασχηματισμός ταχυτήτων Γαλιλαίου

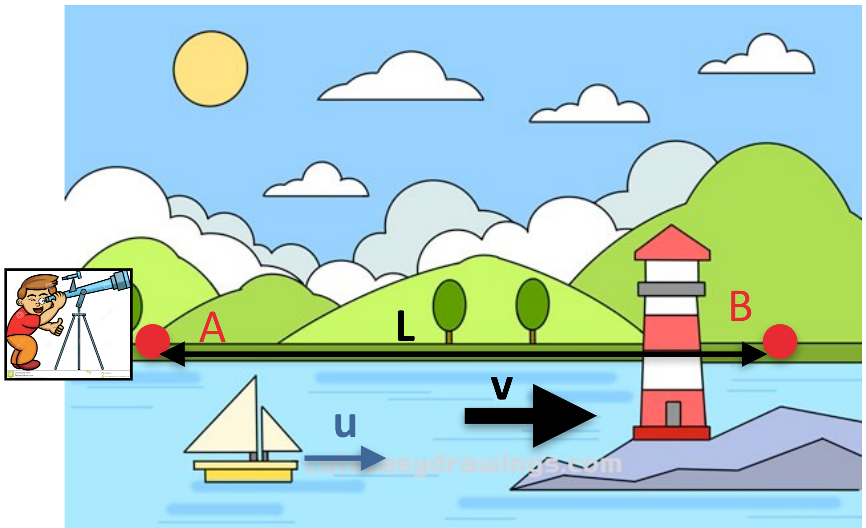
$$\boxed{\vec r' = \vec r - \vec \upsilon t}$$

μετασχηματισμός συντεταγμένων Γαλιλαίου

$$O \to O' : \begin{cases} t' = t \\ x' = x - \upsilon_x t \\ y' = y - \upsilon_y t \\ z' = z - \upsilon_z t \end{cases} \quad , \quad O' \to O : \begin{cases} t = t' \\ x = x' + \upsilon_x t' \\ y = y' + \upsilon_y t' \\ z = z' + \upsilon_z t' \end{cases}$$

Άσκηση #1

Στην ίδια όχθη ενός ποταμού και σε απόσταση L μεταξύ τους, βρίσκονται δύο λιμάνια Α και Β. Ένα πλοίο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα u πηγαίνει από το Α στο Β σε χρόνο t_1 και από το Β στο Α σε χρόνο t_2. Να υπολογίσετε την ταχύτητα v της ροής του ποταμού και την ταχύτητα του πλοίου ως προς το νερό.



Προσοχή
Η ταχύτητα u του πλοίου αναφέρεται στο σύστημα του (κινούμενου) ποταμού!

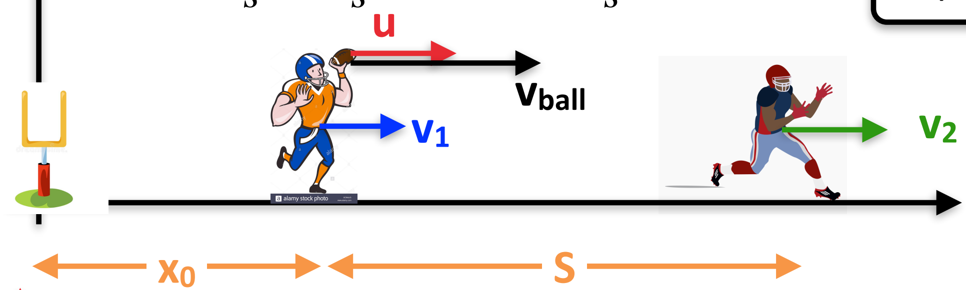
$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{L}{u+v} \\ t_2 = \dfrac{L}{u-v} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u+v = \dfrac{L}{t_1} \\ u-v = \dfrac{L}{t_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u = \dfrac{L}{t_1} + \dfrac{L}{t_2} \\ 2v = \dfrac{L}{t_1} - \dfrac{L}{t_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{L(t_1+t_2)}{2t_1t_2} \\ v = \dfrac{L(t_2-t_1)}{2t_1t_2} \end{array}\right.$$

Άσκηση #2

Ένας παίκτης του αμερικάνικου ποδοσφαίρου κινείται με ταχύτητα $v_1 = 5$ m/s και πετάει προς τα μπρος την μπάλα με ταχύτητα $u = 7$ m/s (ως προς αυτόν), με σκοπό να την πιάσει δεύτερος παίκτης που τρέχει με ταχύτητα $v_2 = 8$ m/s, επίσης προς τα μπροστά. Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα πιάσει την μπάλα ο δεύτερος παίκτης αν η αρχική τους απόσταση είναι $S = 24$ m.

$$u = v_{\text{ball}} - v_1 \Rightarrow v_{\text{ball}} = u + v_1 =$$

$$= 7\frac{m}{s} + 5\frac{m}{s} \Rightarrow v_{\text{ball}} = 12\frac{m}{s}$$



ακίνητος παρατηρητής

$$x_{\text{ball}}(t) = x_0 + v_{\text{ball}}t, \quad x_2(t) = x_0 + S + v_2 t$$

$$x_{\text{ball}}(t_0) = x_2(t_0) \Rightarrow \cancel{x_0} + v_{\text{ball}}t_0 = \cancel{x_0} + S + v_2 t_0 \Rightarrow$$

$$t_0 = \frac{S}{v_{\text{ball}} - v_2} = \frac{24m}{(12-8)\frac{m}{s}} \Rightarrow t_0 = 6s$$

μπάλα

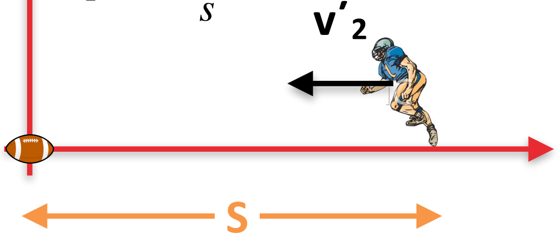
$$x'_{\text{ball}}(t) = 0, \quad x'_2(t) = S - v'_2 t$$

$$x'_{\text{ball}}(t_0) = x'_2(t_0) \Rightarrow 0 = S - v'_2 t_0 \Rightarrow$$

$$t_0 = \frac{S}{v'_2} = \frac{24m}{4\frac{m}{s}} \Rightarrow t_0 = 6s$$

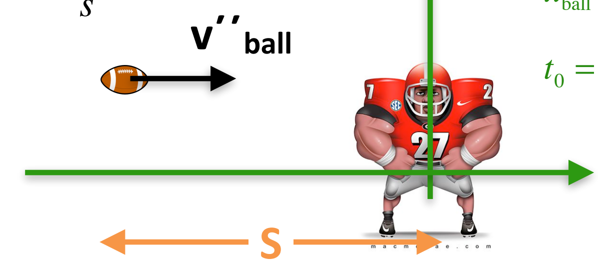
$$v'_2 = v_2 - v_{\text{ball}} = 8\frac{m}{s} - 12\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$v'_2 = -4\frac{m}{s}$$



$$v''_{\text{ball}} = v_{\text{ball}} - v_2 = 12\frac{m}{s} - 8\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$v''_{\text{ball}} = 4\frac{m}{s}$$



$$x''_{\text{ball}}(t) = -S + v''_{\text{ball}}t, \quad x''_2(t) = 0$$

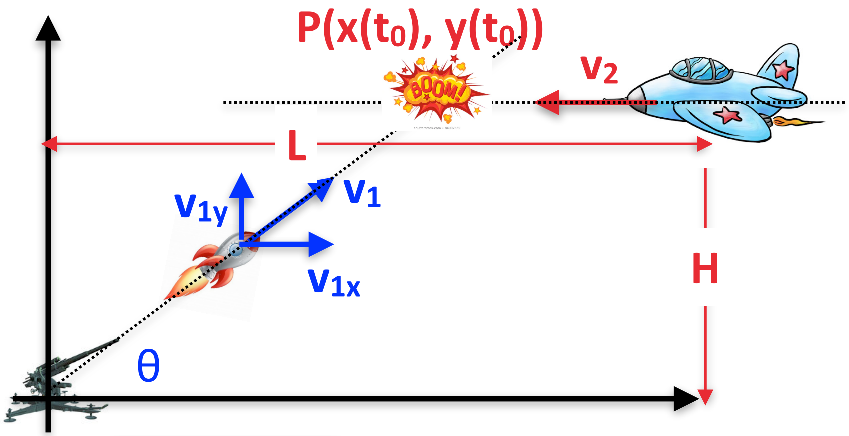
$$x''_{\text{ball}}(t_0) = x''_2(t_0) \Rightarrow -S + v''_{\text{ball}}t_0 = 0 \Rightarrow$$

$$t_0 = \frac{S}{v''_{\text{ball}}} = \frac{24m}{4\frac{m}{s}} \Rightarrow t_0 = 6s$$

παίκτης 2

Άσκηση #3

Ένα αεροπλάνο πετάει σε ύψος H = 2 km από το έδαφος και βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση L = 4 km από ακίνητο αντιαεροπορικό πυροβόλο. Η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι οριζόντια, με φορά προς το πυροβόλο και μέτρο v_2 = 200 m/s. α) Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα βλήμα του πυροβόλου ώστε να πετύχει το αεροπλάνο; β) Αν η ταχύτητα του βλήματος είναι v_1 = 200 m/s, να βρείτε σε πόσο χρόνο και σε ποιο σημείο θα πετύχει τον στόχο του. Αγνοήστε τη βαρύτητα και θεωρήστε ότι όλες οι κινήσεις είναι ομαλές.



$$\left\{\begin{array}{c} x_1(t) = v_{1x}t \\ y_1(t) = v_{1y}t \\ x_2(t) = L - v_{2x}t \\ y_2(t) = H \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1(t_0) = x_2(t_0) \Rightarrow v_{1x}t_0 = L - v_{2x}t_0 \\ y_1(t_0) = y_2(t_0) \Rightarrow v_{1y}t_0 = H \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} t_0 = \dfrac{H}{v_{1y}} \\ (v_{1x} + v_{2x})t_0 = L \Rightarrow v_{1x} = \dfrac{L}{H}v_{1y} - v_{2x} \end{array}\right.$$

Λύση στο σύστημα αναφοράς του πυροβόλου.

μέτρο της v_1

τριώνυμο ως προς v_{1y}

$$v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 \Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{L}{H}v_{1y} - v_{2x}\right)^2 + v_{1y}^2 \Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right)v_{1y}^2 - 2\frac{L}{H}v_{2x}v_{1y} + v_{2x}^2 \Rightarrow \left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right)v_{1y}^2 - \left(\frac{2L}{H}\right)v_{2x}v_{1y} + \left(v_{2x}^2 - v_1^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = \left(\frac{2L}{H}\right)^2 v_{2x}^2 - 4\left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right)\left(v_{2x}^2 - v_1^2\right) \Rightarrow \Delta = \cancel{\frac{4L^2}{H^2}v_{2x}^2} - \cancel{4\frac{L^2}{H^2}v_{2x}^2} - 4v_{2x}^2 + 4\frac{L^2}{H^2}v_1^2 + 4v_1^2 \Rightarrow \Delta = 4\left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right)v_1^2 - 4v_{2x}^2$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{L^2}{H^2} + 1\right)v_1^2 \geq v_{2x}^2 \Rightarrow v_1 \geq \frac{H}{\sqrt{L^2 + H^2}}v_{2x} \Rightarrow v_1 \geq \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}}200\frac{m}{s} \Rightarrow v_1 \geq 89.4\frac{m}{s}$$

συνθήκη επιλυσιμότητας

ελάχιστη ταχύτητα βλήματος

Άσκηση #3 (συνέχεια)

$$\left(\frac{L^2}{H^2}+1\right)v_{1y}^2-\left(\frac{2L}{H}\right)v_{2x}v_{1y}+\left(v_{2x}^2-v_1^2\right)=0\Rightarrow\left(\frac{4^2}{2^2}+1\right)v_{1y}^2-\frac{2\cdot 4}{2}200v_{1y}+\left(200^2-200^2\right)=0\Rightarrow$$

$$5v_{1y}^2-800v_{1y}=0\Rightarrow\begin{cases}\cancel{v_{1y}=0}\\ \boxed{v_{1y}=160\frac{m}{s}}\end{cases},\quad v_{1x}=\frac{L}{H}v_{1y}-v_{2x}=\frac{4}{2}160-200\Rightarrow\boxed{v_{1x}=120\frac{m}{s}}$$

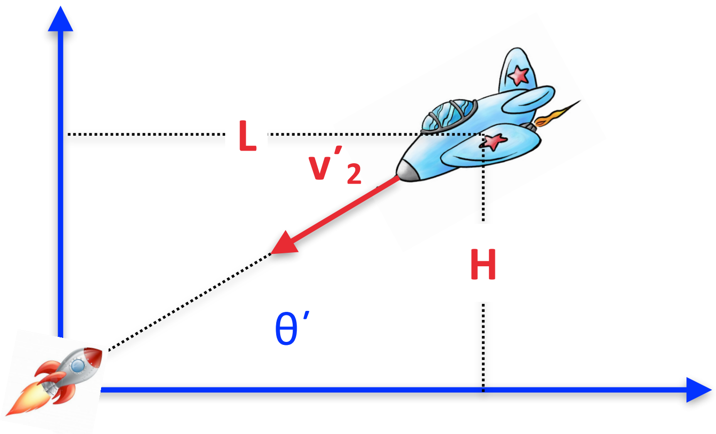
$$t_0=\frac{H}{v_{1y}}=\frac{2000m}{160\frac{m}{s}}\Rightarrow\boxed{t_0=12.5s},\quad x(t_0)=v_{1x}t_0=120\frac{m}{s}\cdot 12.5s\Rightarrow\boxed{x(t_0)=1.5km,\quad y(t_0)=2km}$$

σημείο συνάντησης

$$\tan\theta=\frac{y(t_0)}{x(t_0)}=\frac{2}{1.5}=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\Rightarrow\theta\simeq 53.1^\circ$$

γωνία βολής του βλήματος ως προς το πυροβόλο

Άσκηση #3 (συνέχεια)



Λύση στο σύστημα αναφοράς του βλήματος.

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{cases} v_{2x}' = -v_{2x} - v_{1x} \\ v_{2y}' = 0 - v_{1y} \end{cases}$$

ταχύτητα αεροπλάνου ως προς βλήμα

$$\vec{r}_2'(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \Rightarrow \begin{cases} x_2'(t) = x_2(t) - x_1(t) = L - v_{2x}t - v_{1x}t = L + v_{2x}'t \\ y_2'(t) = y_2(t) - y_1(t) = H - v_{1y}t = H + v_{2y}'t \end{cases}$$

$$\vec{r}_2'(t) = \vec{r}_2'(0) + \vec{v}'t = (L, H) + (v_{2x}', v_{2y}')t = (L - (v_{2x} + v_{1x})t, H - v_{1y}t)$$

$$\vec{r}_2'(t_0) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} L - (v_{2x} + v_{1x})t_0 = 0 \\ H - v_{1y}t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = \dfrac{H}{v_{1y}} \\ Lv_{1y} = (v_{2x} + v_{1x})H \end{cases}$$

Οι εξισώσεις είναι ίδιες με αυτές που καταλήξαμε στο σύστημα αναφοράς του πυροβόλου.

$$\left.\begin{matrix} x_2'(t) = L - v_{2x}t - v_{1x}t \\ y_2'(t) = H - v_{1y}t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2'(t) = 4000 - 320t \\ y_2'(t) = 2000 - 160t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{y_2'(t) = \frac{1}{2}x_2'(t)}$$

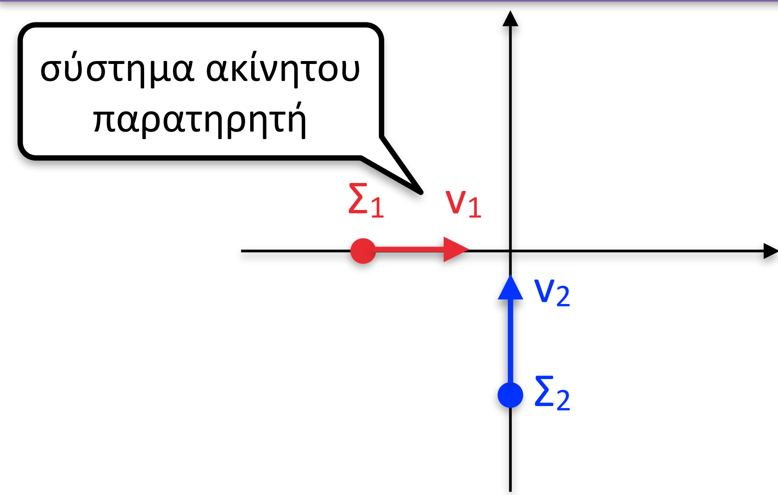
εξίσωση τροχιάς του αεροπλάνου ως προς το βλήμα

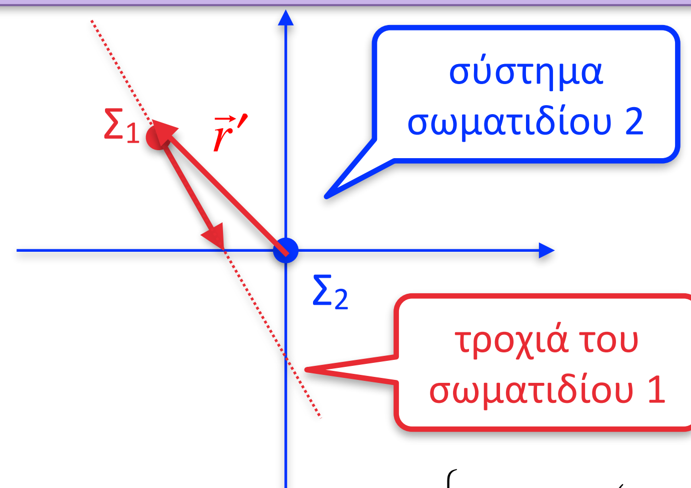
$$\tan\theta' = \frac{H}{L} = \frac{2}{4} = 0.5 \Rightarrow \theta' = \arctan(0.5) \Rightarrow \theta' \simeq 26.6^\circ$$

γωνία προσέγγισης του αεροπλάνου

Άσκηση #4

Δύο σωματίδια κινούνται στους άξονες *x* και *y*, με ταχύτητες $v_1 = 2$ m/s και $v_2 = 3$ m/s, αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα σωματίδια βρίσκονται στις θέσεις $\mathbf{r}_1 = (-3{,}0)$ m και $\mathbf{r}_2 = (0{,}-3)$ m. α) Να υπολογίσετε το διάνυσμα θέσης του πρώτου σωματιδίου ως προς το δεύτερο, συναρτήσει του χρόνου. β) Ποια χρονική στιγμή η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη και ποια η θέση τους τότε;





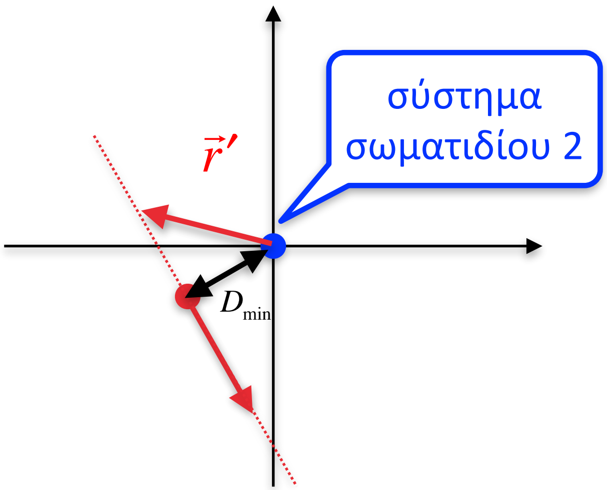
$$\vec{r}_1'(0) = \vec{r}_1(0) - \vec{r}_2(0) = (-3,0) - (0,-3) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1'(0) = (-3,\,3)}$$

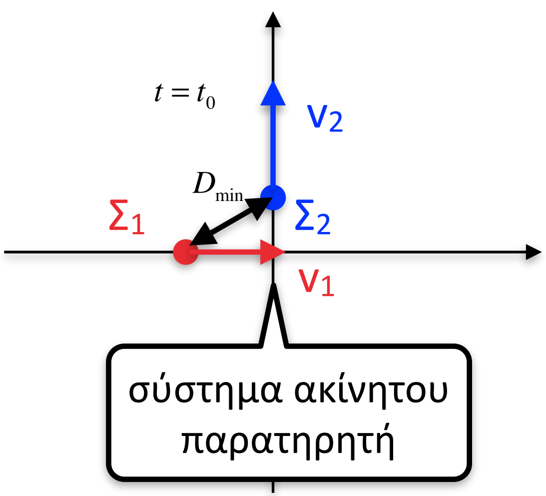
$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (2,0)\frac{m}{s} - (0,\,3)\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1' = (2,-3)\frac{m}{s}}$$

$$\vec{r}_1'(t) = \vec{r}_1'(0) + \vec{v}_1' t = (-3,\,3) + (2,-3)t \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1'(t) = (-3+2t\,,\,3-3t)}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= -3+2t \\ y' &= 3-3t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} t &= \frac{(x'+3)}{2} \\ y' &= 3 - \frac{3}{2}(x'+3) \Rightarrow \\ &\boxed{y' = -\frac{3}{2}x' - \frac{3}{2}} \end{aligned}\right.$$

Άσκηση #4 (συνέχεια)





$$\boxed{D(t) = \left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right| = \left|\vec{r}_1'(t)\right|} = \sqrt{(-3+2t)^2 + (3-3t)^2} \Rightarrow$$

$$D(t_0) = \min \Rightarrow \left.\frac{dD}{dt}\right|_{t_0} = 0 \Rightarrow \frac{2(-3+2t_0)2 + 2(3-3t_0)(-3)}{(-3+2t)^2 + (3-3t)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$-12 + 8t_0 - 18 + 18t_0 = 0 \Rightarrow 26t_0 = 30 \Rightarrow t_0 = \frac{15}{14} \simeq 1.07s$$

$$D_{\min} = D(t_0) = \sqrt{\left(-3 + 2\frac{15}{14}\right)^2 + \left(3 - 3\frac{15}{14}\right)^2}\, m = \sqrt{\frac{6^2}{7^2} + \frac{3^2}{14^2}}\, m \Rightarrow$$

$$\boxed{D_{\min} = 0.88m}$$

θέσεις στο σύστημα ακίνητου παρατηρητή

$$\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_1(0) + \vec{v}_1 t_0 = (-3, 0)m + (2, 0)\frac{m}{s}\frac{15}{14}s \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1(t_0) = \left(-\frac{6}{7}, 0\right)m}$$

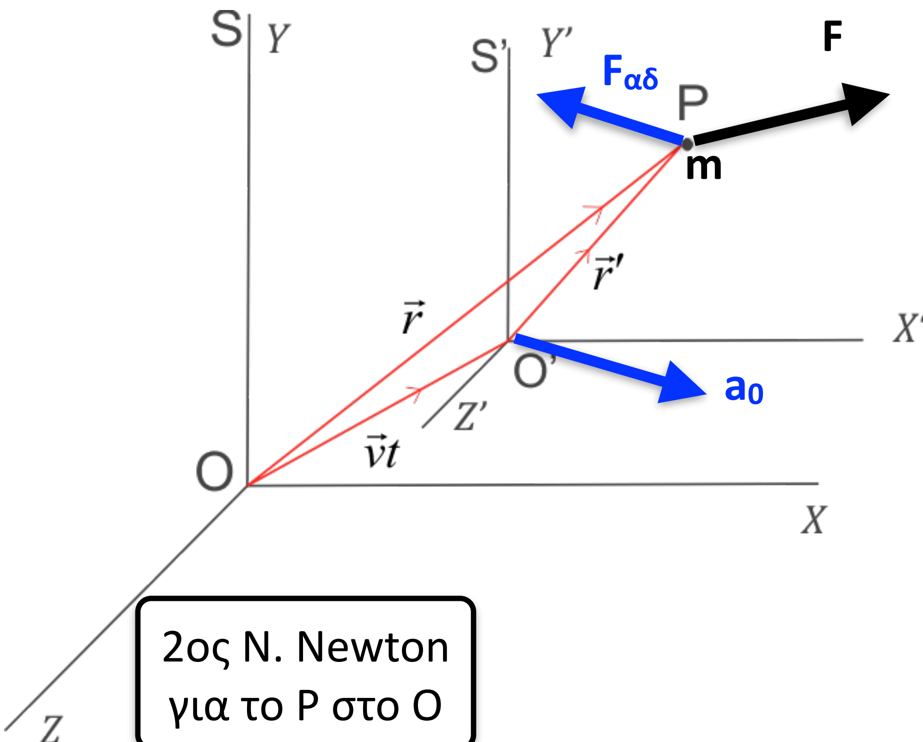
$$\vec{r}_2(t_0) = \vec{r}_2(0) + \vec{v}_2 t_0 = (0, -3)m + (0, 3)\frac{m}{s}\frac{15}{14}s \Rightarrow \boxed{\vec{r}_2(t_0) = \left(0, \frac{3}{14}\right)m}$$

$$\vec{r}_1'(t_0) = (-3 + 2t_0, 3 - 3t_0) = \left(-3 + 2\cdot\frac{15}{14}, 3 - 3\cdot\frac{15}{14}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1'(t_0) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{3}{14}\right)m}$$

$$\boxed{\vec{r}_2'(t_0) = (0, 0)}$$

θέσεις στο σύστημα σωματιδίου 2

Μετασχηματισμός Γαλιλαίου (κίνηση στον χώρο)



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{dR}{dt} \underset{t'=t}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} + \frac{dR}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'} + \frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0}$$

επιτάχυνση του Ο΄ως προς τον Ο

2ος Ν. Newton για το P στο O

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \Rightarrow \vec{F} = m\left(\vec{a}\,' + \vec{a}_0\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}\,' \Rightarrow \boxed{\vec{F} + \vec{F}_{\alpha\delta} = m\vec{a}\,'}$$

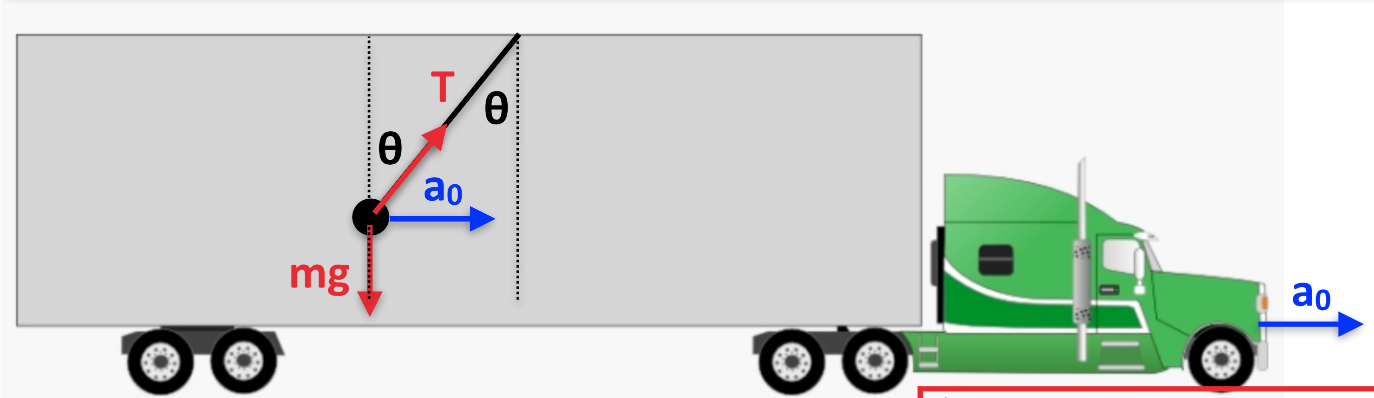
2ος Ν. Newton για το P στο O΄

$$\boxed{\vec{F}_{\alpha\delta} = -m\vec{a}_0}$$

Ο **μη αδρανειακός** (επιταχυνόμενος) παρατηρητής Ο΄παρατηρεί την **αδρανειακή ψευδοδύναμη** **$F_{\alpha\delta}$**, αντίθετη από την επιτάχυνσή του, μαζί με κάθε άλλη πραγματική δύναμη.

Παράδειγμα

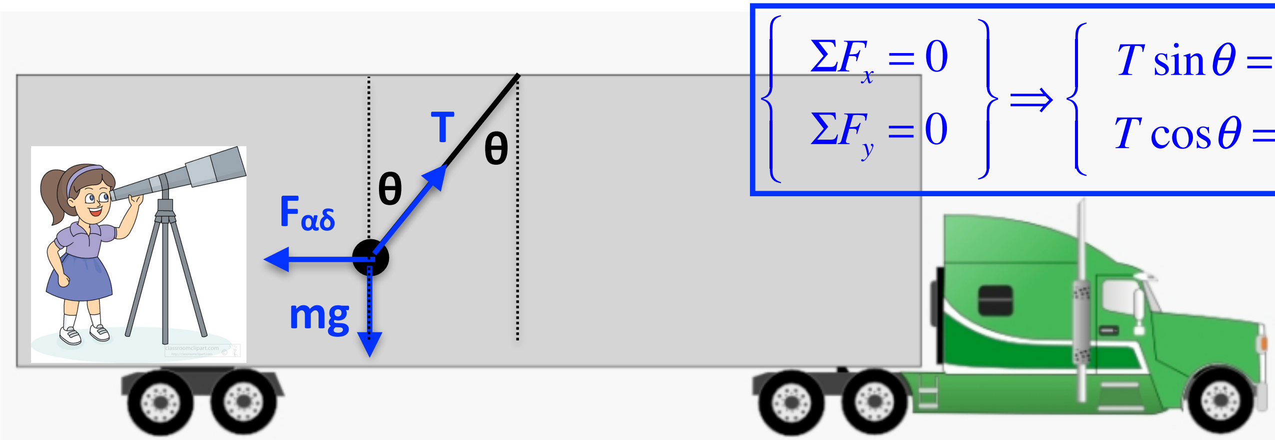
Ένα εκκρεμές βρίσκεται πάνω σε ομαλά επιταχυνόμενο όχημα. Να υπολογίσετε την απόκλιση από τη θέση ισορροπίας του.



ανάλυση αδρανειακού παρατηρητή

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma F_x = m a_0 \\ \Sigma F_y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}T\sin\theta = m a_0 \\ T\cos\theta = mg\end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{a_0}{g}$$

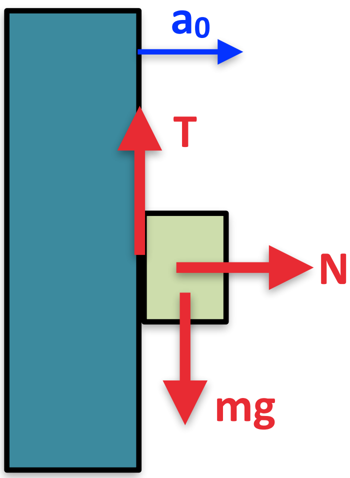
$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}T\sin\theta = F_{\alpha\delta} \\ T\cos\theta = mg\end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{F_{\alpha\delta}}{mg} = \frac{a_0}{g}$$



ανάλυση μη αδρανειακού παρατηρητή

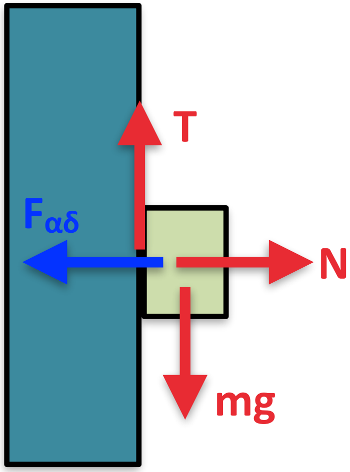
Άσκηση #5

Ένα σώμα μάζας m εφάπτεται σε κάθετη επιφάνεια με συντελεστή στατικής τριβής μ. Με πόση επιτάχυνση πρέπει να κινείται η επιφάνεια ώστε να μην πέσει το σώμα;



ανάλυση αδρανειακού παρατηρητή (εκτός της κινούμενης επιφάνειας)

$$\left\{\begin{matrix} \Sigma F_x = ma_0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} N = ma_0 \\ T = mg \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} N = ma_0 \\ \mu N = mg \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_0 = \frac{g}{\mu}$$

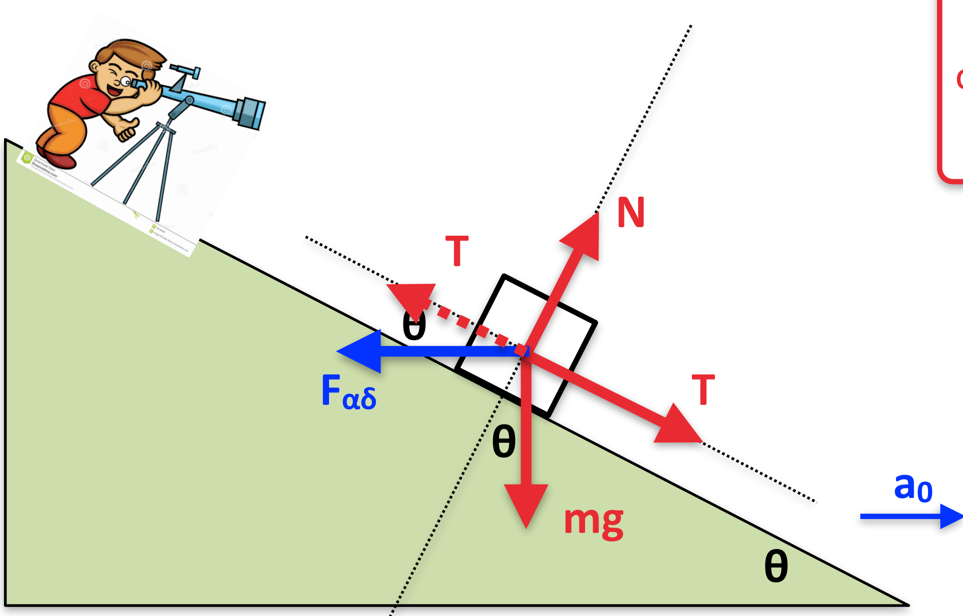


$$\left\{\begin{matrix} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} N = F_{\alpha\delta} \\ T = mg \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} N = ma_0 \\ \mu N = mg \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_0 = \frac{g}{\mu}$$

ανάλυση μη αδρανειακού παρατηρητή (επί της κινούμενης επιφάνειας)

Άσκηση #6

Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ και αφεθεί ελεύθερο θα ολισθήσει προς τα κάτω. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_s. Να βρείτε με πόση επιτάχυνση πρέπει να κινείται το κεκλιμένο επίπεδο, ώστε το σώμα να ισορροπεί.



αν η $F_{\alpha\delta}$ είναι αρκετά μεγάλη, το σώμα τείνει να κινηθεί προς τα επάνω και η τριβή έχει φορά προς τα κάτω

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}T=\mu_S N,\quad F_{\alpha\delta}=ma_0\\ T+mg\sin\theta-F_{\alpha\delta}\cos\theta=0\\ N-mg\cos\theta-F_{\alpha\delta}\sin\theta=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\mu_S\left(mg\cos\theta+ma_0\sin\theta\right)=ma_0\cos\theta-mg\sin\theta\Rightarrow$$

$$a_0\left(\cos\theta-\mu_S\sin\theta\right)=g\left(\mu_S\cos\theta+\sin\theta\right)\Rightarrow$$

$$a_0=g\frac{\sin\theta+\mu_S\cos\theta}{\cos\theta-\mu_S\sin\theta}=g\frac{\tan\theta+\mu_S}{1-\mu_S\tan\theta}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}T=\mu_S N,\quad F_{\alpha\delta}=ma_0\\ -T+mg\sin\theta-F_{\alpha\delta}\cos\theta=0\\ N-mg\cos\theta-F_{\alpha\delta}\sin\theta=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

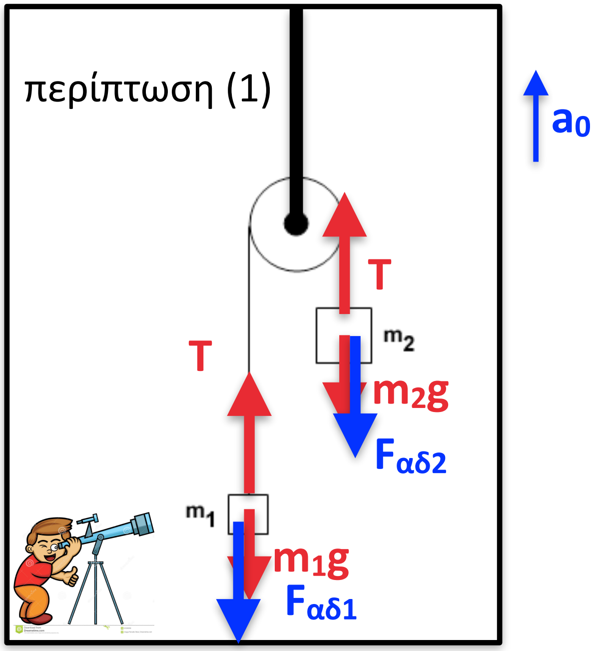
αν η $F_{\alpha\delta}$ δεν είναι αρκετά μεγάλη, το σώμα τείνει να κινηθεί προς τα κάτω και η τριβή έχει φορά προς τα επάνω

$$-\mu_S\left(mg\cos\theta+ma_0\sin\theta\right)=ma_0\cos\theta-mg\sin\theta\Rightarrow$$

$$a_0\left(\cos\theta+\mu_S\sin\theta\right)=g\left(-\mu_S\cos\theta+\sin\theta\right)\Rightarrow a_0=g\frac{\sin\theta-\mu_S\cos\theta}{\cos\theta+\mu_S\sin\theta}=g\frac{\tan\theta-\mu_S}{1+\mu_S\tan\theta}$$

Άσκηση #7

Να μελετήσετε την κίνηση των σωμάτων μιας ιδανικής μηχανής Atwood τοποθετημένης μέσα σε έναν επιταχυνόμενο ανελκυστήρα, ως προς έναν παρατηρητή μέσα σε αυτόν.

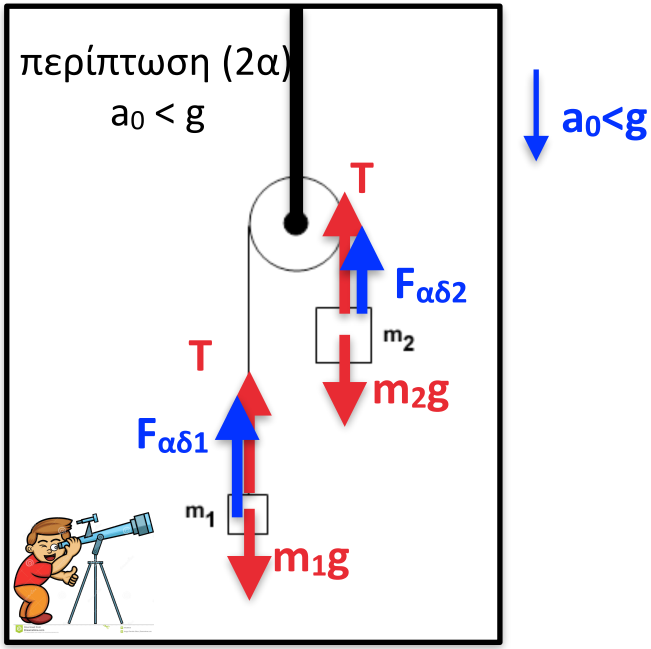


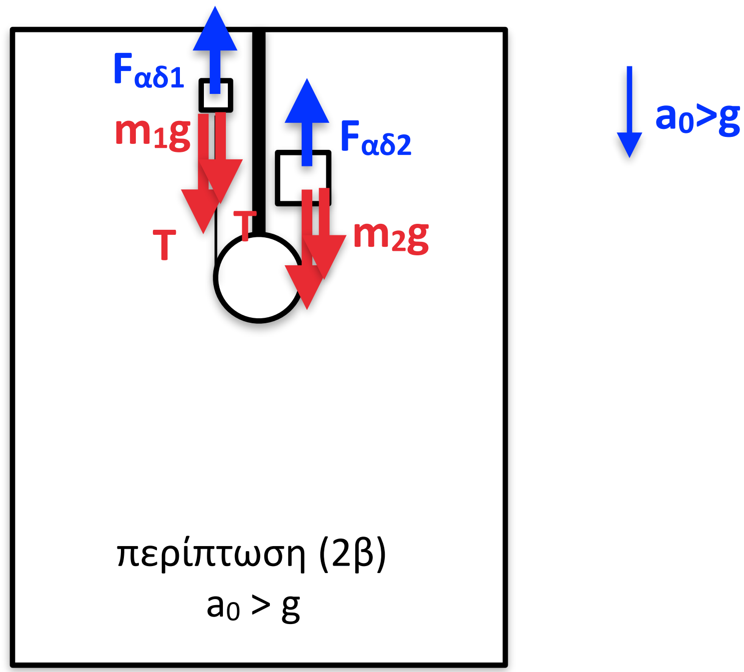
$$\left\{\begin{array}{c} F_{\alpha\delta 2}+m_2 g-T=m_2 a \\ T-F_{\alpha\delta 1}-m_1 g=m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} m_2 a_0+m_2 g-T=m_2 a \\ T-m_1 a_0-m_1 g=m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$m_2 a_0+m_2 g-m_1 a_0-m_1 g=m_2 a+m_2 a \Rightarrow \boxed{a=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\left(g+a_0\right)}$$

Άσκηση #7 (συνέχεια)

Να μελετήσετε την κίνηση των σωμάτων μιας ιδανικής μηχανής Atwood τοποθετημένης μέσα σε έναν επιταχυνόμενο ανελκυστήρα, ως προς έναν παρατηρητή μέσα σε αυτόν.





$$\left\{\begin{array}{l} m_2g - T - F_{\alpha\delta 2} = m_2 a \\ T + F_{\alpha\delta 1} - m_1 g = m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_2g - T - m_2a_0 = m_2 a \\ T + m_1a_0 - m_1 g = m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-m_2a_0 + m_2g + m_1a_0 - m_1g = m_2a + m_2a \Rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}(g - a_0)}$$

τα σώματα κινούνται δεξιόστροφα

$$\left\{\begin{array}{l} m_2g + T - F_{\alpha\delta 2} = m_2 a \\ F_{\alpha\delta 1} - T - m_1 g = m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_2g + T - m_2a_0 = m_2 a \\ m_1a_0 - T - m_1 g = m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

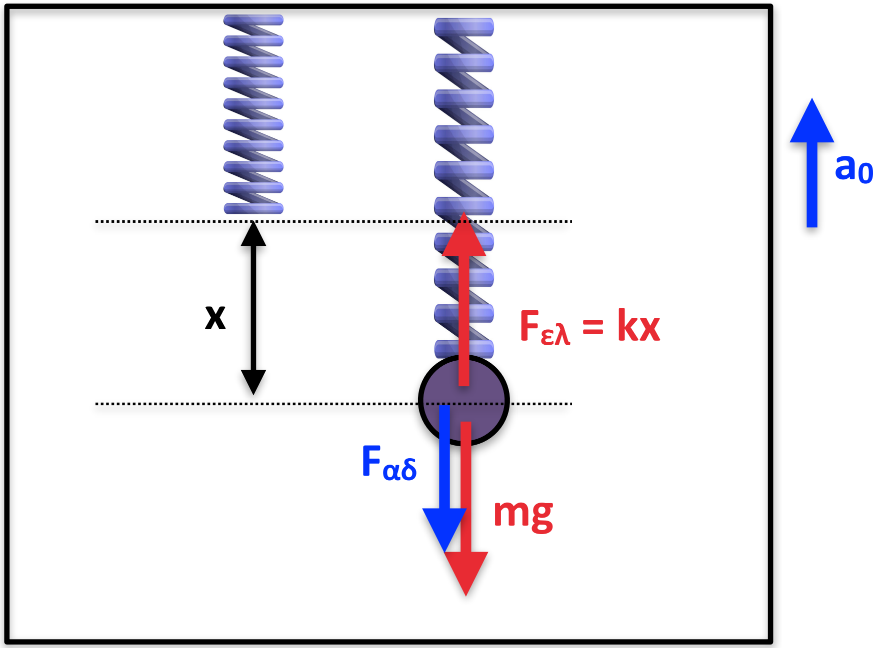
$$-m_2a_0 + m_2g + m_1a_0 - m_1g = m_2a + m_2a \Rightarrow$$

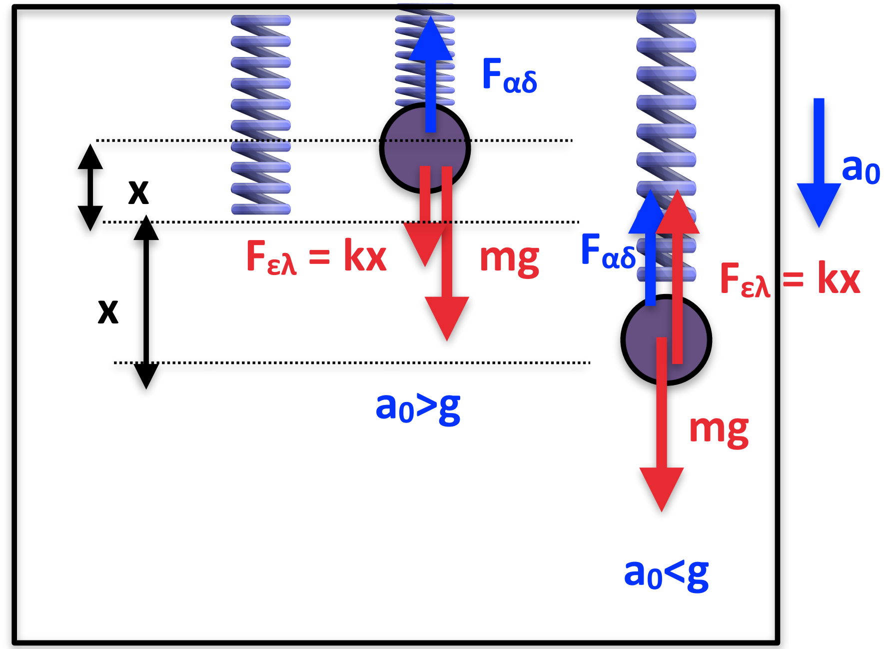
$$\boxed{a = -\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}(a_0 - g)}$$

τα σώματα κινούνται αριστερόστροφα

Άσκηση #8

Ένα ελατήριο σταθεράς k κρέμεται κατακόρυφα από την οροφή ενός επιταχυνόμενου ανελκυστήρα και έχει προσαρτημένο στο ελεύθερο άκρο του ένα σώμα μάζας m. Να βρείτε την θέση ισορροπίας του συστήματος.





$$F_{\varepsilon\lambda} = mg + F_{\alpha\delta} \Rightarrow kx = mg + ma_0 \Rightarrow x = \frac{m(g + a_0)}{k}$$

$$F_{\alpha\delta} = mg + F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow ma_0 = kx + mg \Rightarrow x = \frac{m(a_0 - g)}{k}$$

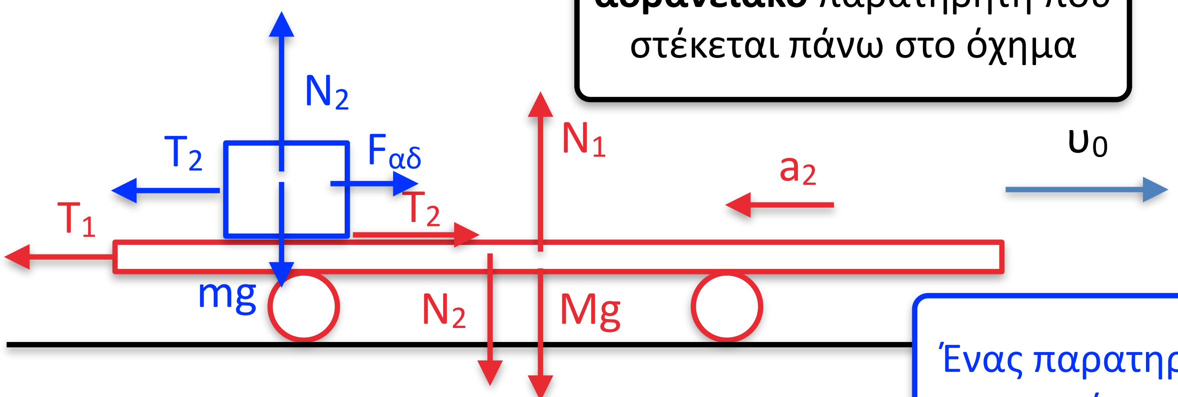
$$F_{\varepsilon\lambda} = mg - F_{\alpha\delta} \Rightarrow kx = mg - ma_0 \Rightarrow x = \frac{m(g - a_0)}{k}$$

Άσκηση #9

Επάνω σε ένα όχημα μάζας *M* είναι τοποθετημένο ένα σώμα μάζας *m*. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ οχήματος και δρόμου είναι μ_1 και μεταξύ σώματος και οχήματος είναι $\mu_2 < \mu_1$. Ξαφνικά δίνουμε στο σύστημα αρχική ταχύτητα υ_0. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα *m* σε σχέση με το όχημα.

ανάλυση ως προς **μη αδρανειακό** παρατηρητή που στέκεται πάνω στο όχημα

εξαιτίας της αρχικής ταχύτητας, τα σώματα κινούνται και εμφανίζονται οι τριβές που τα επιταχύνουν



Ένας παρατηρητής που στέκεται στο δεξιό άκρο του οχήματος θα βλέπει το σώμα να κινείται προς αυτόν με επιτάχυνση a_1. Ένα ακίνητος παρατηρητής θα βλέπει και τα δύο σώματα να επιβραδύνονται, αλλά το σώμα *m* λιγότερο.

$$N_2 = mg$$

$$N_1 = N_2 + Mg \Rightarrow N_1 = (m+M)g$$

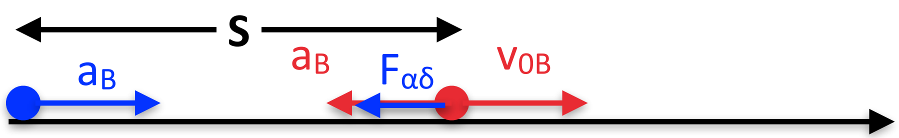
$$T_1 - T_2 = Ma_2$$

$$F_{\alpha\delta} - T_2 = ma_1 \Rightarrow ma_2 - \mu_2 N_2 = ma_1 \Rightarrow \frac{m}{M}(\mu_1 N_1 - \mu_2 N_2) - \mu_2 N_2 = ma_1 \Rightarrow$$

$$\frac{m}{M}\mu_1(m+M)g - \frac{m}{M}\mu_2 mg - \mu_2 mg = ma_1 \Rightarrow a_1 = g\left[\mu_1\frac{m+M}{M} - \mu_2\left(\frac{m}{M}+1\right)\right] \Rightarrow \boxed{a_1 = (\mu_1 - \mu_2)\left(\frac{m}{M}+1\right)g}$$

Άσκηση #10

Δύο σώματα, A, B, βρίσκονται επί του άξονα x, με απόσταση S = 150 m μεταξύ τους. Το πιο απομακρυσμένο έχει αρχική ταχύτητα v_{0B} = 20 m/s και επιβραδύνεται ομαλά με επιβράδυνση a_B = 1 m/s². Το άλλο, είναι ακίνητο και επιταχύνεται ομαλά με a_A = 3 m/s². Να βρείτε σε ποιο σημείο και σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν.



$$\Sigma F = m_B a'_B \Rightarrow F + F_{\alpha\delta} = m_B a'_B \Rightarrow m_B a_B + m_B a_A = m_B a'_B \Rightarrow a'_B = a_B + a_A \Rightarrow a'_B = 4\frac{m}{s^2}$$

$$v'_B(0) = v_B(0) - v_A(0) = v_{0B} = 20\frac{m}{s}$$

$$v'_B = v'_B(0) - a'_B t = 20 - 4t$$

$$x'_B(t) = S + v'_B(0)t - \frac{1}{2}a'_B t^2 = 150 + 20t - 2t^2$$

$$x'_B(t_0) = 0 \Rightarrow t^2 - 10t - 75 = 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4\cdot 75\cdot(-1) = 100 + 300 = 400$$

$$t_0 = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{10 \pm 20}{2} = \begin{cases} \cancel{-5s} \\ 15s \end{cases}$$

$$x_A(t_0) = \frac{1}{2}a_A t_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 15^2 m = 337.5m$$

$$x_B(t_0) = S + v_{0B}t_0 - \frac{1}{2}a_B t_0^2 = 150 + 20\cdot 15 - 0.5\cdot 1\cdot 15^2 m = 337.5m$$

$$v_A(t_0) = a_A t_0 = 3\cdot 15\frac{m}{s} = 45\frac{m}{s}$$

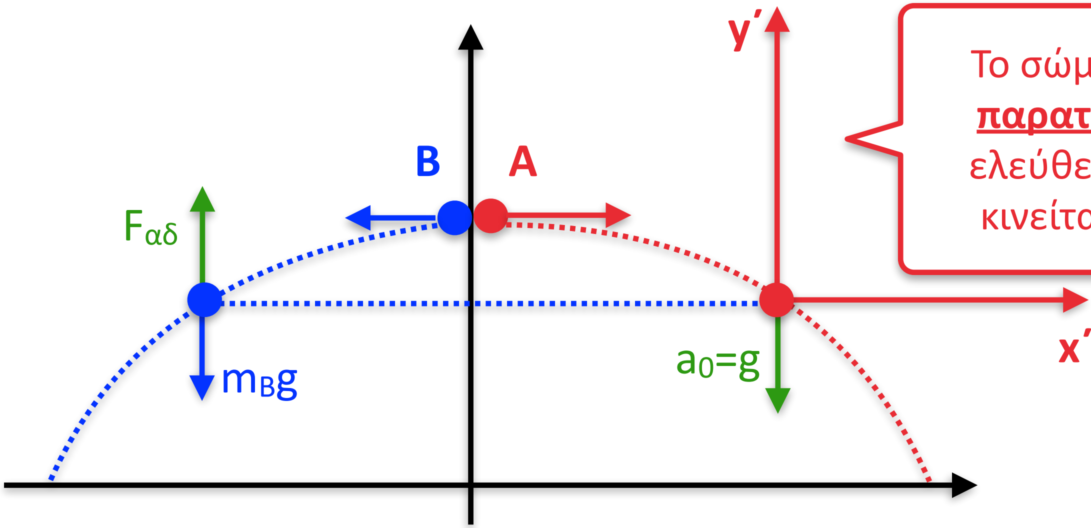
$$v_B(t_0) = v_{0B} - a_B t_0 = 20 - 1\cdot 15\frac{m}{s} = 5\frac{m}{s}$$

θέσεις και ταχύτητες ως προς τον ακίνητο παρατηρητή στην αρχή την στιγμή της συνάντησης

ανάλυση ως προς τον **μη αδρανειακό** παρατηρητή A

Άσκηση #11

Δύο σώματα, Α, Β, βρίσκονται σε ύψος H και βάλλονται οριζόντια σε αντίθετη κατεύθυνση, με ταχύτητες v_{0A} και v_{0B}. Να μελετήσετε την κίνηση του σώματος Α ως προς το Β.



Το σώμα Α είναι **μη αδρανειακός παρατηρητής** διότι βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση. Ως προς Α, το Β κινείται ομαλά επί του άξονα x′.

$$x_B = -v_{0B}t, \quad v_{Bx} = -v_{0B}$$

$$y_B = H - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_{By} = -gt$$

$$x_A = v_{0A}t, \quad v_{Ax} = v_{0A}$$

$$y_A = H - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_{Ay} = gt$$

αδρανειακός παρατηρητής στην αρχή των αξόνων

$$x_B' = x_B - x_A = -\left(v_{0A} + v_{0B}\right)t$$

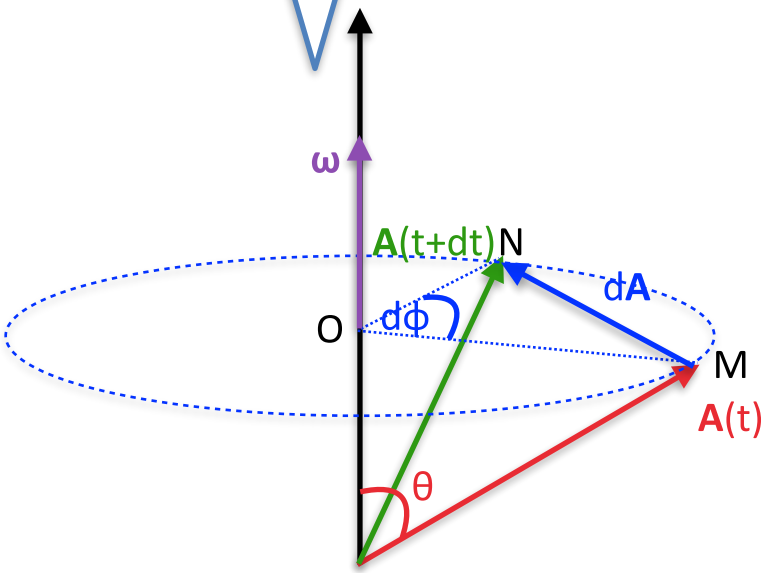
$$y_A' = y_B - y_A = 0$$

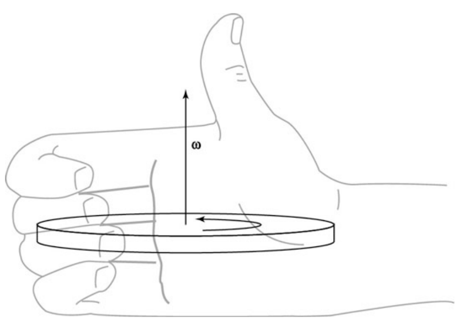
$$\Sigma F_{Bx}' = 0$$

$$\Sigma F_{By}' = m_B g - F_{\alpha\delta} = m_B g - m_B a_0 = 0$$

Ρυθμός μεταβολής περιστρεφόμενου διανύσματος

η γωνιακή ταχύτητα **ω** είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής και φορά σύμφωνη με τον κανόνα του δεξιού χεριού





$$\left|d\vec{A}\right| = (OM)\,d\varphi = \left|\vec{A}\right| \sin\theta\, d\varphi \Rightarrow$$

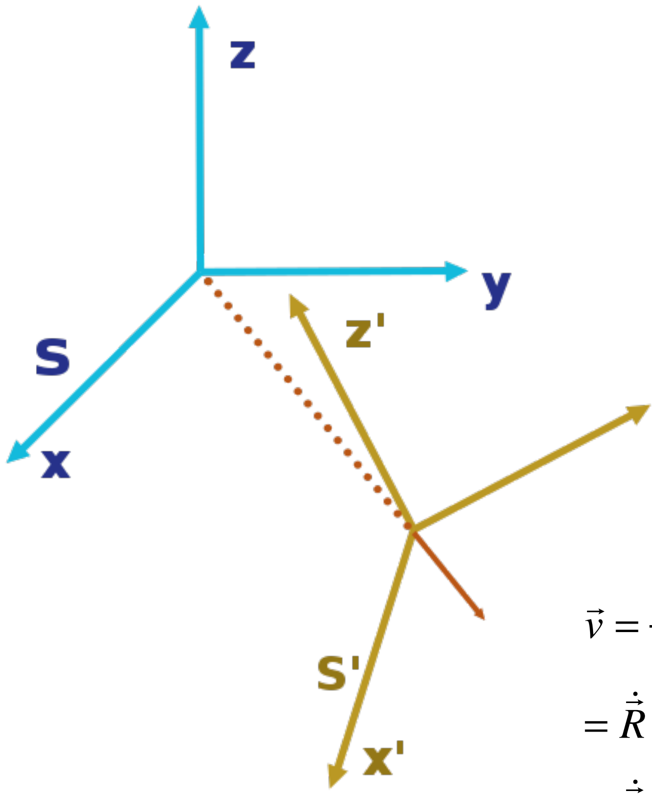
$$\left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| = \left|\vec{A}\right| \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = \left|\vec{A}\right| \sin\theta\,\omega$$

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

για απειροστή μεταβολή, το **dA** είναι κάθετο στο **A** και στο **ω**

ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα **A**

Ταχύτητα σε στρεφόμενο σύστημα αναφοράς



$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}' + \ddot{z}'\hat{z}'$$

<u>Προσοχή</u>: τα μοναδιαία διανύσματα στο S΄ είναι χρονικά μεταβαλλόμενα

ορισμός ταχύτητας & επιτάχυνσης στο O΄

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} + \vec{r}'\right) = \dot{\vec{R}} + \frac{d}{dt}\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right) =$$

$$= \dot{\vec{R}} + \left(\dot{x}'\hat{x}' + x'\dot{\hat{x}}'\right) + \left(\dot{y}'\hat{y}' + y'\dot{\hat{y}}'\right) + \left(\dot{z}'\hat{z}' + z'\dot{\hat{z}}'\right) =$$

$$= \dot{\vec{R}} + \left(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'\right) + \left[x'\left(\vec{\omega}\times\hat{x}'\right) + y'\left(\vec{\omega}\times\hat{y}'\right) + z'\left(\vec{\omega}\times\hat{z}'\right)\right] =$$

$$= \dot{\vec{R}} + \vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right) = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{R} + \vec{r}'\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

Επιτάχυνση σε στρεφόμενο σύστημα αναφοράς

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \left(\ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}' + \ddot{z}'\hat{z}'\right) + \left(\dot{x}'\dot{\hat{x}}' + \dot{y}'\dot{\hat{y}}' + \dot{z}'\dot{\hat{z}}'\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} =$$

$$= \vec{a}' + \left[\dot{x}'(\vec{\omega}\times\hat{x}') + \dot{y}'(\vec{\omega}\times\hat{y}') + \dot{z}'(\vec{\omega}\times\hat{z}')\right] + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\left(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}$$

Αδρανειακές δυνάμεις για στρεφόμενο παρατηρητή

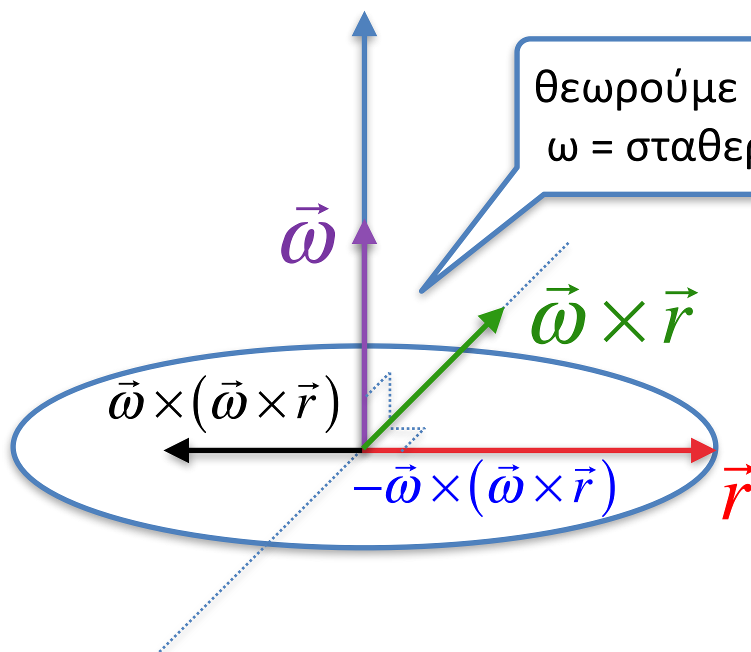
$$\sum \vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} \xrightarrow{\dot{\vec{\omega}}=0}$$

$$\sum \vec{F}' = \sum \vec{F} + \vec{F}_{coriolis} + \vec{F}_{\varphi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_{coriolis} &= -2m\vec{\omega}\times\vec{v}' \\ \vec{F}_{\varphi} &= -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\end{aligned}}$$

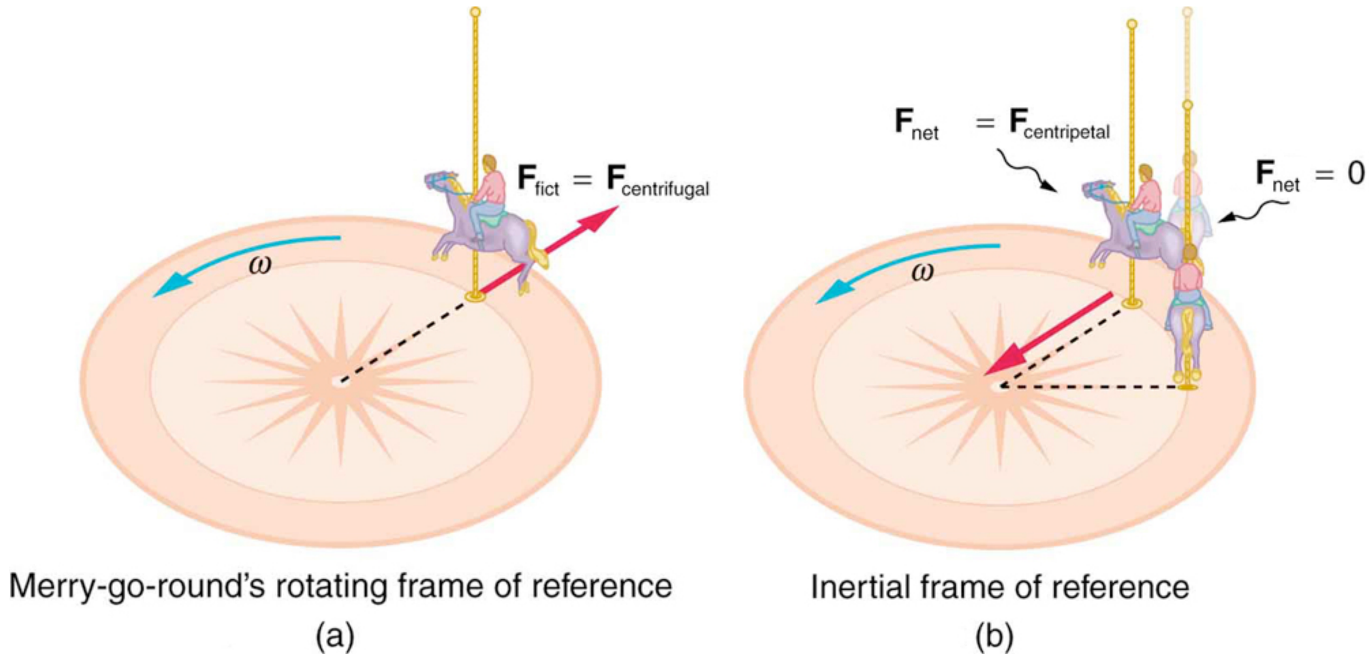
Ο στρεφόμενος παρατηρητής αντιλαμβάνεται δύο **αδρανειακές** δυνάμεις: την **φυγόκεντρο** (F_{φ}) και την **Coriolis** ($F_{coriolis}$). Οι δύο αυτές δυνάμεις είναι πλασματικές και οφείλονται στην αντίληψη του παρατηρητή λόγω της περιστροφής του.

θεωρούμε ότι ω = σταθερό



η φυγόκεντρος δύναμη είναι ακτινική και η Coriolis κάθετη στην ταχύτητα

Φυγόκεντρος δύναμη



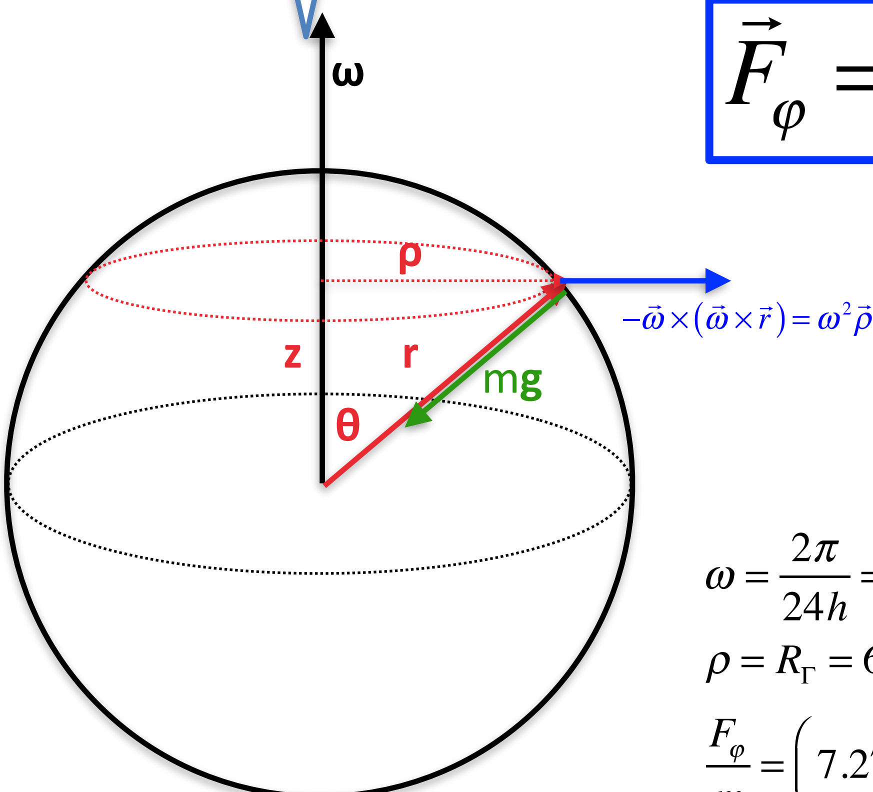
$$\sum \vec{F}' = 0 \Rightarrow F - F_{\varphi} = 0 \Rightarrow F = m\omega^2 r$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{\kappa} \Rightarrow F = m\omega^2 r$$

- Ο στρεφόμενος παρατηρητής (α) αντιλαμβάνεται την φυγόκεντρο δύναμη που ισορροπεί με την πραγματική δύναμη που έλκει το σώμα προς το κέντρο.
- Ο αδρανειακός παρατηρητής (β) αντιλαμβάνεται την πραγματική δύναμη που προκαλεί κεντρομόλο επιτάχυνση.

Φυγόκεντρος δύναμη στην επιφάνεια της Γης

η Γη είναι ένα στρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς



$$\vec{\omega}=\omega\hat{z}$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})-\vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})=\omega\hat{z}(\omega r\cos\theta)-\omega^2(\vec{\rho}+z\hat{z})=$$

$$=\omega^2 z\hat{z}-\omega^2\vec{\rho}-\omega^2 z\hat{z}=-\omega^2\vec{\rho}$$

$$\boxed{\vec{F}_\varphi=m\omega^2\vec{\rho}}$$

εξαρτάται από το γεωγ. πλάτος

$$\boxed{w_\varphi=m\left(\vec{g}+\omega^2\vec{\rho}\right)}$$

φαινόμενο βάρος

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\frac{2\pi}{24h}=7.27\times10^{-5}\,\frac{rad}{s}\\ \rho&=R_\Gamma=6400\,km\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{F_\varphi}{m}=\left(7.27\times10^{-5}\,\frac{rad}{s}\right)^2\cdot6.4\times10^6\,m\approx0.034\,\frac{m}{s^2}$$

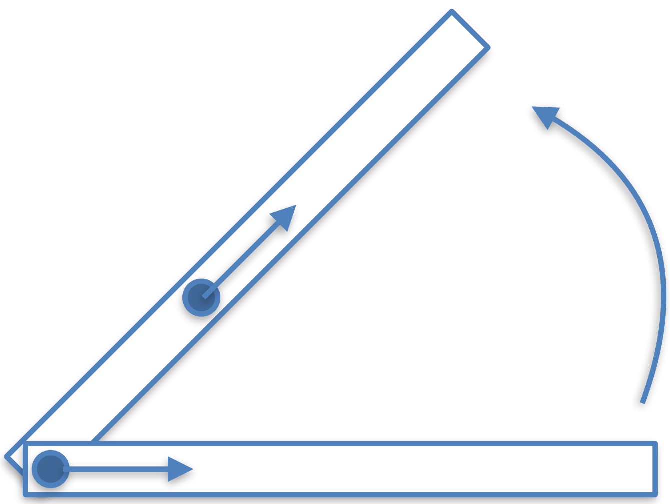
φυγόκεντρος επιτάχυνση στον ισημερινό

Φαινόμενο Coriolis

https://www.youtube.com/watch?v=6L5UD240mCQ

Πρόβλημα

Σώμα μάζας m βρίσκεται μέσα σε σωλήνα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντιο επίπεδο. Αν ο σωλήνας έχει μήκος L και το σώμα βρίσκεται αρχικά στην αρχή των αξόνων με ταχύτητα υ_0 προς τα έξω να βρείτε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο άλλο άκρο.



Λύση ως προς μη αδρανειακό παρατηρητή πάνω στον περιστρεφόμενο σωλήνα

$$\sum \vec{F}' = m\vec{a}' \Rightarrow m\omega^2 r = m\ddot{r} \Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0 \Rightarrow$$

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$v(t) = \omega A e^{\omega t} - \omega B e^{-\omega t}$$

$$\left.\begin{array}{l} r(0) = 0 \\ v(0) = \upsilon_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A + B = 0 \\ \omega A - \omega B = \upsilon_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A = \dfrac{\upsilon_0}{2\omega} \\ B = -\dfrac{\upsilon_0}{2\omega} \end{array}\right\}$$

$$r(t) = \frac{\upsilon_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) \Rightarrow r(t) = \frac{\upsilon_0}{\omega}\sinh(\omega t)$$

$$r(t_1) = L \Rightarrow \frac{\upsilon_0}{\omega}\sinh(\omega t_1) = L \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega}\sinh^{-1}\left(\frac{\omega L}{\upsilon_0}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sinh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ \cosh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

υπερβολικές συναρτήσεις

Πρόβλημα

Μία κυκλοειδής καμπύλη στο xy-επίπεδο περιγράφεται σε παραμετρική μορφή από τις σχέσεις

$$x(\theta) = r_1(\theta - sin\theta) + x_0, y(\theta) = r_2(1 - cos\theta) + y_0,$$

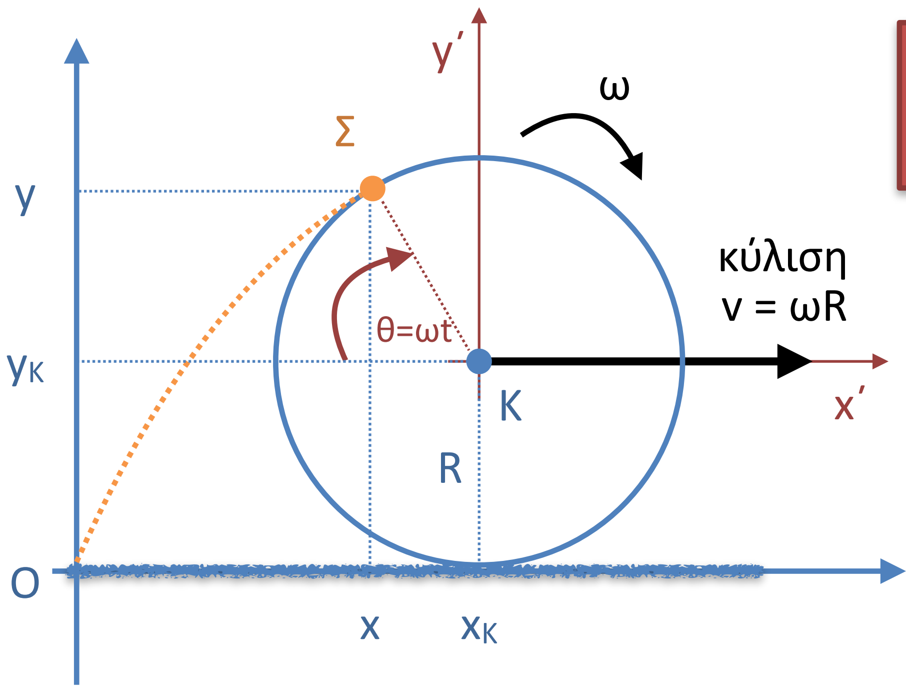
όπου θ είναι μια κατάλληλη μεταβλητή, ενώ r_1, r_2, x_0, y_0, είναι σταθερές που προσδιορίζουν διαφορετικές τέτοιες καμπύλες. Το σχήμα δείχνει ένα, όπως λέμε πλήρες, τέτοιο τόξο μιας κυκλοειδούς καμπύλης (η οποία αντιστοιχεί στις τιμές $r_1 = r, r_2 = -r, x_0 = 0, y_0 = 2r$). Δείξτε ότι διαδοχικά τέτοια τόξα ή μέρος ενός τέτοιου τόξου μιας κυκλοειδούς καμπύλης (με κατάλληλες ανά περίπτωση τιμές για τις σταθερές r_1, r_2, x_0, y_0) είναι οι τροχιές που διαγράφουν τα ακόλουθα:

(α) Σημείο της περιφέρειας ενός κυκλικού τροχού ο οποίος κυλίεται χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο (το επίπεδο του τροχού είναι κατακόρυφο).

(β) Σημειακό σώμα μάζας m που αφήνεται να πέσει μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης από ύψος h πάνω από το έδαφος σε μία τοποθεσία στον Ισημερινό. Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της, αλλά να αγνοηθεί η φυγόκεντρος δύναμη που "αισθάνεται" το σώμα λόγω της συμμετοχής του σε αυτήν την περιστροφική κίνηση.

(γ) Υποθέτουμε τώρα ότι η κυκλοειδής καμπύλη του παραπάνω σχήματος είναι μια λεία επιφάνεια μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης (για το οποίο ο x-άξονας είναι οριζόντιος και ο y-άξονας κατακόρυφος. Έστω ακόμη ότι η μεταβλητή s περιγράφει το μήκος που διανύει ένα σημειακό σώμα μάζας m που κινείται πάνω σε αυτήν την επιφάνεια (και μέσα στο επίπεδο xy του σχήματος). Έστω ότι μετράμε αυτό το μήκος s ως προς το κατώτερο σημείο Α της επιφάνειας, θέτοντάς το θετικό (αρνητικό) όταν το σώμα είναι δεξιά (αριστερά) αυτού του σημείου Α. Βρείτε τη συνάρτηση $y(s)$ που δίνει την εξάρτηση του ύψους κάθε σημείου πάνω στην κυκλοειδή επιφάνεια από το μήκος s.

Πρόβλημα (συνέχεια)



Για t = 0 είναι $x'(0) = 0$, $y'(0) = -R$, $\theta'(0) = 3\pi/2$ (ως προς τον άξονα x') καθώς το σημείο Σ ξεκινά από την αρχή Ο.

Συντεταγμένες στο κινούμενο σύστημα αναφοράς

$$x'(t) = R\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \omega t\right) = -R\sin(\omega t)$$

$$y'(t) = R\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \omega t\right) = -R\cos(\omega t)$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

Συντεταγμένες στο ακίνητο σύστημα αναφοράς

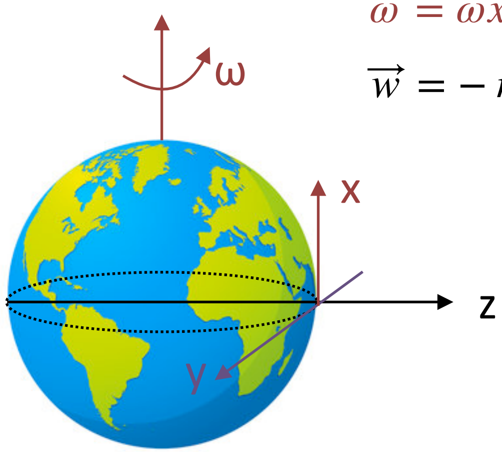
$$x(t) = x_K(t) + x'(t) = \omega R t - R\sin(\omega t) = R\left[\omega t - \sin(\omega t)\right]$$

$$y(t) = y_K + y'(t) = R - R\cos(\omega t) = R\left[1 - \cos(\omega t)\right]$$

Παραμετρική εξίσωση **κυκλοειδούς** με θ = ωt

$$(x - R\omega t)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Πρόβλημα (συνέχεια)



$$\vec{\omega} = \omega\hat{x}$$

$$\vec{w} = -mg\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}}$$

δύναμη Coriolis

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} = -2m\omega\hat{x}\left(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}\right) = 2m\omega\left(v_z\hat{y} - v_y\hat{z}\right)$$

$$\Sigma\vec{F} = m\dot{\vec{v}} \Rightarrow -mg\hat{z} + 2m\omega\left(v_z\hat{y} - v_y\hat{z}\right) = m\left(\dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y} + \dot{v}_z\hat{z}\right)$$

$$\dot{v}_x = 0 \Rightarrow v_x = 0$$

δεν υπάρχει δύναμη ούτε κίνηση στον άξονα x

$$\dot{v}_y = 2\omega v_z$$

$$\dot{v}_z = -g - 2\omega v_y$$

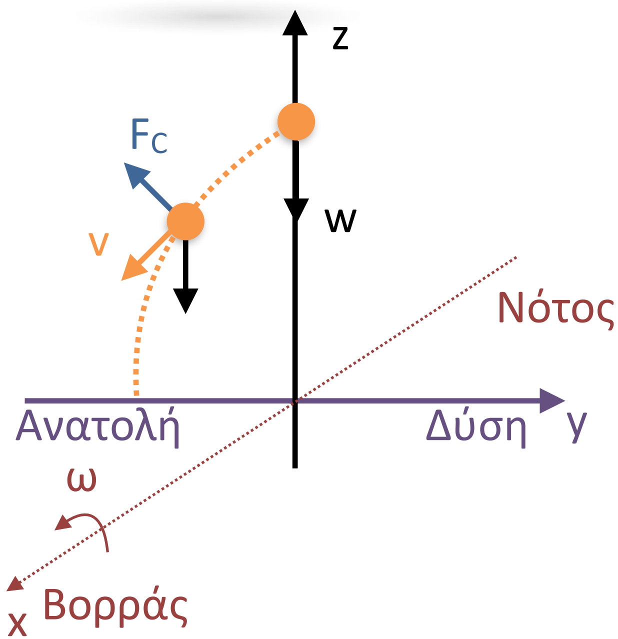
σύστημα συζευγμένων εξισώσεων

$$\ddot{v}_z = -2\omega\dot{v}_y \Rightarrow \ddot{v}_z + 4\omega^2 v_z = 0 \longrightarrow$$

$$v_z(t) = A\sin(2\omega t) + B\cos(2\omega t)$$

$$v_z(0) = 0 \Rightarrow v_z(t) = A\sin(2\omega t)$$

$$\dot{v}_z(t) = 2\omega A\cos(2\omega t)$$



$$v_y = \frac{1}{2\omega}\left(-g - \dot{v}_z\right) = -\frac{g}{2\omega} - A\cos(2\omega t)$$

$$v_y(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{g}{2\omega} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_z(t) &= -\frac{g}{2\omega}\sin(2\omega t) \\ v_y(t) &= -\frac{g}{2\omega}\left[1 - \cos(2\omega t)\right] \end{aligned}}$$

Πρόβλημα (συνέχεια)

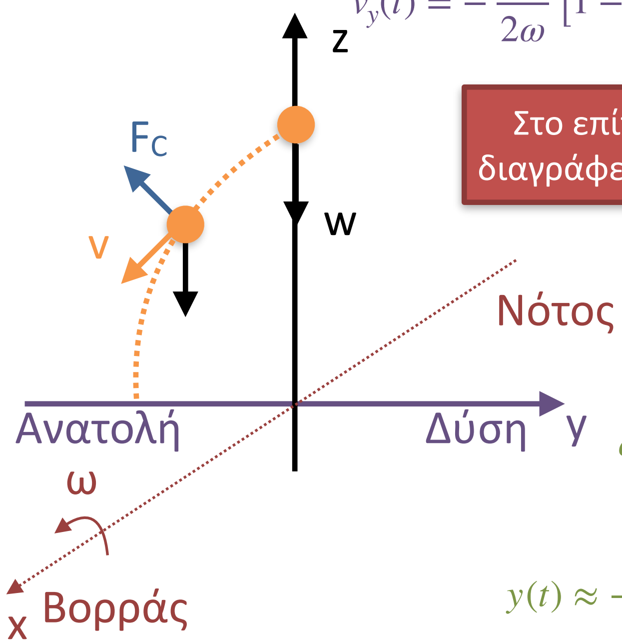
$$v_z(t) = -\frac{g}{2\omega}\sin(2\omega t) \longrightarrow z(t) = \frac{g}{4\omega^2}\cos(2\omega t) + C,\ z(0) = h \Rightarrow C = h - \frac{g}{4\omega^2}$$

$$\boxed{z(t) = h - \frac{g}{4\omega^2}\left[1 - \cos(2\omega t)\right] \Rightarrow z(t) = h - \frac{g}{2\omega^2}\sin^2(\omega t)}$$

$$z(t_0) = 0 \Rightarrow h - \frac{g}{2\omega^2}\sin^2(\omega t_0) = 0 \Rightarrow \sin^2(\omega t_0) = \frac{2\omega^2 h}{g} \Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\omega^2 h}{g}}\right)}$$

χρόνος πτώσης

$$v_y(t) = -\frac{g}{2\omega}\left[1 - \cos(2\omega t)\right] \longrightarrow y(t) = -\frac{g}{2\omega}t + \frac{g}{4\omega^2}\sin(2\omega t) + C,\ y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$



Στο επίπεδο zy το σώμα διαγράφει κυκλοειδή τροχιά

$$\boxed{y(t) = -\frac{g}{4\omega^2}\left[2\omega t - \sin(2\omega t)\right]}$$

$$x \to 0:\ \ \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

ανάπτυγμα Taylor για μικρά x

$$\omega \to 0 \Rightarrow z(t) \approx h - \frac{g}{2\omega^2}(\omega t)^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

αν αγνοήσουμε την περιστροφή της Γης, το σώμα κάνει ελεύθερη πτώση!

$$y(t) \approx -\frac{g}{4\omega^2}\left[2\omega t - 2\omega t + \frac{(2\omega t)^3}{6}\right] = -\frac{1}{3}g\omega t^3$$

το σώμα αποκλίνει ανατολικά