Φυσική Ι
(Μηχανική)

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Κωνσταντίνος Κουσουρής

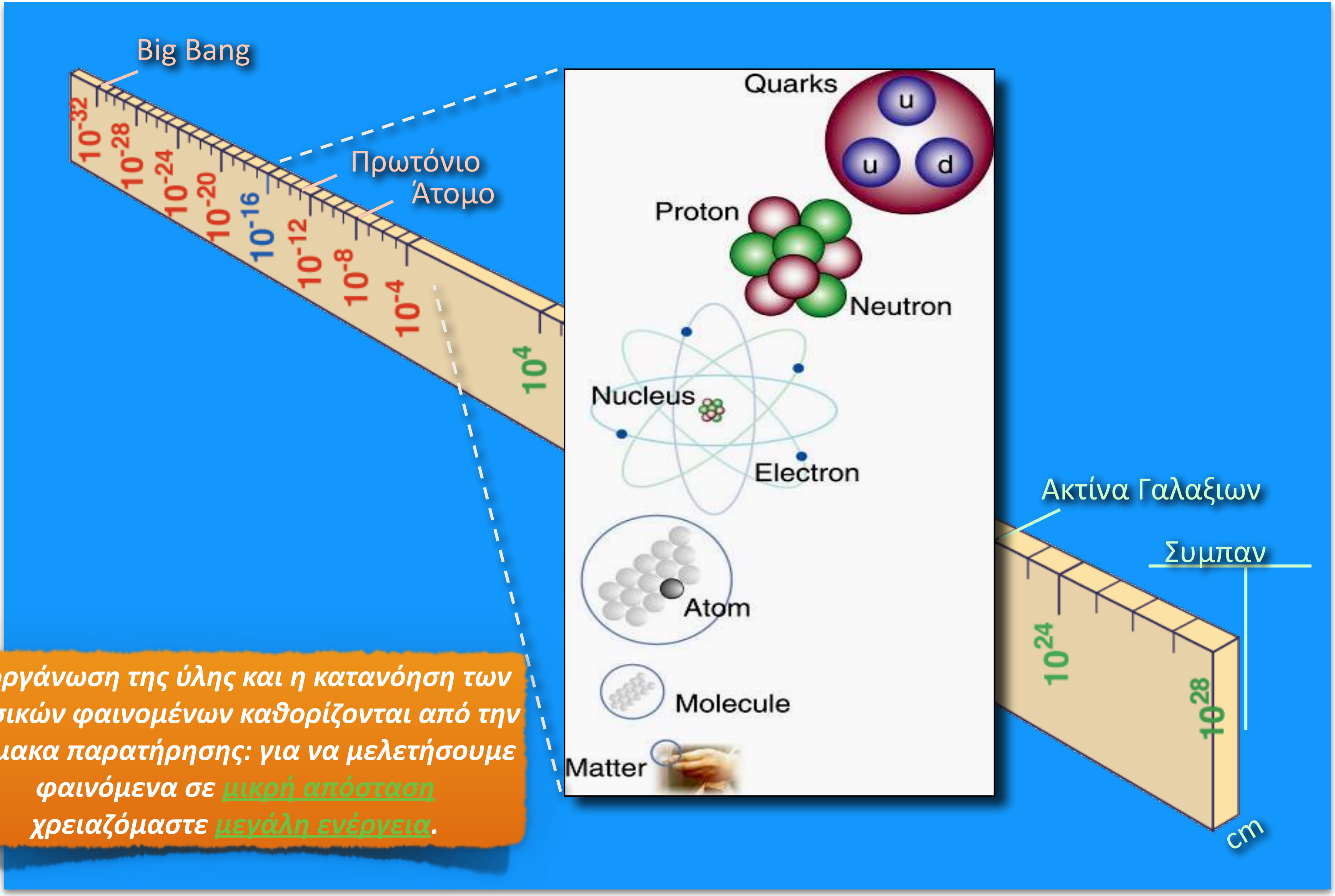
Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Σκοποί

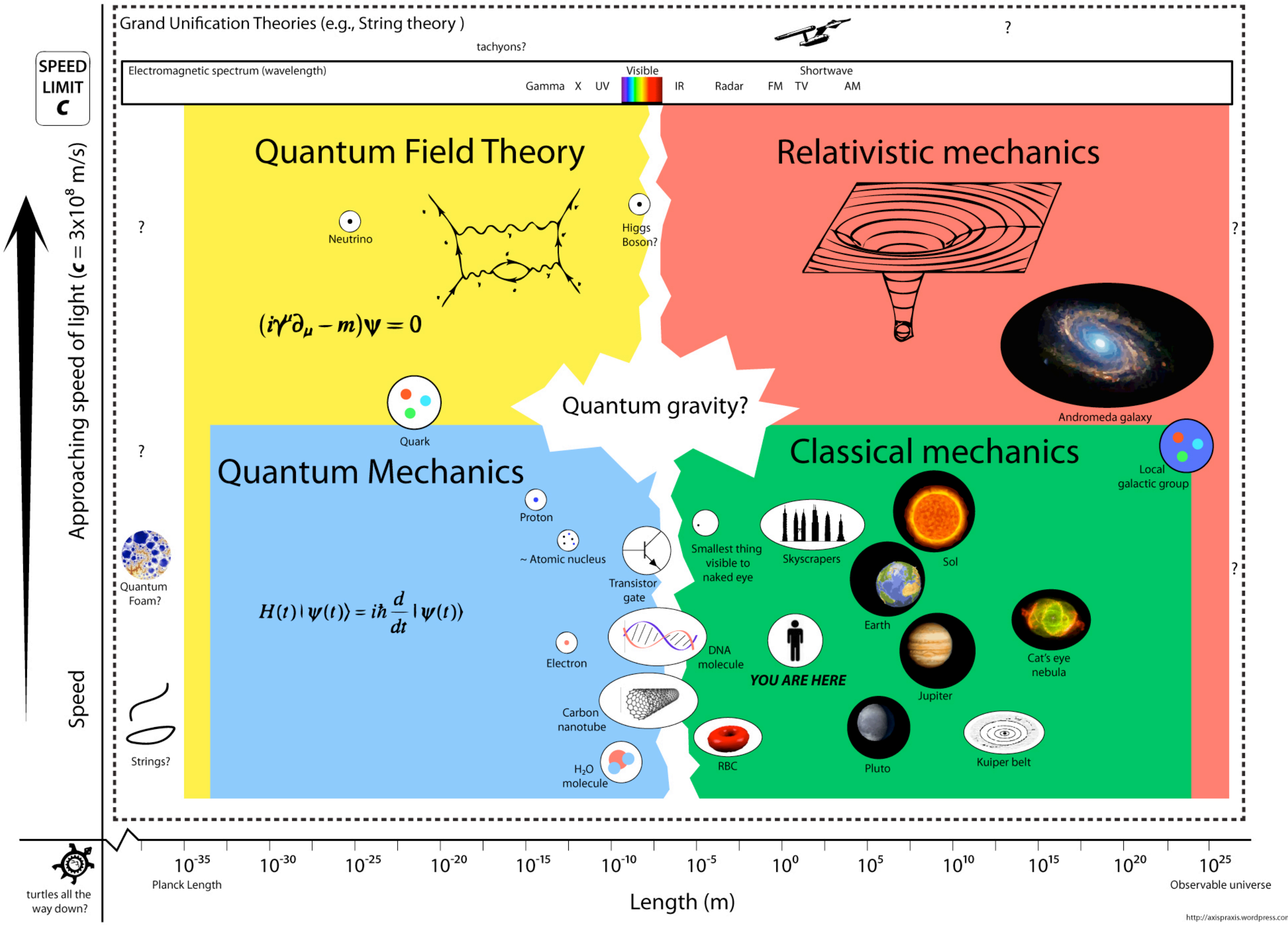
1. ορμή & στροφορμή
2. δύναμη
3. βαρύτητα
4. μάζα
5. δυνάμεις & κίνηση: οι νόμοι του Newton
6. ειδικές δυνάμεις: τριβή, αντίσταση αέρα
7. βολή στο βαρυτικό πεδίο

Φυσική και κλίμακες

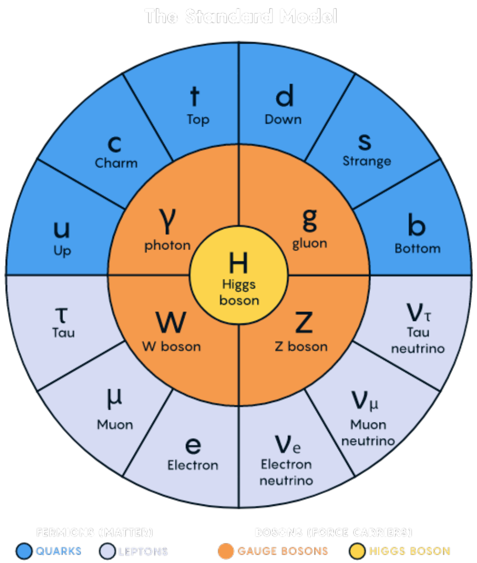


Η οργάνωση της ύλης και η κατανόηση των φυσικών φαινομένων καθορίζονται από την κλίμακα παρατήρησης: για να μελετήσουμε φαινόμενα σε μικρή απόσταση χρειαζόμαστε μεγάλη ενέργεια.

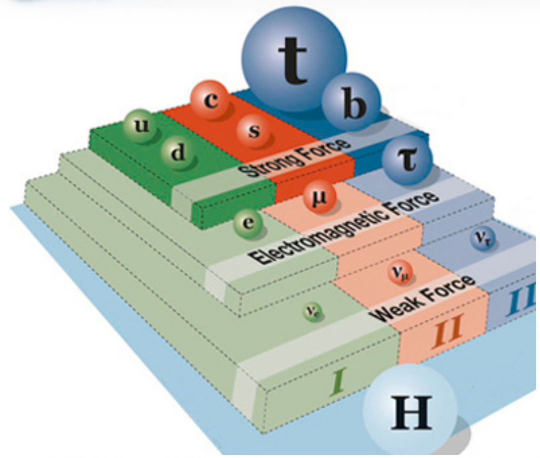
Θεωρίες της Φυσικής

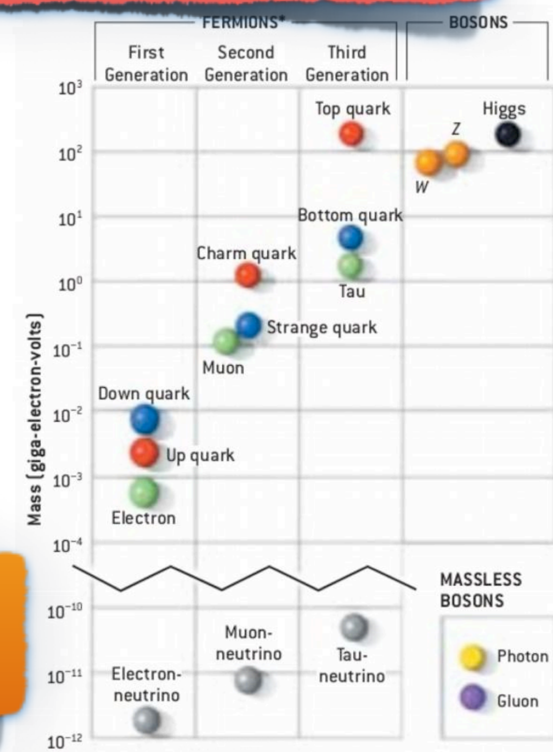


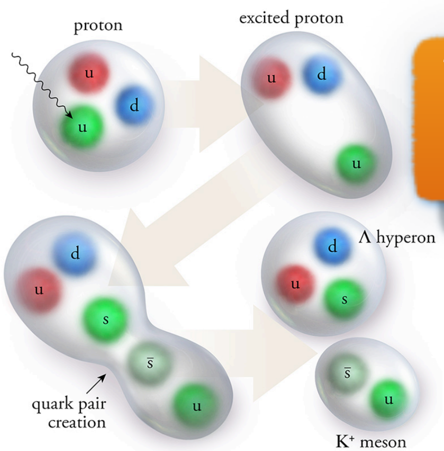
Στοιχειώδη σωματίδια



Τα στοιχειώδη σωματίδια αποτελούνται από τα σωματίδια της ύλης (φερμιόνια) και από τους φορείς των δυνάμεων (μποζόνια) καθώς και από τα αντισωματίδια αυτών







Τα quarks δεν βρίσκονται ελεύθερα στη φύση αλλά σχηματίζουν σύνθετα σωματίδια που ονομάζονται αδρόνια (μεσόνια ή βαρυόνια)

Τα σωματίδια της ύλης (quarks και λεπτόνια) σχηματίζουν 3 γενεές με πανομοιότυπα κβαντικά χαρακτηριστικά αλλά διαφορετικές μάζες

Οι μικροσκοπικές δυνάμεις στη φύση

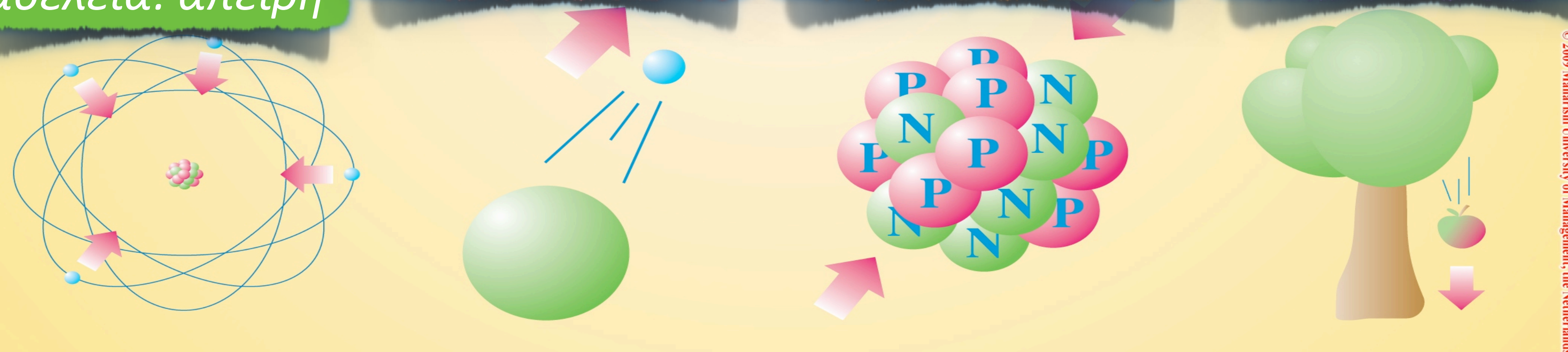
Οι τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις της Φύσης

Ηλεκτρομαγνητική
σχετική ισχύς: ***1/137***
εμβέλεια: άπειρη

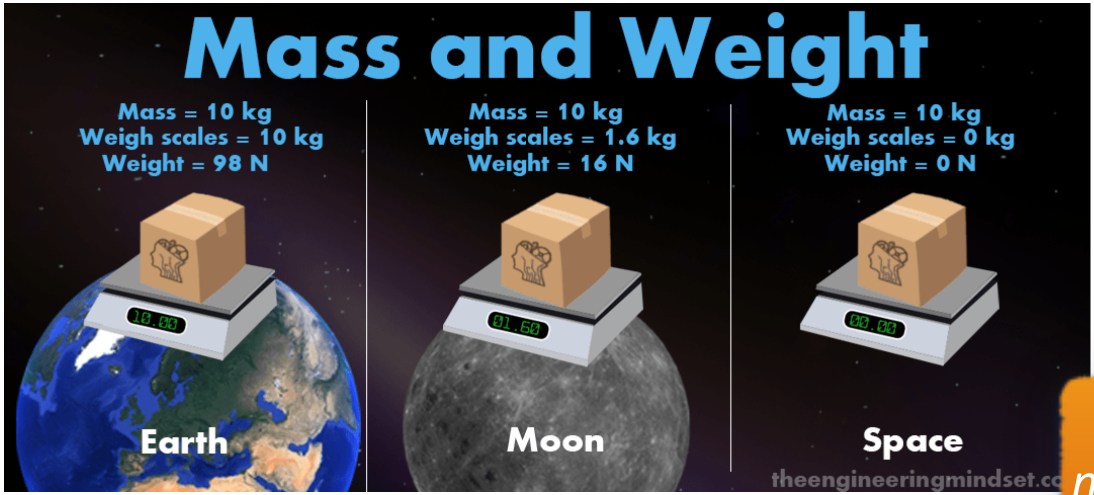
Ασθενής πυρηνική
σχετική ισχύς: $\mathbf{10^{-6}}$
εμβέλεια: 1 fm

Ισχυρή πυρηνική
σχετική ισχύς: ***1***
εμβέλεια: 0.001 fm

Βαρύτητα
σχετική ισχύς: $\mathbf{10^{-38}}$
εμβέλεια: άπειρη



Τι είναι η μάζα;

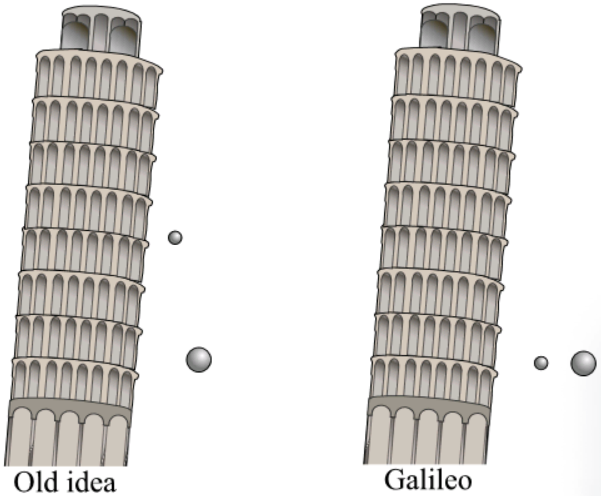


Πειραματικά

$$\left| \frac{m_\alpha - m_\beta}{m_\beta} \right| < 10^{-15}$$

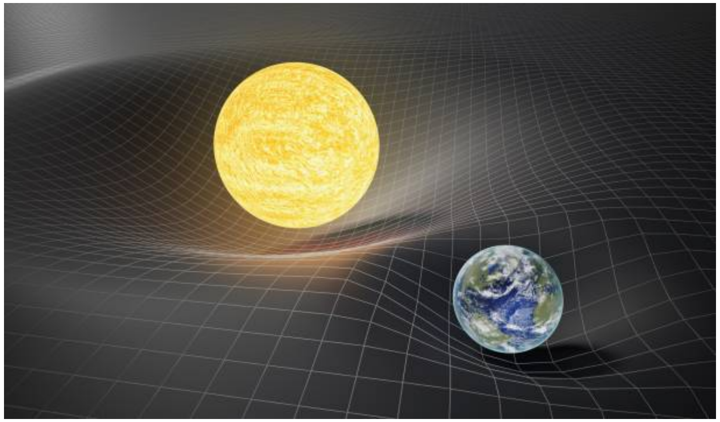
Βαρυτική μάζα (m_β)
η ιδιότητα της ύλης που σχετίζεται με τη βαρυτική δύναμη

Αδρανειακή μάζα (m_α)
η ιδιότητα της ύλης που σχετίζεται με την δυσκολία να μεταβάλλουμε την κινητική κατάσταση ενός σώματος



Μικροσκοπικά: *η μάζα είναι μια κβαντική ιδιότητα των στοιχειωδών σωματιδίων που καθορίζει την ένταση της αλληλεπίδρασής τους με το σωματίδιο Higgs*

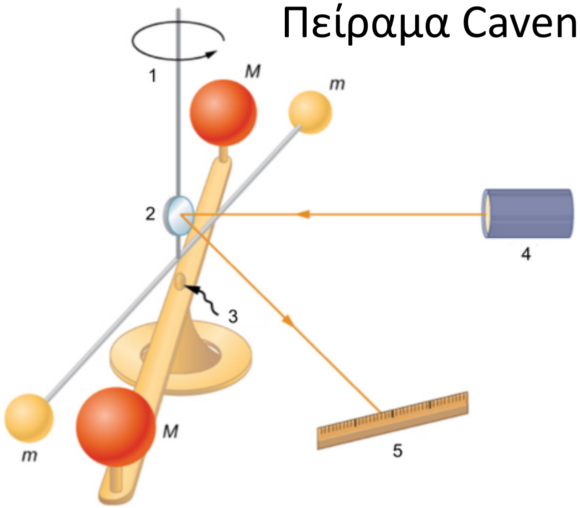
Βαρύτητα



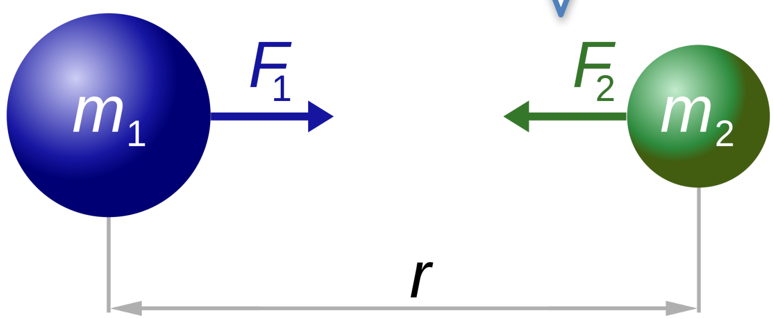
Γενική Σχετικότητα (A. Einstein)
Η παρουσία ύλης & ενέργειας καθορίζει την καμπυλότητα του χωροχρόνου και η βαρύτητα είναι αποτέλεσμα της καμπύλωσης αυτής

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Πείραμα Cavendish



Μικρές αποστάσεις, μάζες & ταχύτητες

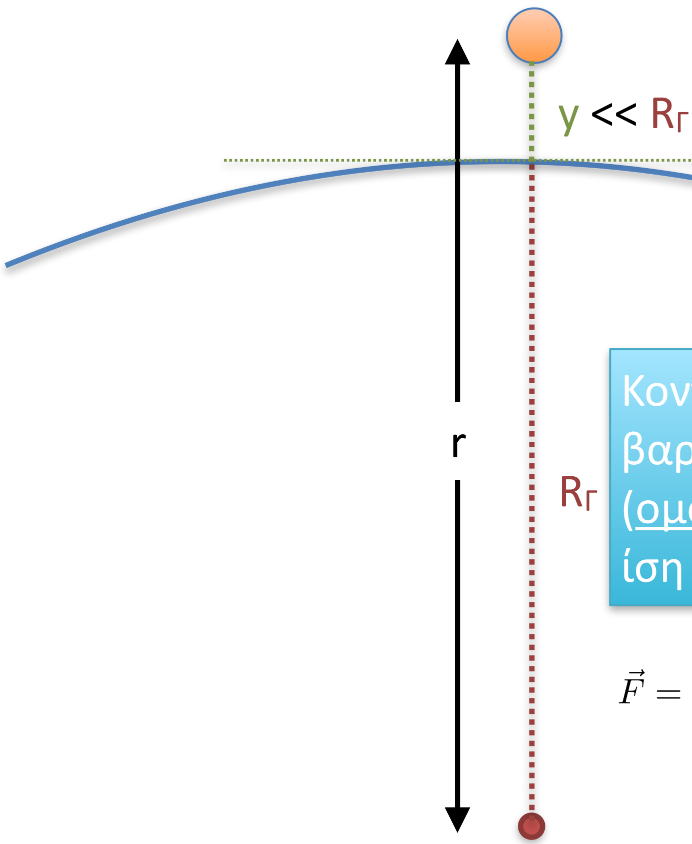


$$G = 6.67408 \times 10\text{-}11 \frac{m^3}{kg\, s^2}$$

$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

Νόμος παγκόσμιας έλξης (I. Newton)

Βαρύτητα κοντά στην επιφάνεια της Γης



G = 6.674 × 10^{-11} $m^3/(kg\ s^2)$
$M_Γ$ = 5.972 × 10^{24} kg
$R_Γ$ = 6.371 × 10^6 m

Κοντά στην επιφάνεια της Γης η βαρυτική δύναμη είναι σταθερή (ομογενές πεδίο βαρύτητα) και ίση με mg.

$$g \equiv \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

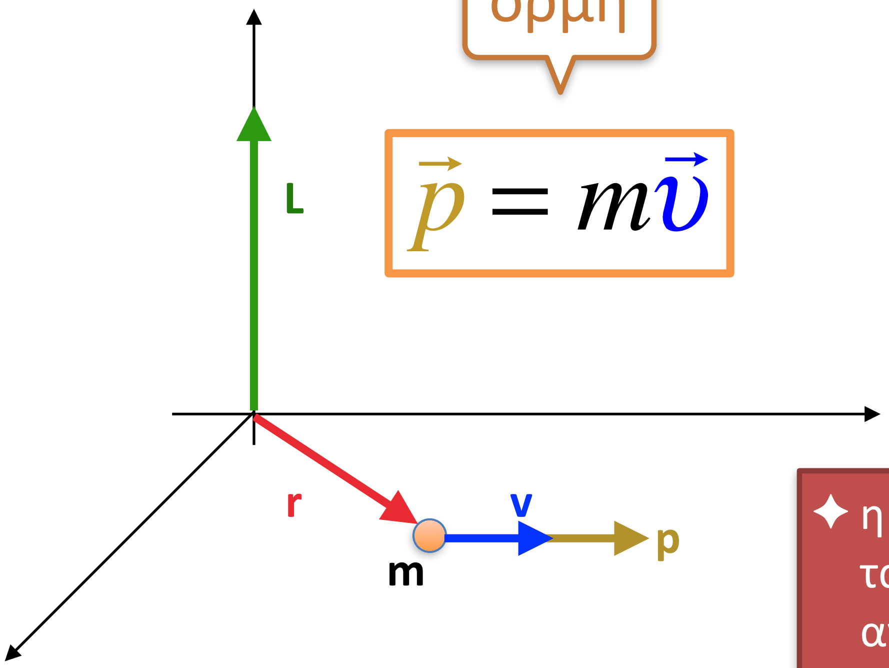
$$\vec{F} = -G\frac{M_\Gamma m}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{F}(y) = -G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + y)^2}\hat{y} \approx -G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma^2}\hat{y} \Rightarrow \vec{F} = -mg\hat{y}$$

$$F(y) = G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + y)^2} = \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^2}\left(1 + \frac{y}{R_\Gamma}\right)^{-2} \Rightarrow F(y) \approx mg\left(1 - \frac{2y}{R_\Gamma}\right)$$

Ανάπτυγμα Taylor για x = $y/R_Γ$ << 1

$$(1+x)^a \underset{x\ll 1}{\approx} 1 + ax$$

Ορμή & στροφορμή υλικού σημείου



ορμή

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

στροφορμή

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- ✦ η **ορμή p** είναι διάνυσμα παράλληλο στην ταχύτητα και δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς
- ✦ η **στροφορμή L** είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από την ορμή του σωματιδίου και το διάνυσμα θέσης αυτού ως προς ένα δεδομένο σημείο αναφοράς

Θεμελιώδεις νόμοι του Newton

Οι νόμοι του Newton είναι **αξιωματικοί**, δηλαδή δεν αποδεικνύονται από άλλη θεωρία - επιβεβαιώνονται μόνο **πειραματικά**!

1ος Νόμος: ένα σώμα διατηρεί την κινητική του κατάσταση (*δηλαδή παραμένει ακίνητο ή κινείται ευθύγραμμα ομαλά*) αν ασκείται σε αυτό μηδενική δύναμη. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σώμα είναι ελεύθερο.

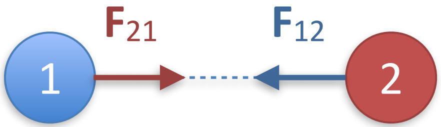
2ος Νόμος: αν σε ένα σώμα ασκηθεί δύναμη F τότε αυτό κινείται έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του να ισούται με τη δύναμη.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \xrightarrow{m\,=\,\text{σταθερή}} \vec{F} = m\vec{a}$$

3ος Νόμος: αν δύο σώματα ασκούν μεταξύ τους **κεντρικές δυνάμεις**, τότε αυτές έχουν ίσο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση.

Προσοχή: ο 3ος Νόμος δεν ισχύει υποχρεωτικά αν οι δυνάμεις εξαρτώνται από την ταχύτητα (π.χ. μαγνητική δύναμη).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Παράδειγμα #1

Ένα σωματίδιο βρίσκεται ακίνητο στην αρχή του θετικού ημιάξονα x όταν αρχίζει να ασκείται σε αυτό μεταβλητή δύναμη $F(t) = F_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$για $t \leq \tau$. Να βρείτε το $x(t)$ και τη μέση ταχύτητα στο διάστημα $[0,\tau]$.

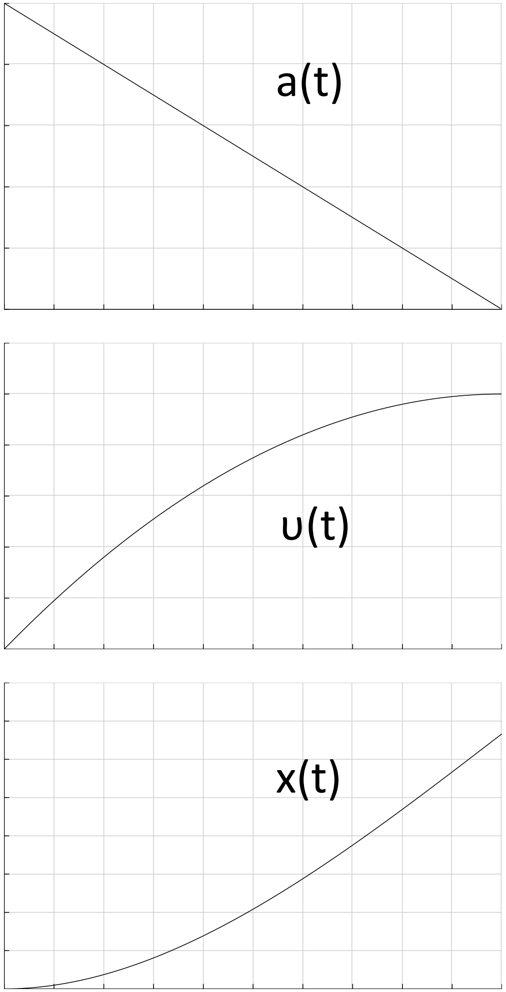
$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F(t)\hat{x} = ma\hat{x} \Rightarrow a = \frac{F_0}{m}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F_0}{m}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \int_0^{\upsilon} d\upsilon' = \frac{F_0}{m}\int_0^t \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right) dt' \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right)$$

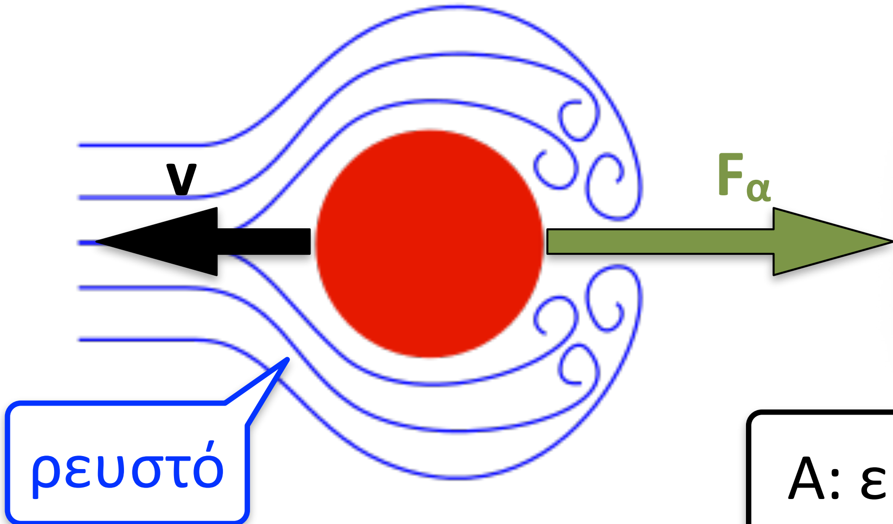
$$x(t) = \int_0^t \upsilon(t')dt' = \frac{F_0}{m}\int_0^t \left(t' - \frac{1}{3}t'^3\right) dt' = \frac{F_0\tau^2}{6m}\left(3\frac{t^2}{\tau^2} - \frac{t^3}{\tau^3}\right)$$

$$s = x(\tau) = \frac{F_0\tau^2}{3m}$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{s}{\tau} = \frac{F_0\tau}{3m}$$



Αντίσταση ρευστού (π.χ. αέρας) - οπισθέλκουσα δύναμη



Fa
οπισθέλκουσα δύναμη
(drag force)

A: εμβαδόν διατομής κινούμενου σώματος

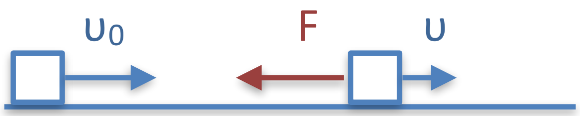
$$F_a \sim \rho A v^k$$

k=1 για μικρές ταχύτητες
k=2 για μεγάλες ταχύτητες
(η τυρβώδης ροή πίσω από το σώμα γίνεται εντονότερη)

ρ: πυκνότητα ρευστού

Παράδειγμα #2

Ένα σωματίδιο βρίσκεται κινείται κατά τον θετικό ημιάξονα *x* με ταχύτητα υ_0 όταν αρχίζει να ασκείται σε αυτό μεταβλητή δύναμη $\vec{F} = -k\vec{\upsilon}$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.

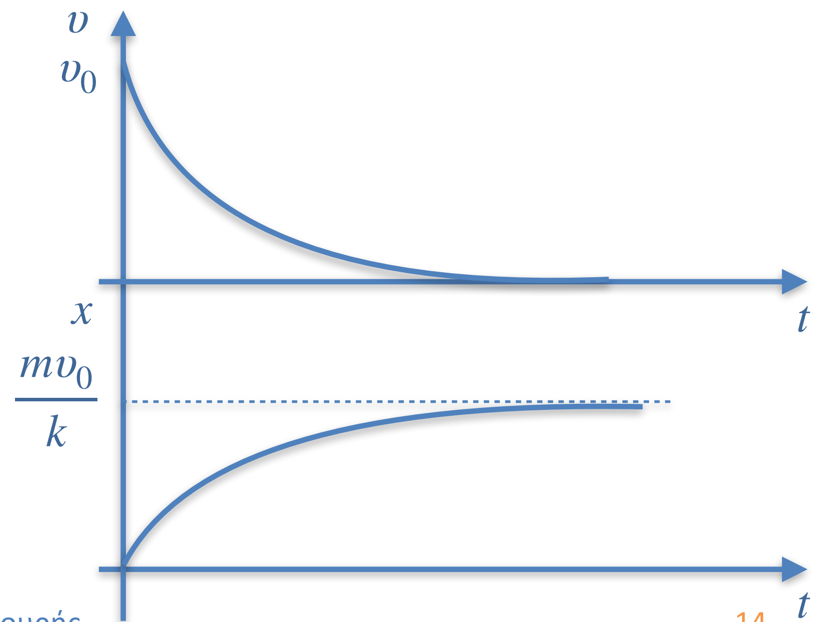


$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow -k\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt' \Rightarrow \ln|\upsilon| - \ln|\upsilon_0| = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0\, e^{-\frac{k}{m}t}$$

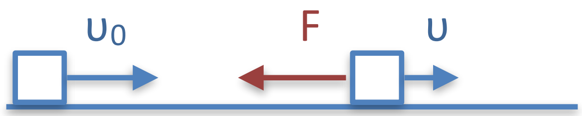
$$x(t) = x(0) + \int_0^t \upsilon(t')dt' = \upsilon_0\int_0^t e^{-\frac{k}{m}t'}dt' \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{m\upsilon_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$



Παράδειγμα #3

Ένα σωματίδιο βρίσκεται κινείται κατά τον θετικό ημιάξονα *x* με ταχύτητα υ_0 όταν αρχίζει να ασκείται σε αυτό μεταβλητή δύναμη $\vec{F} = -k\upsilon^2\hat{\upsilon}$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.

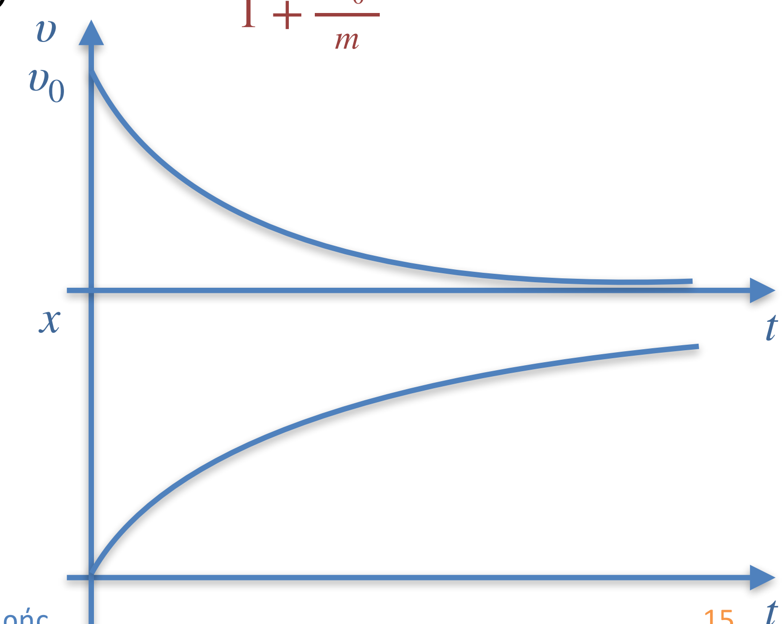


$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k\upsilon^2\hat{\upsilon} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow -k\upsilon^2 = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$-\frac{k}{m}dt = \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} \Rightarrow -\frac{k}{m}t = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'^2} \Rightarrow -\frac{k}{m}t = \frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{\upsilon_0}{1+\frac{k\upsilon_0 t}{m}}$$

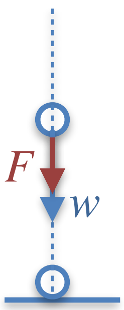
$$x(t) = x(0) + \int_0^t \upsilon(t')dt' = \int_0^t \frac{\upsilon_0}{1+\frac{k\upsilon_0 t'}{m}}dt' \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{k\upsilon_0 t}{m}\right)$$



Παράδειγμα #4

Ένα σωματίδιο βάλλεται κατακόρυφα προς τα επάνω με ταχύτητα υ_0 και βρίσκεται υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης του βάρους. Η αντίσταση του αέρα είναι $\vec{F} = -k\vec{\upsilon}$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -mg - k\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon'}{\upsilon' + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \ln\left(\upsilon + \frac{mg}{k}\right) - \ln\left(\upsilon_0 + \frac{mg}{k}\right) = -\frac{k}{m}t \Rightarrow$$

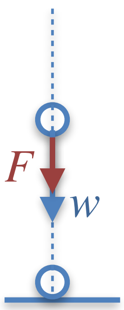
$$\upsilon(t) = \left(\upsilon_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

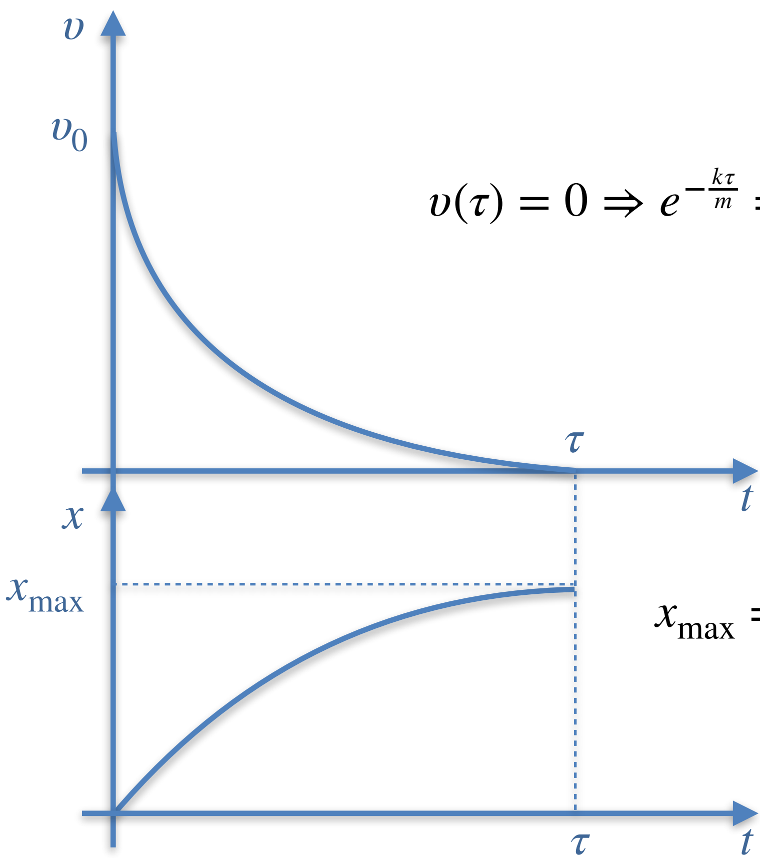
$$x(t) = x(0) + \int_0^t \upsilon(t')dt' = \int_0^t \left[\left(\upsilon_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt'}{m}} - \frac{mg}{k}\right]dt' \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{m}{\kappa}\left(\upsilon_0 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) - \frac{mg}{k}t$$

Παράδειγμα #4 (συνέχεια)

Ένα σωματίδιο βάλλεται κατακόρυφα προς τα επάνω με ταχύτητα υ_0 και βρίσκεται υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης του βάρους. Η αντίσταση του αέρα είναι $\vec{F} = -k\vec{\upsilon}$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.



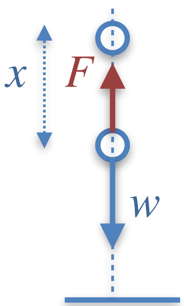


$$\upsilon(\tau) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{k\tau}{m}} = \frac{1}{1 + \frac{k\upsilon_0}{mg}} \Rightarrow \quad \tau = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{k\upsilon_0}{mg}\right)$$

$$x_{\max} = x(\tau) = \frac{m\upsilon_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{k\upsilon_0}{mg}\right)$$

Παράδειγμα #5

Ένα σωματίδιο αφήνεται να πέσει κατακόρυφα προς τα κάτω χωρίς αρχική ταχύτητα και βρίσκεται υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης του βάρους. Η αντίσταση του αέρα είναι $\vec{F} = -k\vec{\upsilon}$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow mg - k\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow$$

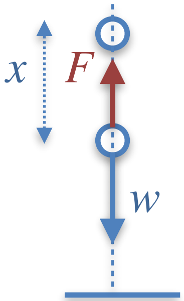
$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}t + C \Rightarrow \ln\left|\upsilon - \frac{mg}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C \Rightarrow \upsilon - \frac{mg}{k} = C_1 e^{-\frac{kt}{m}}$$

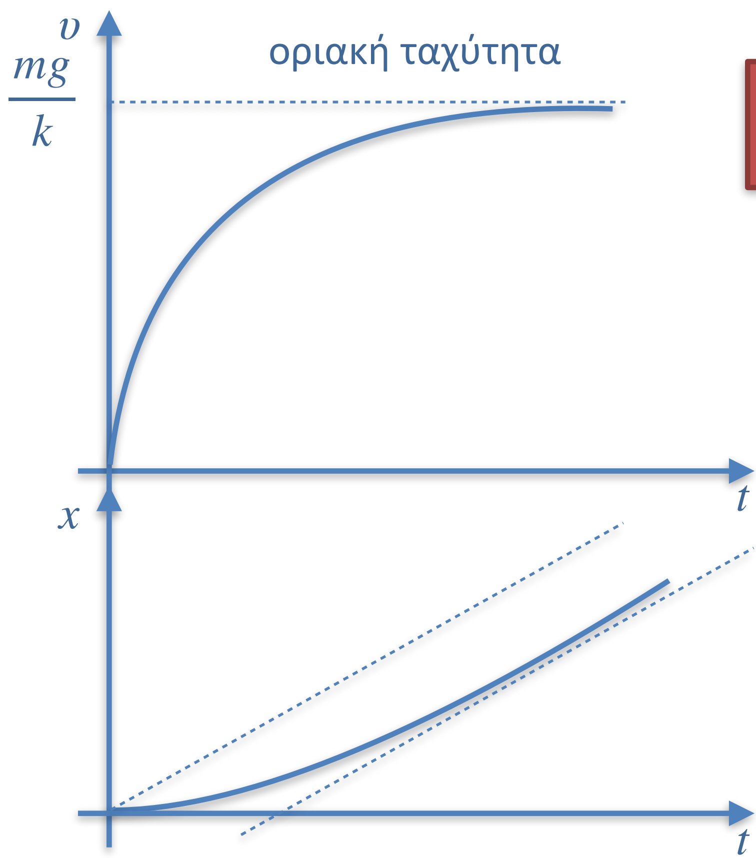
$$\upsilon(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{mg}{k} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \upsilon(t')dt' = \frac{mg}{k}\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{kt'}{m}}\right)dt' \Rightarrow \quad x(t) = \frac{mgt}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Παράδειγμα #5 (συνέχεια)

Ένα σωματίδιο αφήνεται να πέσει κατακόρυφα προς τα κάτω χωρίς αρχική ταχύτητα και βρίσκεται υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης του βάρους. Η αντίσταση του αέρα είναι $\vec{F} = -k\vec{v}$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.





Η οριακή ταχύτητα αποκτάται ασυμπτωτικά και επιτυγχάνεται όταν w=F

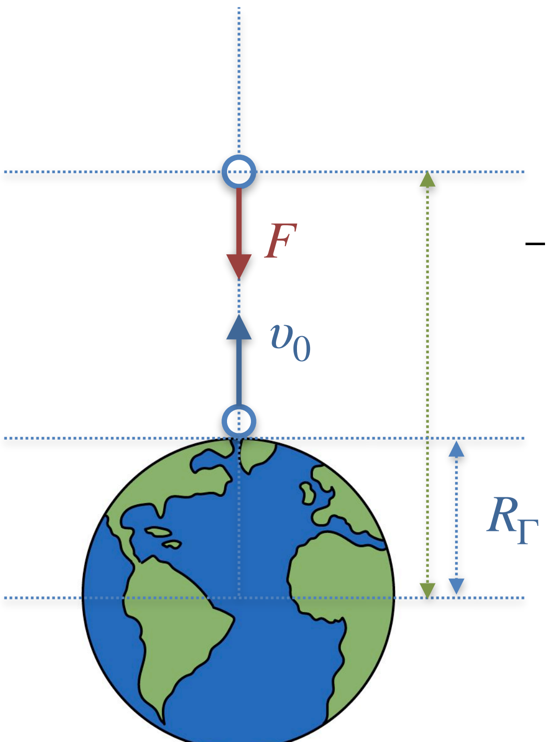
$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

$$x(t) = \frac{mgt}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Για t μεγάλο: $x(t) \to \frac{mg}{k}\left(t - \frac{m}{k}\right)$

Παράδειγμα #6

Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα υ_0 από την επιφάνεια της Γης. Να βρείτε: α) την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο της Γης, β) τη μέγιστη απόσταση στην οποία θα φτάσει το σώμα, γ) την ελάχιστη ταχύτητα υ_0 ώστε το σώμα να μην επιστρέψει στη Γη (ταχύτητα διαφυγής).



$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -G\frac{M_\Gamma m}{x^2} = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow -G\frac{M_\Gamma}{x^2} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$-G\frac{M_\Gamma}{x^2}dx = \upsilon d\upsilon \Rightarrow -GM_\Gamma\int_{R_\Gamma}^{x}\frac{dx'}{x'^2} = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\upsilon' d\upsilon \Rightarrow GM_\Gamma\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_\Gamma}\right) = \frac{1}{2}\left(\upsilon^2-\upsilon_0^2\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon(x) = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2GM_\Gamma\left(\frac{1}{R_\Gamma}-\frac{1}{x}\right)}$$

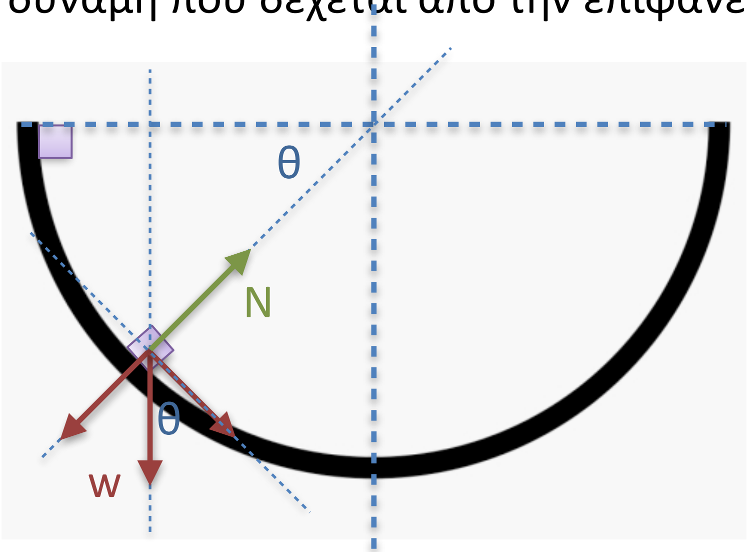
Το σώμα σταματάει όταν

$$x = x_{\max} \Rightarrow \upsilon(x_{\max}) = 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{2GM_\Gamma R_\Gamma}{2GM_\Gamma - \upsilon_0^2 R_\Gamma}$$

Η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\upsilon_0 < \upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$

Άσκηση

Ένα μικρό σώμα αφήνεται να ολισθήσει στο εσωτερικό μιας λείας ημισφαιρικής επιφάνειας ακτίνας *R*. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος και τη δύναμη που δέχεται από την επιφάνεια καθώς κινείται πάνω σε αυτή.



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow w_\theta \hat{\theta} + (w_r - N)\hat{r} = mR\ddot{\theta}\hat{\theta} - mR\omega^2\hat{r}$$

$$w_\theta = mR\dot{\omega} \Rightarrow mg\cos\theta = mR\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow R\omega\frac{d\omega}{d\theta} = g\cos\theta$$

$$\int_0^\omega \omega' d\omega' = \frac{mg}{R}\int_0^\theta \cos\theta' d\theta' \Rightarrow \quad \omega(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{R}\sin\theta}$$

$$mg\sin\theta - N = -mR\omega^2 \Rightarrow N = mg\sin\theta + mR\omega^2 \Rightarrow$$

$$N(\theta) = 3mg\sin\theta$$

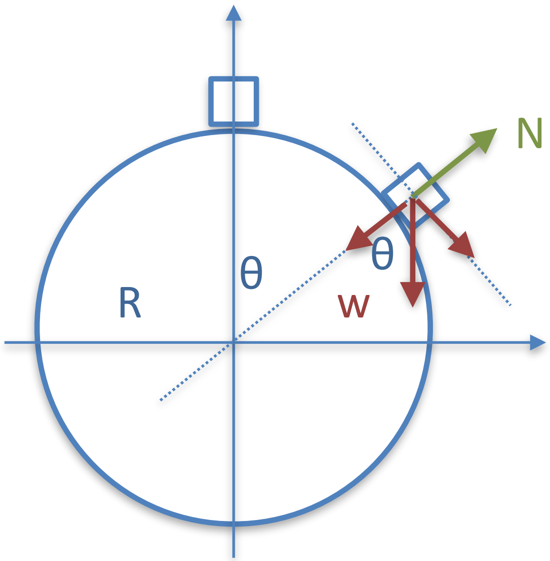
Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} = -R\omega^2\hat{r} + R\dot{\omega}\hat{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega}$$

Άσκηση

Ένα μικρό σώμα αφήνεται να ολισθήσει από την κορυφή μιας λείας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας *R*. Να βρείτε το σημείο στο οποίο θα χάσει το σώμα την επαφή με τη σφαίρα.



$$\Sigma \overrightarrow{F} = m\vec{a} \Rightarrow w_\theta \hat{\theta} + (N - w_r)\hat{r} = mR\ddot{\theta}\hat{\theta} - mR\omega^2\hat{r}$$

$$w_\theta = R\dot{\omega} \Rightarrow mg\sin\theta = mR\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow R\omega\frac{d\omega}{d\theta} = g\sin\theta$$

$$\int_0^\omega \omega' d\omega' = \frac{mg}{R}\int_0^\theta \sin\theta' d\theta' \Rightarrow \quad \omega(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$$

$$N - mg\cos\theta = -mR\omega^2 \Rightarrow N = mg\cos\theta - mR\omega^2 \Rightarrow$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες

$$N(\theta) = mg\,(3\cos\theta - 2)$$

Η επαφή χάνεται όταν

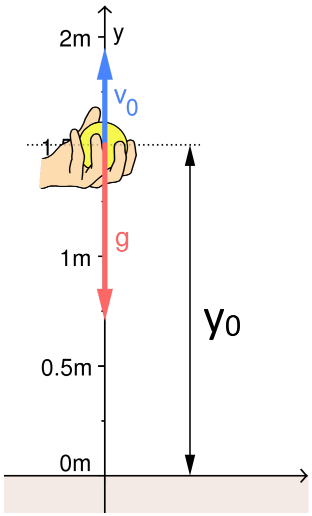
$$N(\theta_0) = 0 \Rightarrow \cos(\theta_0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_0 \approx 48.2^o$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} = -R\omega^2\hat{r} + R\dot{\omega}\hat{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega}$$

με ταχύτητα $\omega(\theta_0) = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$

Κατακόρυφη βολή στο ομογενές πεδίο βαρύτητας

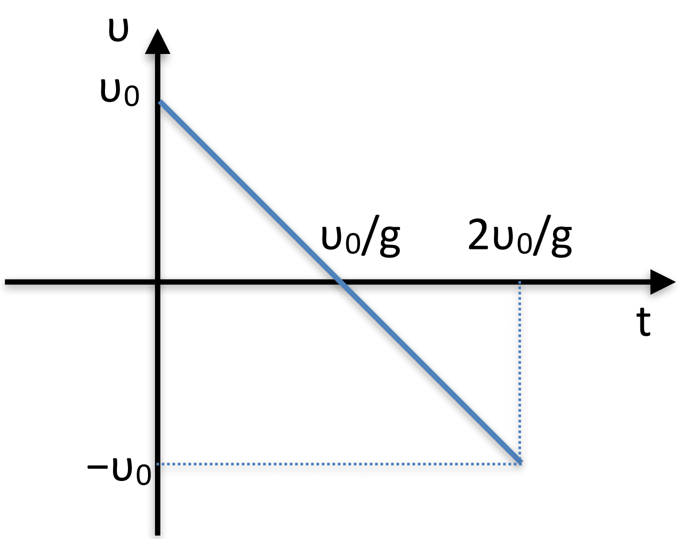


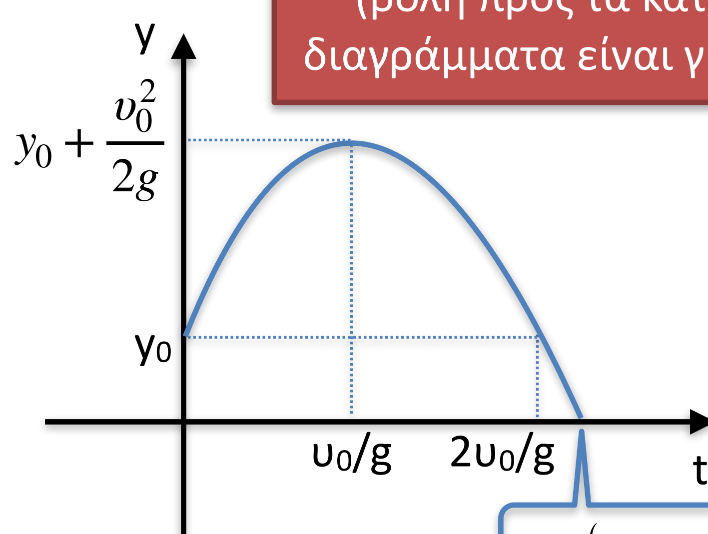
$$\vec{a} = -g\hat{y} \Rightarrow \boxed{a = g}$$

$$\vec{v} = v_0\hat{y} + \vec{a}t = (v_0 - gt)\hat{y} \Rightarrow \boxed{v = v_0 - gt}$$

$$\vec{r} = y\hat{y} = y_0\hat{y} + v_0 t\hat{y} - \frac{1}{2}gt^2\hat{y} \Rightarrow \boxed{y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2}$$

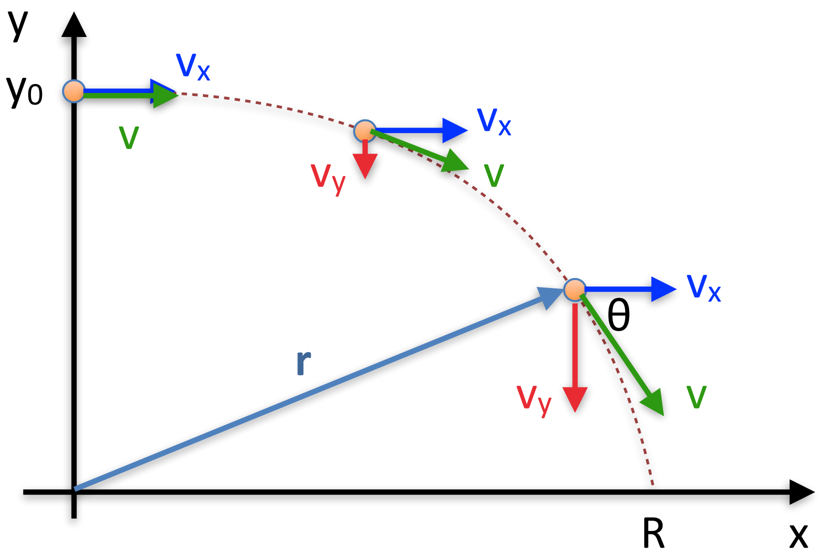
Οι τύποι ισχύουν και για $\upsilon_0 < 0$ (βολή προς τα κάτω). Τα διαγράμματα είναι για $\upsilon_0 > 0$.





$$t = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{v_0^2}}\right)$$

Οριζόντια βολή στο ομογενές πεδίο βαρύτητας



Εξισώσεις κίνησης

$$\vec{a} = -g\hat{y} \Rightarrow a_x = 0,\ a_y = g$$

$$\vec{v} = v_x\hat{x} - v_y\hat{y} \Rightarrow v_x = v_0,\ v_y = gt$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \Rightarrow x = v_0 t,\ y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με τον οριζόντιο άξονα

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{gt}{v_0}\right)$$

Χρόνος κίνησης $y(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$

Μέτρο ταχύτητας

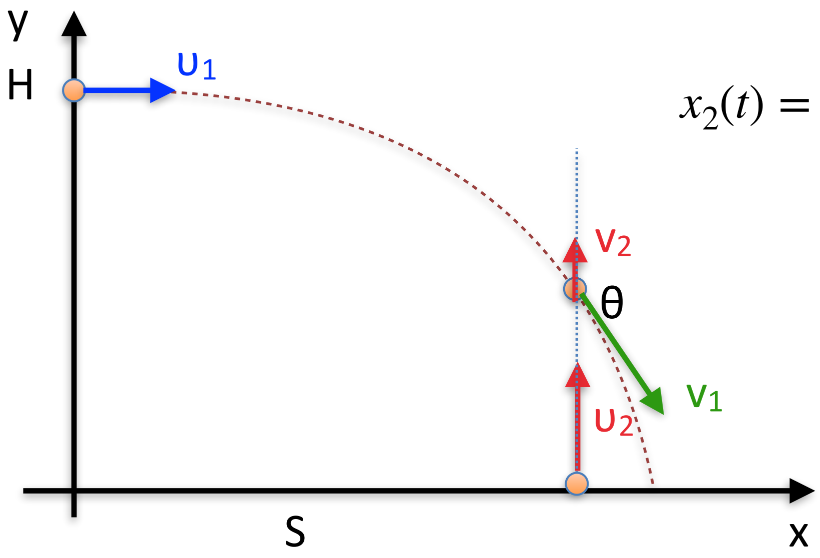
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

Βεληνεκές $R = v_0 t_0 = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$

Εξίσωση τροχιάς $y(x) = y_0 - \left(\frac{g}{2v_0^2}\right)x^2$

Άσκηση

Ένας πύραυλος βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα υ_1 από ύψος H. Σε απόσταση S πάνω στο έδαφος βρίσκεται πυροβόλο που μπορεί να ρίξει βλήμα κατακόρυφα με ταχύτητα υ_2. Να βρείτε τη συνθήκη ώστε να μπορέσει το βλήμα να χτυπήσει τον πύραυλο, έχοντας εκτοξευθεί ταυτόχρονα. Εφαρμογή για H=50 m, υ_1 =5 m/s, S = 10 m, g=10 m/s². Ποια είναι η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων των δύο σωμάτων;



$$x_1(t) = \upsilon_1 t,\ y_1(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_2(t) = S,\ y_2(t) = \upsilon_2 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) \Rightarrow t_0 = \frac{S}{\upsilon_1}$$

$$y_1(t_0) = y_2(t_0) \Rightarrow H - \frac{1}{2}gt_0^2 = \upsilon_2 t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 \Rightarrow t_0 = \frac{H}{\upsilon_2}$$

$$\frac{S}{\upsilon_1} = \frac{H}{\upsilon_2}$$

Άσκηση (συνέχεια)

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{H}{S} \Rightarrow \upsilon_2 = 5\frac{50}{10}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \upsilon_2 = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$t_0 = \frac{S}{\upsilon_1} = \frac{10}{5}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}$$

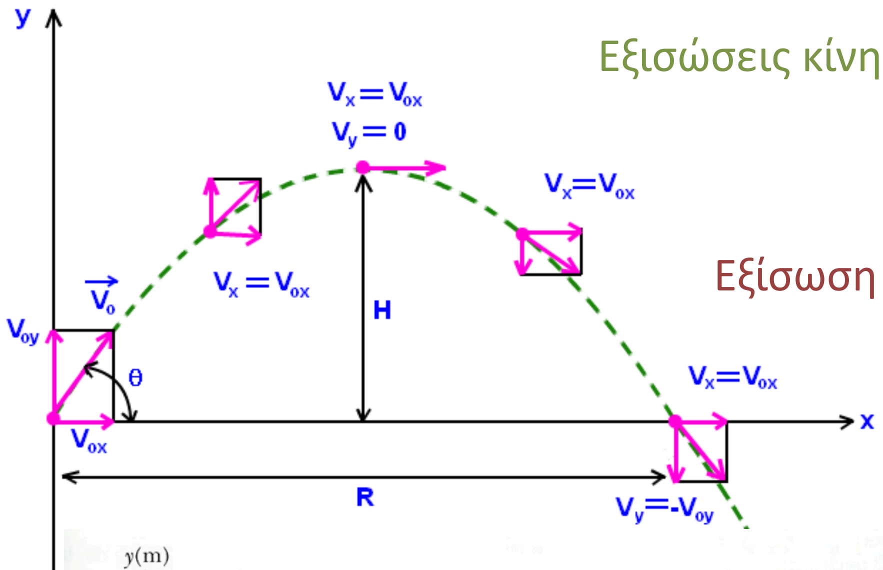
$$\overrightarrow{v_1}(t) = (\upsilon_1,\ -gt),\ \overrightarrow{v_2}(t) = (0,\ \upsilon_2 - gt)$$

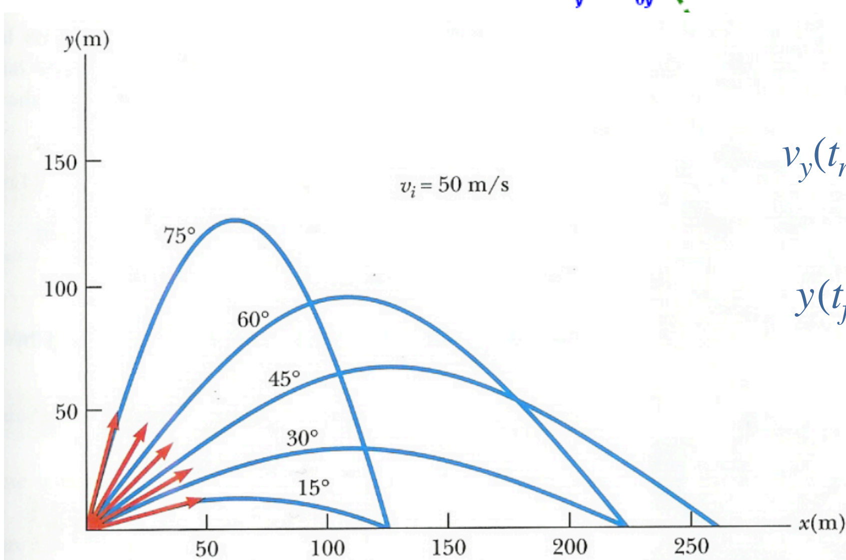
$$\overrightarrow{v_1}(t_0) = \overrightarrow{v_1}(4) = (5,\ -20)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\overrightarrow{v_2}(t_0) = \overrightarrow{v_2}(4) = (0,\ 25 - 10 \cdot 2)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = (0,\ 5)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\cos\theta(t_0) = \frac{\overrightarrow{v_1}(t_0) \cdot \overrightarrow{v_2}(t_0)}{|\overrightarrow{v_1}(t_0)|\,|\overrightarrow{v_2}(t_0)|} = \frac{5 \cdot 0 - 20 \cdot 5}{\sqrt{5^2 + 20^2}\sqrt{0^2 + 5^2}} \approx -0.97 \Rightarrow \quad \theta \approx 166^{\mathrm{o}}$$

Πλάγια βολή στο ομογενές πεδίο βαρύτητας





Εξισώσεις κίνησης

$$v_x = v_0 \cos\theta,\ x = v_0 \cos\theta t$$
$$v_y = v_0 \sin\theta - gt,\ y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Εξίσωση τροχιάς

$$y = \tan\theta\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

Χρόνος ανόδου (t_r) και συνολικός χρόνος κίνησης (t_f)

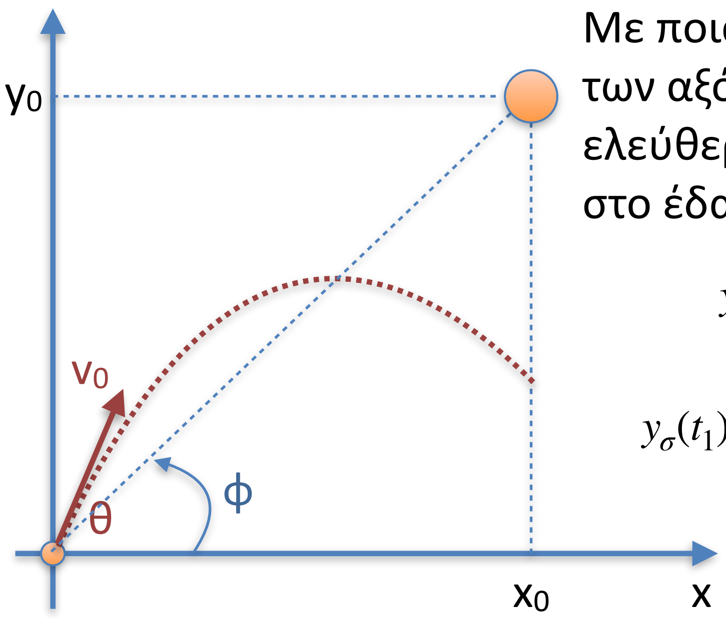
$$v_y(t_r) = 0 \Rightarrow t_r = \frac{v_0 \sin\theta}{g},\ y_{max} = y(t_r) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$y(t_f) = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} = 2 t_r$$

Βεληνεκές

$$R = x(t_f) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Άσκηση



Με ποια γωνία ϑ πρέπει βληθεί το βλήμα από την αρχή των αξόνων ώστε να πετύχει το σώμα που κάνει ελεύθερη πτώση από το σημείο (x_0,y_0) πριν αυτό φτάσει στο έδαφος;

$$y_\sigma(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad y_\beta(t) = v_0 \sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_\sigma(t_1) = y_\beta(t_1) \Rightarrow y_0 - \frac{1}{2}gt_1^2 = v_0 \sin\theta\ t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow y_0 = v_0 \sin\theta\ t_1$$

$$x_\sigma(t_1) = x_\beta(t_1) \Rightarrow x_0 = v_0 \cos\theta\ t_1$$

$$\frac{y_0}{x_0} = \tan\theta = \tan\phi \Rightarrow \theta = \phi$$

Συνθήκη συνάντησης πριν φτάσει το σώμα στο έδαφος

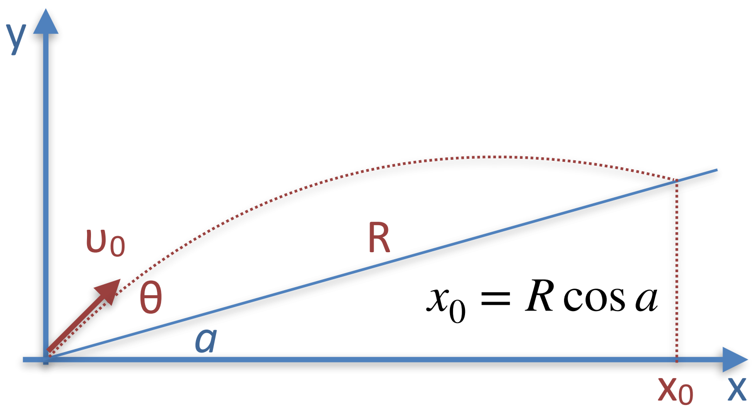
$$R \geq x_0 \Rightarrow x_0 g \leq v_0^2 \sin 2\theta \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{x_0 g}{2 \sin\theta \cos\theta}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

$$v_0^2 \geq \frac{x_0 g}{2 \tan\theta \cos^2\theta} = \frac{x_0 g}{2\frac{y_0}{x_0}\left(1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}\right)} \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{g\left(x_0^2 + y_0^2\right)}{2y_0}}$$

Άσκηση

Ένα σώμα βάλλεται με ταχύτητα υ_0 και γωνία θ ως προς ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας a. Να βρείτε τη γωνία θ ώστε να μεγιστοποιείται η απόσταση στην οποία θα χτυπήσει το βλήμα το κεκλιμένο επίπεδο.



$$y_1 = \tan(\theta + a) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta + a)} \cdot x^2$$

$$y_2 = \tan a \cdot x$$

Σημείο τομής: $y_1(x_0) = y_2(x_0) \Rightarrow$

$$\tan(\theta + a) \cdot x_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta + a)} \cdot x_0^2 = \tan a \cdot x_0 \Rightarrow$$

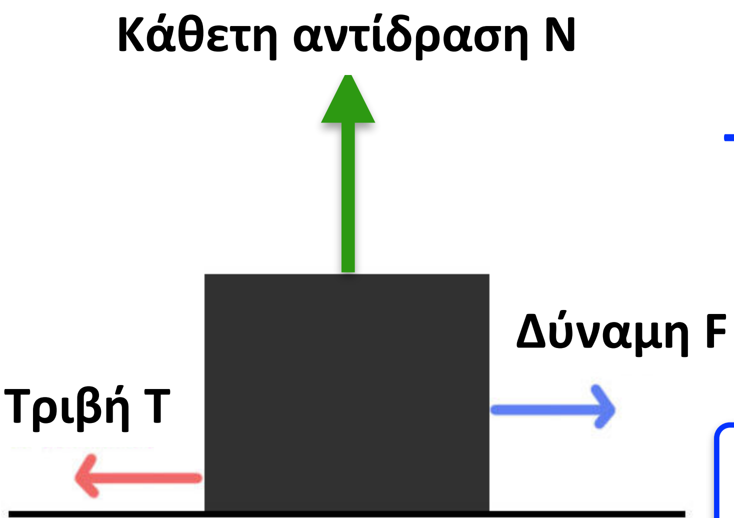
$$x_0 = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2(\theta + a)\left[\tan(\theta + a) - \tan a\right] = \frac{2v_0^2}{g}\left[\sin(\theta + a)\cos(\theta + a) - \cos^2(\theta + a)\tan a\right]$$

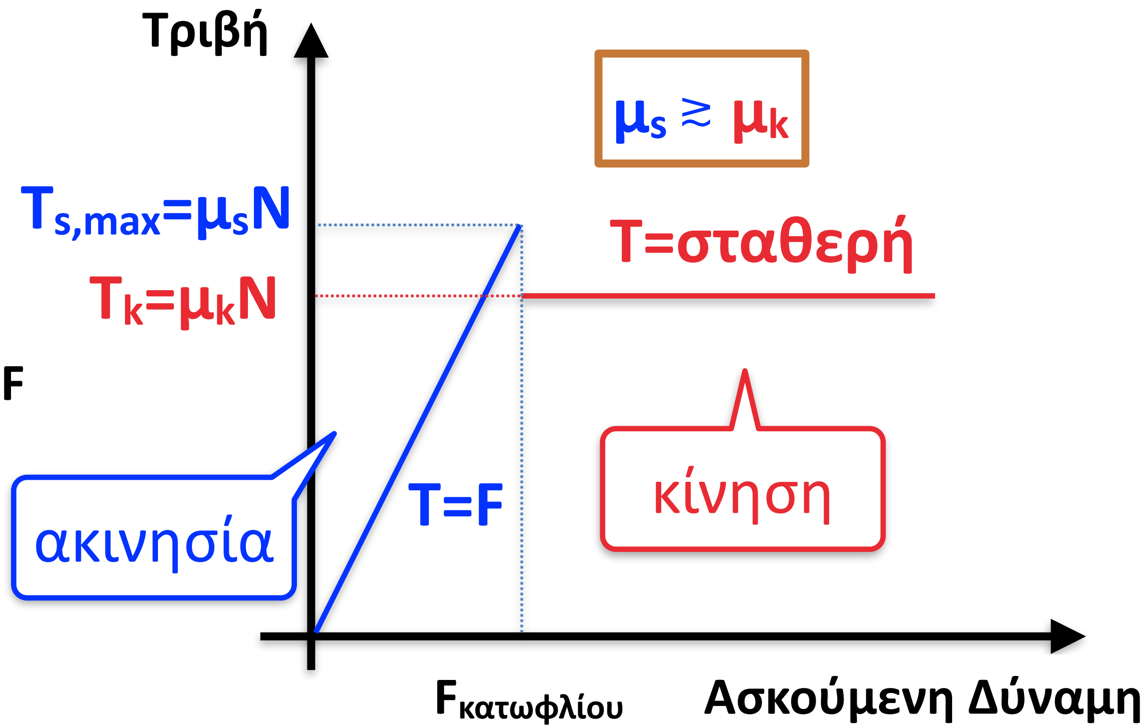
Το R είναι μέγιστο όταν το x_0 είναι μέγιστο

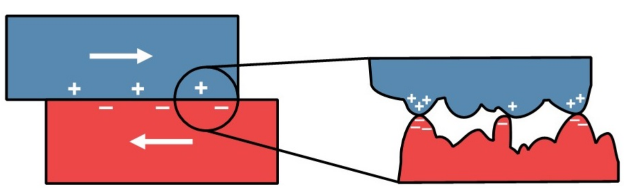
$$\frac{dx_0}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos^2(\theta + a) - \sin^2(\theta + a) + 2\cos(\theta + a)\sin(\theta + a)\tan a = 0 \Rightarrow \cos(2\theta + 2a) + \sin(2\theta + 2a)\tan a = 0 \Rightarrow$$

$$\tan(2\theta + 2a) = -\frac{1}{\tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}$$

Τριβή







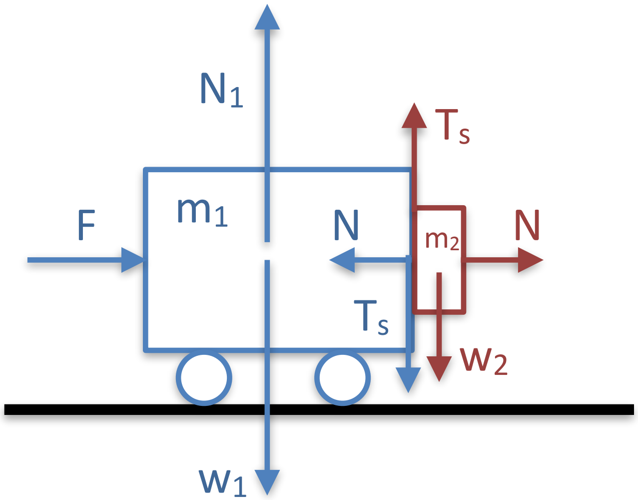
Η τριβή οφείλεται στην ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση μεταξύ των ατελειών των δύο επιφανειών.

Η **στατική τριβή** εμφανίζεται καθώς ένα σώμα <u>τείνει</u> να κινηθεί και έχει φορά αντίθετη από την επερχόμενη μεταβολή. Μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μέχρι μιας μέγιστης, η οποία ισούται με $\mu_s N$ (μ_s είναι ο συντελεστής στατικής τριβής).

Η **τριβή ολίσθησης** εμφανίζεται αφού το σώμα αρχίσει να κινείται και ισούται με μN (μ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής, με $\mu < \mu_s$).

Άσκηση

Ένα σώμα μάζας m_2 εφάπτεται στην κατακόρυφη επιφάνεια του σώματος μάζας m_1 στο οποίο ασκείται εξωτερική δύναμη F. Αν το σώμα μάζας m_1 μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και ο συντελεστής στατική τριβής με το σώμα μάζας m_2 είναι μ_s να βρείτε την ελάχιστη τιμή της F έτσι ώστε τα δύο σώματα να αποτελούν συσσωμάτωμα.



Νόμοι Newton

$$N = m_2 a$$
$$F - N = m_1 a$$
$$T_s = m_2 g$$
$$N_1 = T_s + m_1 g$$

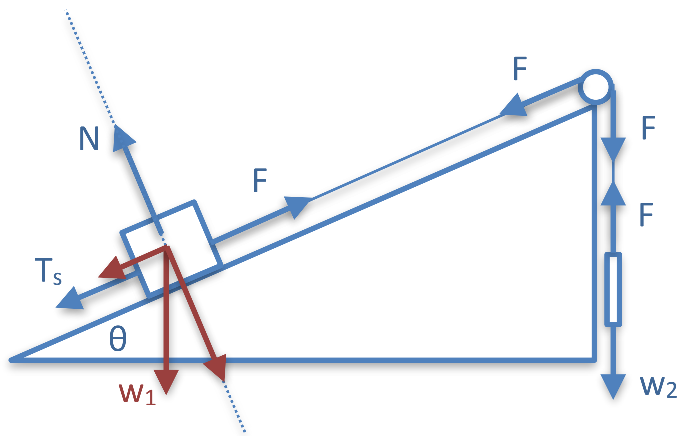
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad N = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

$$T_s \le \mu_s N \Rightarrow m_2 g \le \mu_s \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$F \ge \frac{(m_1 + m_2) g}{\mu_s}$$

Άσκηση

Ένα σώμα μάζας m_1 είναι τοποθετημένο σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ και συνδέεται μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος με τροχαλία. Οι συντελεστές στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης με το επίπεδο είναι μ_s και μ, αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη μάζα m_2 που πρέπει να κρεμάσουμε στην τροχαλία ώστε να κινηθεί το σύστημα και την επιτάχυνση που θα προκύψει αν προκληθεί κίνηση.



ισορροπία

$$\boxed{\begin{aligned} w_2 &= F \\ F &= w_1 \sin\theta + T_s \\ N &= w_1 \cos\theta \end{aligned}}$$

$$T_s = m_2 g - m_1 g \sin\theta \le \mu_s N \Rightarrow$$

$$m_2 g \le m_1 g \sin\theta + \mu_s m_1 g \cos\theta \Rightarrow$$

$$m_2 \le m_1 \left(\sin\theta + \mu_s \cos\theta\right)$$

αυτή είναι η συνθήκη για να **μην** κινείται το σύστημα, οπότε η ελάχιστη μάζα για να κινηθεί είναι $m_2 \ge m_1 \left(\sin\theta + \mu_s \cos\theta\right)$

κίνηση

$$\boxed{\begin{aligned} m_2 g - F &= m_2 a \\ F - T - m_1 g \sin\theta &= m_1 a \\ N &= m_1 g \cos\theta \end{aligned}}$$

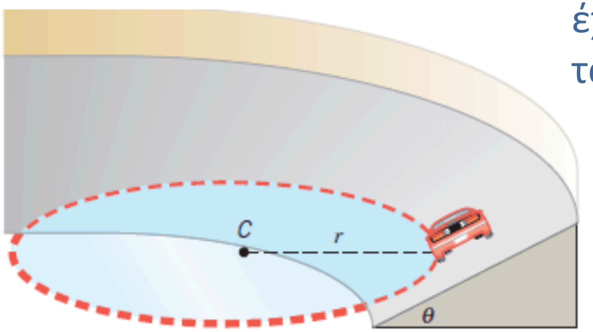
$$F - \mu N - m_1 g \sin\theta = m_1 a \Rightarrow$$

$$m_2 g - m_2 a - \mu m_1 g \cos\theta - m_1 g \sin\theta = m_1 a \Rightarrow$$

$$a = g\frac{m_2 - m_1 \left(\sin\theta + \mu \cos\theta\right)}{m_1 + m_2}$$

Άσκηση

Ένα όχημα βρίσκεται σε κυκλική, στροφή ακτίνας *r* και κλίσης θ. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του οχήματος και του οδοστρώματος είναι μ_s. Αν το όχημα είναι ακίνητο, πόσο πρέπει να είναι το μ_s ώστε να μην κυλίσει προς τα κάτω; Για μικρότερη τιμή του μ_s, πόση ταχύτητα πρέπει να έχει το όχημα για να διατηρήσει την κυκλική του τροχιά; Πόση είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της ταχύτητας;



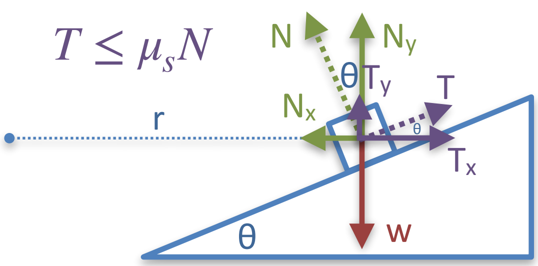
Επειδή το όχημα τείνει να κινηθεί προς τα κάτω, η στατική τριβή έχει φορά προς τα επάνω. Το ίδιο θα συμβεί και για μικρή ταχύτητα κίνησης.

Ισορροπία

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y + T_y = w \Rightarrow N\cos\theta + T_s\sin\theta = mg$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_x = T_x \Rightarrow N\sin\theta = T_s\cos\theta$$

$$T_s \le \mu_s N \Rightarrow N\tan\theta \le \mu_s N \Rightarrow \quad \mu_s \ge \tan\theta$$

$$T \le \mu_s N$$



Κυκλική κίνηση

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y + T_y = w \Rightarrow N\cos\theta + T_s\sin\theta = mg$$
$$\Sigma F_x = ma_r \Rightarrow N_x - T_x = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow N\sin\theta - T_s\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{r}$$

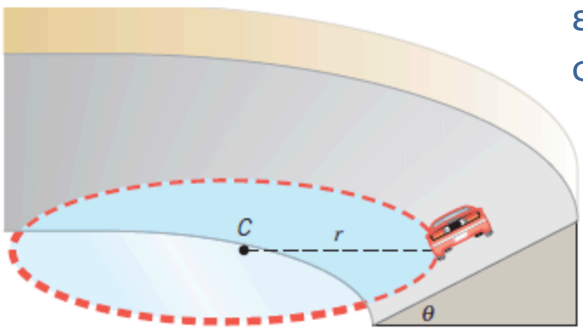
$$T_s = mg\sin\theta - \frac{m\upsilon^2}{r}\cos\theta$$

$$T_s \le \mu_s N \Rightarrow mg\sin\theta - \frac{m\upsilon^2}{r}\cos\theta \le \mu_s\frac{m\upsilon^2}{r}\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{r}(\mu_s\sin\theta + \cos\theta) \ge mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 \ge gr\frac{\tan\theta - \mu_s}{1 + \mu_s\tan\theta}$$

Άσκηση (συνέχεια)

Ένα όχημα βρίσκεται σε κυκλική, στροφή ακτίνας r και κλίσης θ. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του οχήματος και του οδοστρώματος είναι μ_s. Αν το όχημα είναι ακίνητο, πόσο πρέπει να είναι το μ_s ώστε να μην κυλίσει προς τα κάτω; Για μικρότερη τιμή του μ_s, πόση ταχύτητα πρέπει να έχει το όχημα για να διατηρήσει την κυκλική του τροχιά; Πόση είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της ταχύτητας;



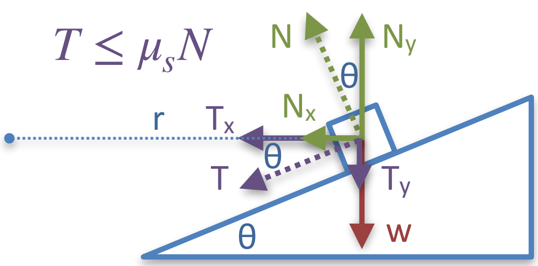
Επειδή το όχημα κινείται με αρκετή ταχύτητα, τείνει να εγκαταλείψει την κυκλική τροχιά, οπότε η στατική τριβή έχει φορά προς τα κάτω.

Κυκλική κίνηση

$$\Sigma F_x = m a_r \Rightarrow N_x + T_x = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow N\sin\theta + T_s\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{r}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y = T_y + w \Rightarrow N\cos\theta = T_s\sin\theta + mg$$

$$T \le \mu_s N$$



$$N = \frac{m\upsilon^2}{r}\sin\theta + mg\cos\theta \qquad T_s = \frac{m\upsilon^2}{r}\cos\theta - mg\sin\theta$$

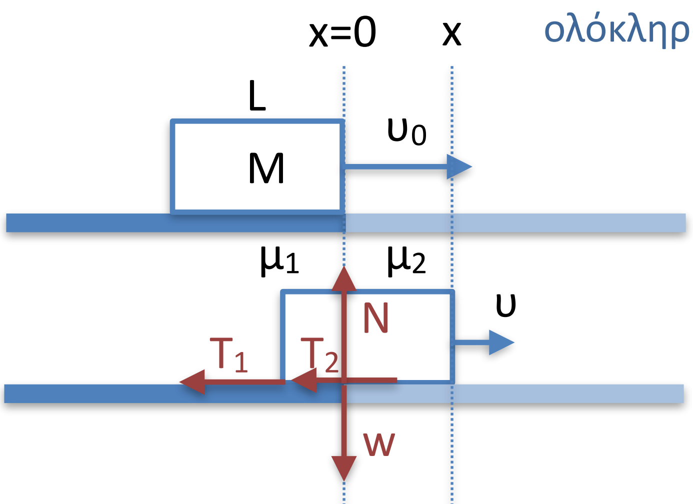
$$T_s \le \mu_s N \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{r}\cos\theta - mg\sin\theta \le \mu_s\frac{m\upsilon^2}{r}\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{m\upsilon^2}{r}\left(\cos\theta - \mu_s\sin\theta\right) \le mg\left(\mu_s\cos\theta + \sin\theta\right) \Rightarrow \quad \upsilon^2 \le gr\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}$$

Άσκηση

Ένα σώμα μήκους *L* και μάζας *M* είναι τοποθετημένο οριζόντια, με το άκρο του να εφάπτεται στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ δύο επιφανειών με συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_1 και μ_2, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν δώσουμε αρχική ταχύτητα υ_0 στο σώμα, να βρείτε πόση απόσταση θα διανύσει μέχρι να σταματήσει.

Αν η ταχύτητα δεν είναι αρκετά μεγάλη, δεν θα προλάβει να εισέλθει ολόκληρο στην περιοχή 2. Οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.



$$\Sigma F_x = Ma \Rightarrow -T_1 - T_2 = M\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\mu_1 g\frac{L-x}{L}M - \mu_2 g\frac{x}{L}M = Mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow$$

$$v\,dv = -\frac{g}{L}\left[\mu_1(L-x) + \mu_2 x\right]dx \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v'dv' = -\frac{g}{L}\int_0^x \left[\mu_1(L-x') + \mu_2 x'\right]dx'$$

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = -\frac{g}{L}\left[\mu_1\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + \mu_2\frac{x^2}{2}\right] \Rightarrow v^2 = v_0^2 - \frac{g}{L}\left[\mu_1\left(2Lx - x^2\right) + \mu_2 x^2\right]$$

$$v(L) = \sqrt{v_0^2 - gL\left(\mu_1 + \mu_2\right)}$$

Θεωρούμε ότι το σώμα αποτελείται από δύο τμήματα, ένα σε κάθε επιφάνεια. Η μάζα κάθε τμήματος είναι ανάλογη του μήκους.

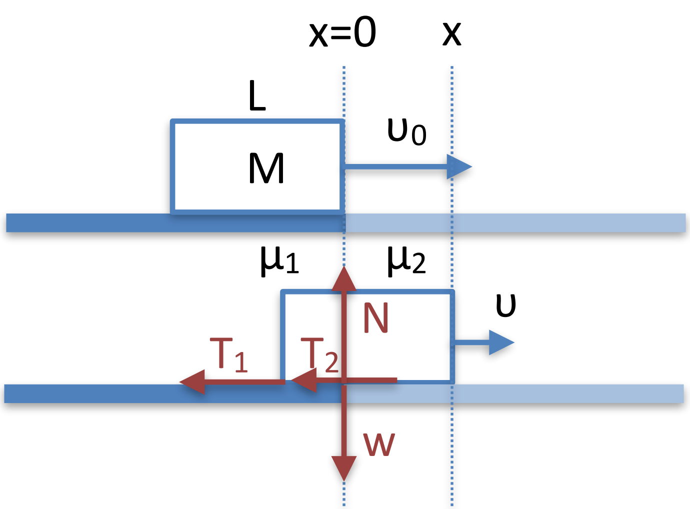
$$m_1 = \frac{L-x}{L}M, \quad m_2 = \frac{x}{L}M$$

Περίπτωση (Α): $v_0^2 < gL(\mu_1 + \mu_2)$ το σώμα διανύει απόσταση S < L.

Περίπτωση (Β): $v_0^2 > gL(\mu_1 + \mu_2)$ το σώμα διανύει απόσταση S > L.

Άσκηση (συνέχεια)

Ένα σώμα μήκους L και μάζας M είναι τοποθετημένο οριζόντια, με το άκρο του να εφάπτεται στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ δύο επιφανειών με συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_1 και μ_2, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν δώσουμε αρχική ταχύτητα υ_0 στο σώμα, να βρείτε πόση απόσταση θα διανύσει μέχρι να σταματήσει.



$$\upsilon^2(x) = \upsilon_0^2 - \frac{g}{L}\left[\mu_1\left(2Lx - x^2\right) + \mu_2 x^2\right], \quad x \leq L$$

Περίπτωση (Α): $\upsilon_0^2 < gL(\mu_1 + \mu_2)$

$$\upsilon(S) = 0 \Rightarrow \upsilon_0^2 - \frac{g}{L}\left[\mu_1\left(2LS - S^2\right) + \mu_2 S^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$g(\mu_2 - \mu_1)S^2 + 2gL\mu_1 S - \upsilon_0^2 L = 0$$

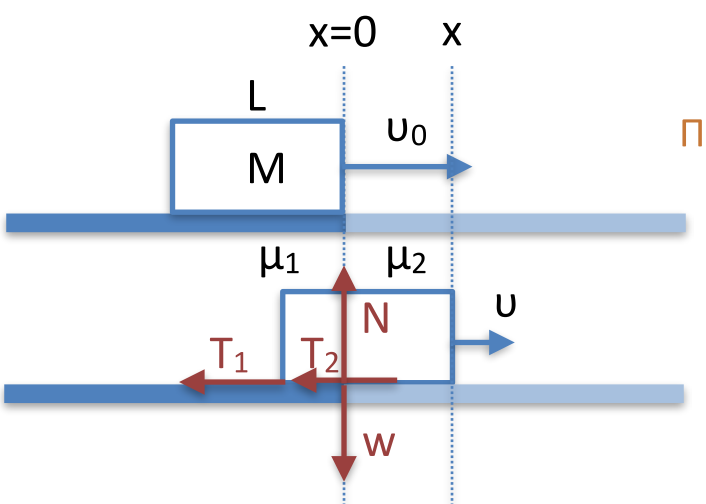
$$\Delta = 4\mu_1^2 g^2 L^2 + 4L\upsilon_0^2 g(\mu_2 - \mu_1) = 4g^2L^2\left[\mu_1^2 + \left(\mu_2 - \mu_1\right)\frac{\upsilon_0^2}{gL}\right]$$

Η άλλη λύση του τριωνύμου είναι αρνητική και απορρίπτεται.

$$S = L\frac{\sqrt{\mu_1^2 + \left(\mu_2 - \mu_1\right)\frac{\upsilon_0^2}{gL}} - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}$$

Άσκηση (συνέχεια)

Ένα σώμα μήκους *L* και μάζας *M* είναι τοποθετημένο οριζόντια, με το άκρο του να εφάπτεται στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ δύο επιφανειών με συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_1 και μ_2, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν δώσουμε αρχική ταχύτητα υ_0 στο σώμα, να βρείτε πόση απόσταση θα διανύσει μέχρι να σταματήσει.



$$\upsilon(L) = \sqrt{\upsilon_0^2 - gL\left(\mu_1 + \mu_2\right)}$$

Περίπτωση (Β): $\upsilon_0^2 > gL(\mu_1 + \mu_2)$

$$\Sigma F_x = Ma \Rightarrow -T_2 = M\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow -\mu_2 g M = M\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon(L)}^{\upsilon} \upsilon' d\upsilon' = -g\mu_2 \int_L^x dx' \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon^2(L) - 2\mu_2 g(x - L) \Rightarrow$$

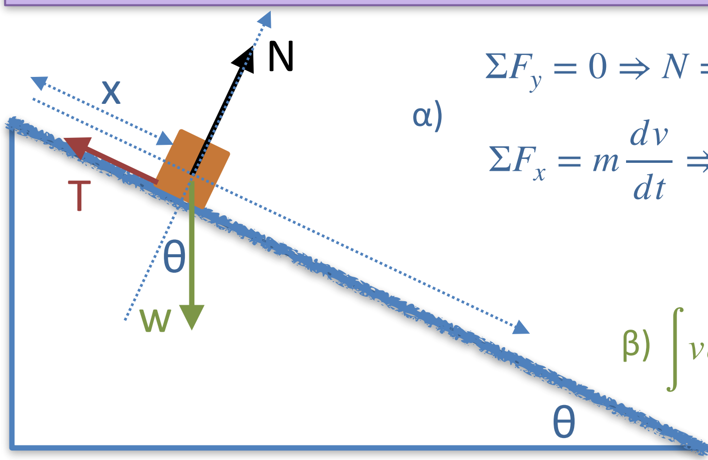
$$\upsilon(x) = \sqrt{\upsilon_0^2 + gL(\mu_2 - \mu_1) - 2\mu_2 g x}, \quad x \geq L$$

$$\upsilon(S) = 0 \Rightarrow S = \frac{\upsilon_0^2 + gL(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_2 g}$$

Εφόσον το σώμα εισέρχεται πλήρως στην περιοχή 2 με ταχύτητα $\upsilon(L)$, θα πρέπει να εξετάσουμε εκ νέου τον 2ο Ν. Newton καθώς αλλάζουν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Άσκηση

Ένα μικρό σώμα μάζας m αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο.
Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση x από το σημείο εκκίνησης, $\mu = \lambda x$ (όπου $\lambda > 0$), κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.
α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του σώματος κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.
β) Ολοκληρώστε τη διαφορική εξίσωση ώστε να υπολογίσετε την ταχύτητα $v = v(x)$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.
γ) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει.
δ) Βρείτε τη θέση όπου μεγιστοποιείται η ταχύτητα καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα.



α)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y = mg\cos\theta$$

$$\Sigma F_x = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow w_x - T = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow mg\sin\theta - \mu N = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$g\sin\theta - \lambda x g\cos\theta = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = g\sin\theta - \lambda x g\cos\theta$$

β)

$$\int v\,dv = \int \left(g\sin\theta - g\lambda x\cos\theta\right)dx \Rightarrow v^2 = 2g\sin\theta x - g\lambda\cos\theta x^2 + C$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \qquad \boxed{v(x) = \sqrt{2g\sin\theta x - g\lambda\cos\theta x^2}}$$

Το σώμα επιταχύνεται αρχικά λόγω του βάρους με ολοένα μικρότερη επιτάχυνση εξαιτίας της αυξανόμενης τριβής. Η μέγιστη ταχύτητα παρατηρείται όταν $a = 0$.

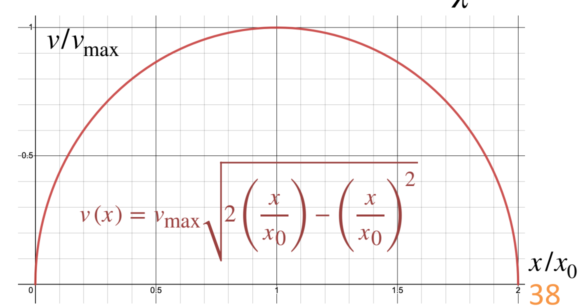
γ)

$$v(S) = 0 \Rightarrow 2g\sin\theta S - g\lambda\cos\theta S^2 = 0 \Rightarrow S = 0 \quad \text{ή} \quad S = \frac{2\tan\theta}{\lambda}$$

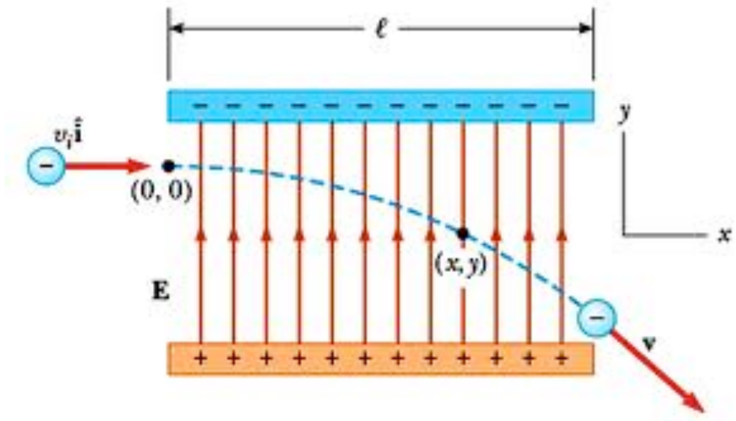
δ)

$$v = \max \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow mg\sin\theta = \lambda x_0 mg\cos\theta \Rightarrow x_0 = \frac{\tan\theta}{\lambda}$$

$$v_{\max} = v(x_0) = \sqrt{2g\sin\theta\frac{\tan\theta}{\lambda} - g\lambda\cos\theta\frac{\tan^2\theta}{\lambda^2}} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{g\sin^2\theta}{\lambda\cos\theta}}$$



Κίνηση σε (ομογενές) ηλεκτρικό πεδίο



- Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο q δίνεται από τη σχέση **F** = q**E**, όπου **E** είναι το ηλεκτρικό πεδίο.
- Αν το πεδίο είναι **ομογενές, E**=σταθ. (π.χ. στο εσωτερικό ενός πυκνωτή), τότε η ηλεκτρική δύναμη είναι σταθερή και η κίνηση είναι μαθηματικά όμοια με μια πλάγια βολή.
- Ένα θετικό φορτίο αποκλίνει προς την κατεύθυνση του **E**, ενώ ένα αρνητικό φορτίο αποκλίνει προς την αντίθετη κατεύθυνση.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\overrightarrow{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E} \Rightarrow a = \frac{|q|E}{m}$$

$$v_x(t) = v_0, \quad v_y(t) = \frac{|q|E}{m}t$$

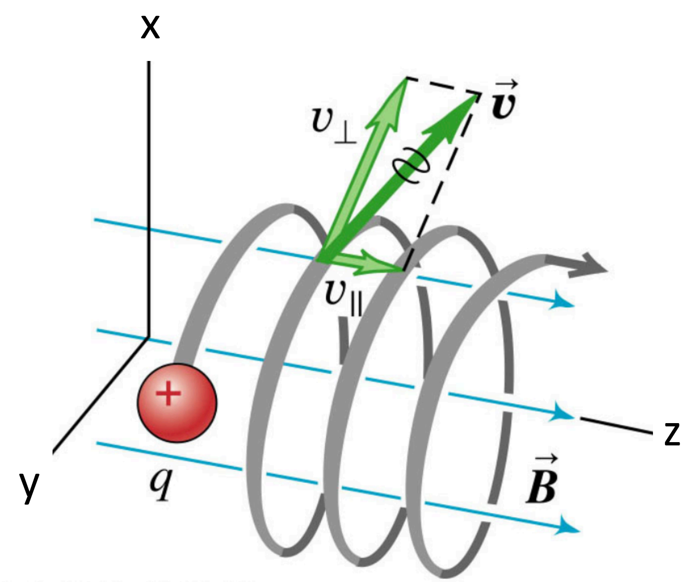
$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = \frac{|q|E}{2m}t^2$$

Κατακόρυφη απόκλιση κατά την έξοδο

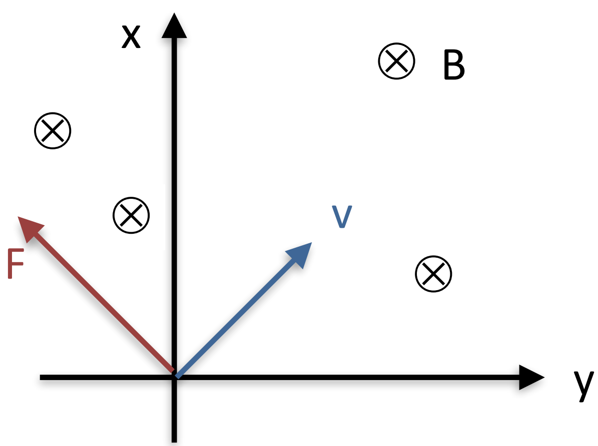
$$x(t_0) = \ell \Rightarrow t_0 = \frac{\ell}{v_0}$$

$$\Delta y = \frac{|q|E\ell^2}{2mv_0^2}$$

Κίνηση σε (ομογενές) μαγνητικό πεδίο



- Η μαγνητική δύναμη ασκείται μόνο σε κινούμενο φορτίο q και δίνεται από τη σχέση **F** = q**υ**×**B**, όπου **B** είναι το μαγνητικό πεδίο.
- Η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη στη επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα των **υ**, **B** και προκαλεί **ελικοειδή** κίνηση.
- Αν το φορτίο κινείται παράλληλα στο πεδίο τότε δεν δέχεται δύναμη.



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qB(v_y\hat{x} - v_x\hat{y})$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = qB(v_y\hat{x} - v_x\hat{y}) \Rightarrow \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} = \frac{qB}{m}(v_y\hat{x} - v_x\hat{y})$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Κίνηση σε (ομογενές) μαγνητικό πεδίο

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v_z \equiv v_{\parallel} = \text{const.}}$$

Κυκλοτρονική συχνότητα: $\boxed{\omega = \dfrac{qB}{m}}$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0}$$

ΔΕ ταλάντωσης!

$$v_x(t) = A\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$$

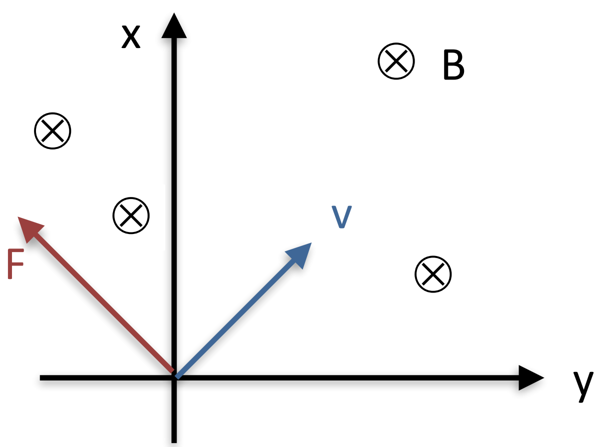
$$v_y(t) = \frac{1}{\omega}\frac{dv_x}{dt} = C\cos(\omega t) - A\sin(\omega t)$$

$$\boxed{\begin{gathered} v_x(0) = v_{x,0} \Rightarrow A = v_{x,0} \\ v_y(0) = v_{y,0} \Rightarrow C = v_{y,0} \end{gathered}}$$

Αρχικές συνθήκες

$$x(t) = -\frac{v_{y,0}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{v_{x,0}}{\omega}\sin(\omega t) + D$$

$$y(t) = \frac{v_{x,0}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{v_{y,0}}{\omega}\sin(\omega t) + F$$



$$\boxed{\begin{gathered} y(0) = 0 \Rightarrow F = -\frac{v_{x,0}}{\omega} \\ x(0) = 0 \Rightarrow D = \frac{v_{y,0}}{\omega} \end{gathered}}$$

Αρχικές συνθήκες

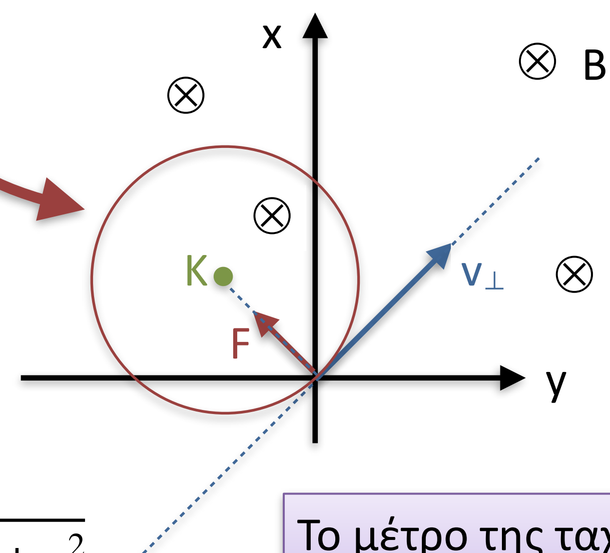
Κίνηση σε (ομογενές) μαγνητικό πεδίο

$$x(t) - \frac{v_{y,0}}{\omega} = -\frac{v_{y,0}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{v_{x,0}}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$y(t) + \frac{v_{x,0}}{\omega} = \frac{v_{x,0}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{v_{y,0}}{\omega}\sin(\omega t)$$

Εξίσωση τροχιάς στο επίπεδο x-y: Κύκλος!

$$\boxed{\left(x - \frac{v_{y,0}}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{v_{x,0}}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2}}{\omega}\right)^2}$$



Κέντρο κύκλου: $K\left(\frac{v_{y,0}}{\omega}, -\frac{v_{x,0}}{\omega}\right)$

Ακτίνα κύκλου: $R = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{mv_\perp}{Bq}$

Εγκάρσια ταχύτητα: $\vec{v}_\perp = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} \Rightarrow v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Το μέτρο της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται