Φυσική Ι
(Μηχανική)

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

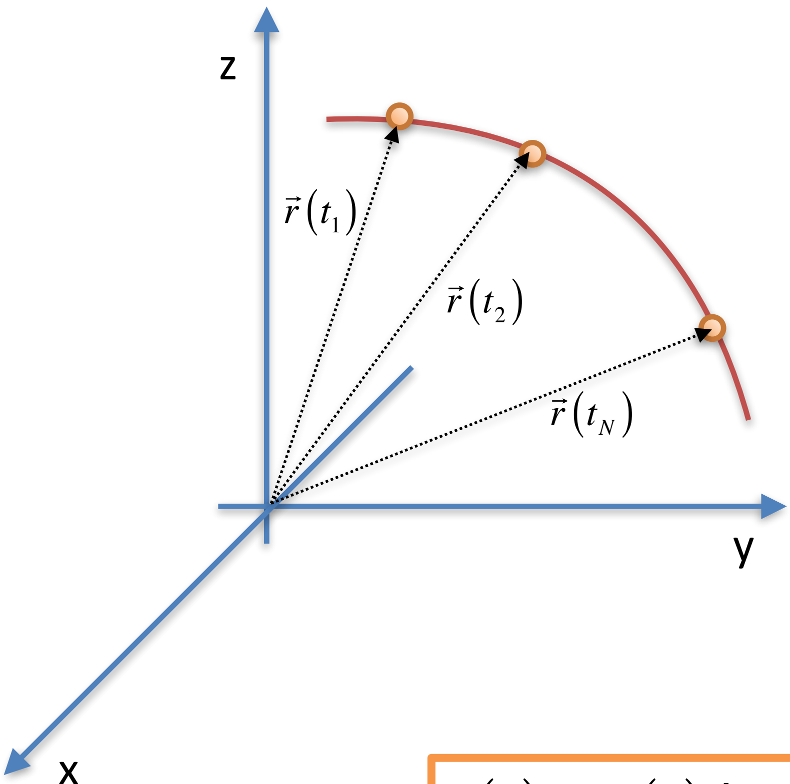
Κωνσταντίνος Κουσουρής
Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Σκοποί

1. μαθηματική περιγραφή της κίνησης ενός σωματιδίου,
2. διάνυσμα θέσης, τροχιά, μήκος
3. ταχύτητα και επιτάχυνση.

Διάνυσμα θέσης & κίνηση

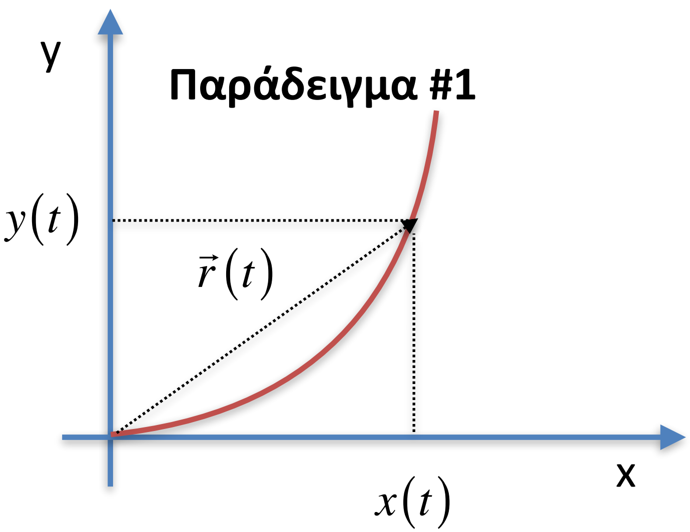


- Η θέση ενός κινητού στον χώρο καθορίζεται από το **<u>διάνυσμα θέσης</u> r(t)**, το οποίο είναι συνάρτηση του χρόνου και ορίζεται ως προς ένα σύστημα αξόνων (σύστημα αναφοράς).
- Η κίνηση περιγράφεται από τις μεταβολές του διανύσματος θέσης.
- Εκτός από το διάνυσμα θέσης, μας ενδιαφέρει η **<u>ταχύτητα</u>** και η **<u>επιτάχυνση</u>**.
- Στην κινηματική εστιάζουμε στα χαρακτηριστικά της κίνησης και όχι στα αίτια που την προκαλούν.

$$\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\hat{x}+y(t)\hat{y}+z(t)\hat{z}=\big(x(t),y(t),z(t)\big)}$$

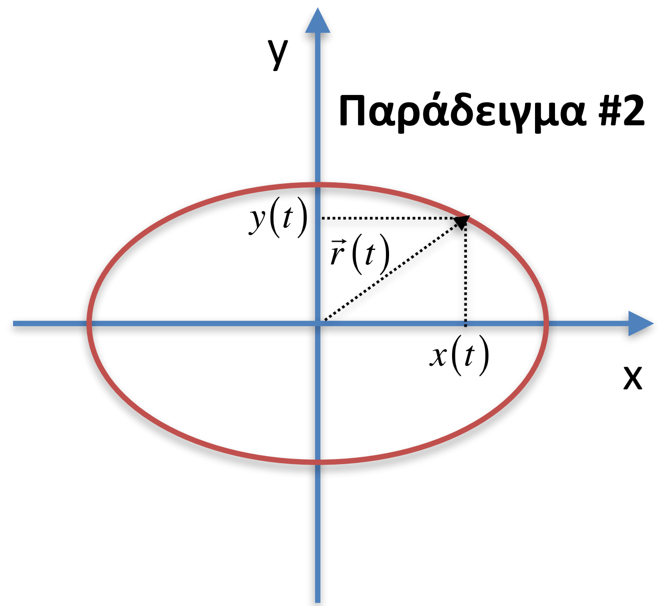
Τροχιά

- Ως **<u>τροχιά</u>** ενός κινητού ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία περνάει αυτό ή, αλλιώς, το σύνολο των σημείων που ορίζει το άκρο του διανύσματος θέσης (το άλλο άκρο είναι πάντα στην αρχή των αξόνων).
- Η τροχιά στις 2 διαστάσεις περιγράφεται μαθηματικά από μια σχέση της μορφής **f(x,y)=0**, **χωρίς ρητή εξάρτηση από τον χρόνο** (π.χ. $y+3x=0$ ή $x^2+y^3=2$, κτλ), οποία ονομάζεται **<u>εξίσωση τροχιάς</u>**.



$$\vec{r}(t)=\left(t,2t^2\right)=t\hat{x}+2t^2\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=t \\ y(t)&=2t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{y(x)=2x^2}$$



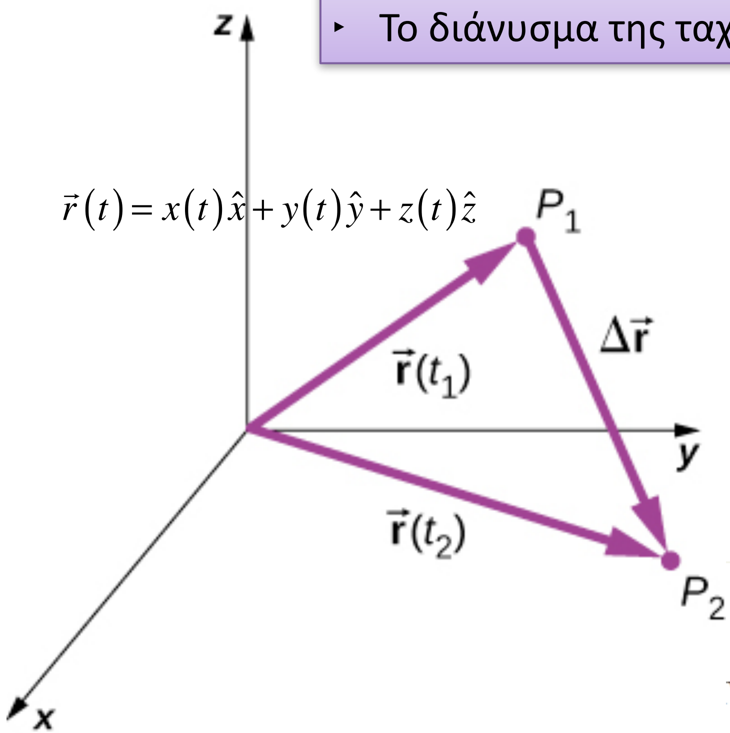
$$\vec{r}(t)=\left(3\cos t,2\sin t\right)=3\cos t\,\hat{x}+2\sin t\,\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=3\cos t \\ y(t)&=2\sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1}$$

Ταχύτητα

- Η **ταχύτητα** είναι ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος θέσης, δηλαδή η παράγωγός του (κάθε συνιστώσα του **r** παραγωγίζεται ανεξάρτητα).
- Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι **πάντα εφαπτόμενο στην τροχιά**.

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{x}+y(t)\hat{y}+z(t)\hat{z}$$



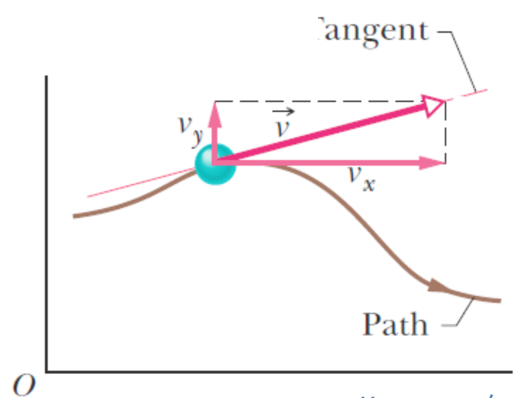
$$\boxed{\vec{\upsilon}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}}=\frac{d}{dt}\left[x(t)\hat{x}+y(t)\hat{y}+z(t)\hat{z}\right]=$$

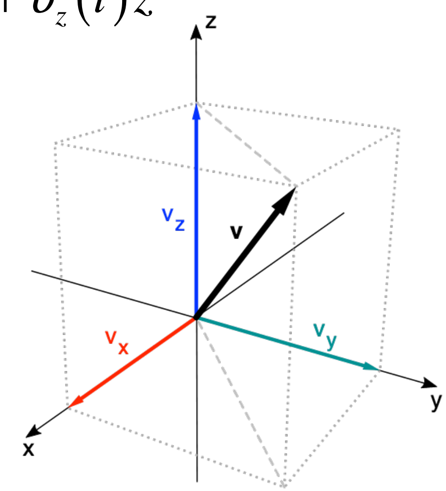
$$=\frac{dx}{dt}\hat{x}+\frac{dy}{dt}\hat{y}+\frac{dz}{dt}\hat{z}$$

$$=\dot{x}(t)\hat{x}+\dot{y}(t)\hat{y}+\dot{z}(t)\hat{z}$$

$$=\upsilon_x(t)\hat{x}+\upsilon_y(t)\hat{y}+\upsilon_z(t)\hat{z}$$

Μία τελεία πάνω από ένα σύμβολο δηλώνει πρώτη παράγωγο ως προς τον χρόνο.





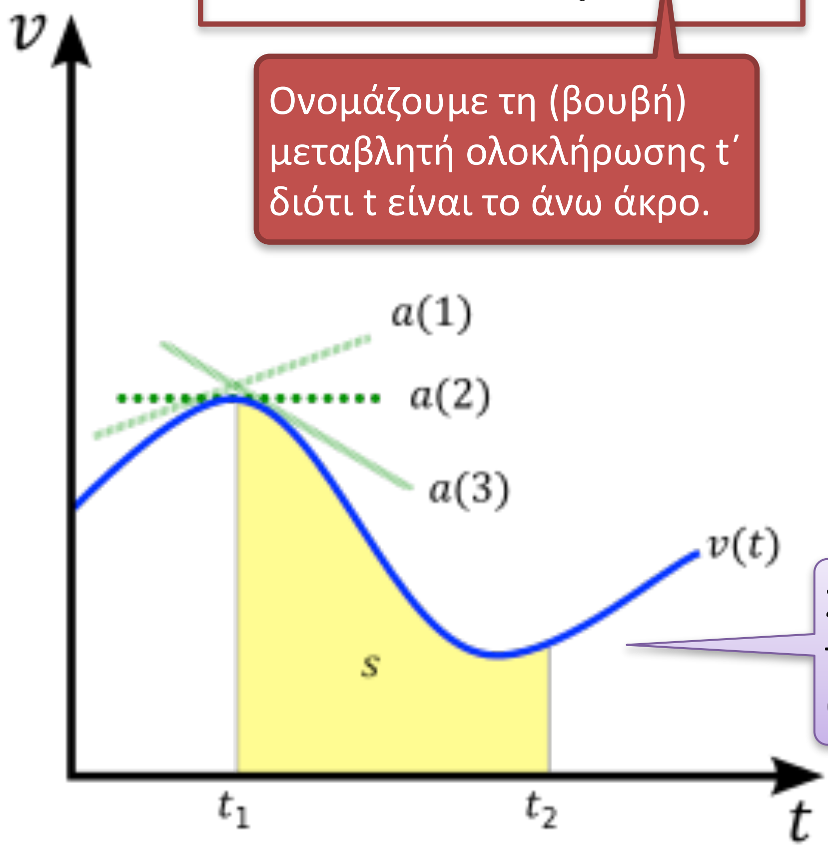
Ταχύτητα & μετατόπιση

Διάνυσμα θέσης τη χρονική στιγμή t_0.

$$\boxed{\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{\upsilon}(t')dt'} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\upsilon_x(t')dt' \\ y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}\upsilon_y(t')dt' \\ z(t)=z(t_0)+\int_{t_0}^{t}\upsilon_z(t')dt' \end{cases}$$

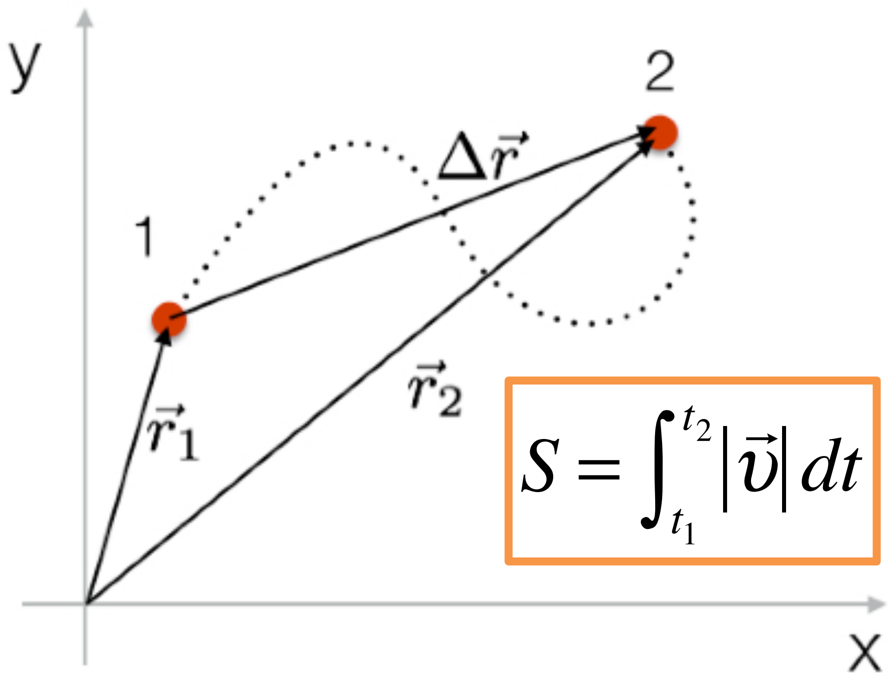
Ονομάζουμε τη (βουβή) μεταβλητή ολοκλήρωσης t′ διότι t είναι το άνω άκρο.

<u>Ανεξαρτησία των κινήσεων:</u> ολοκληρώνουμε σε κάθε άξονα ξεχωριστά.



Σε μια μονοδιάστατη κίνηση η μετατόπιση του κινητού ισούται με το εμβαδόν (**<u>ολοκλήρωμα</u>**!) της ταχύτητας.

Μέση ταχύτητα



$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{\upsilon}|\, dt$$

$$\bar{\vec{\upsilon}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}\, dt = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

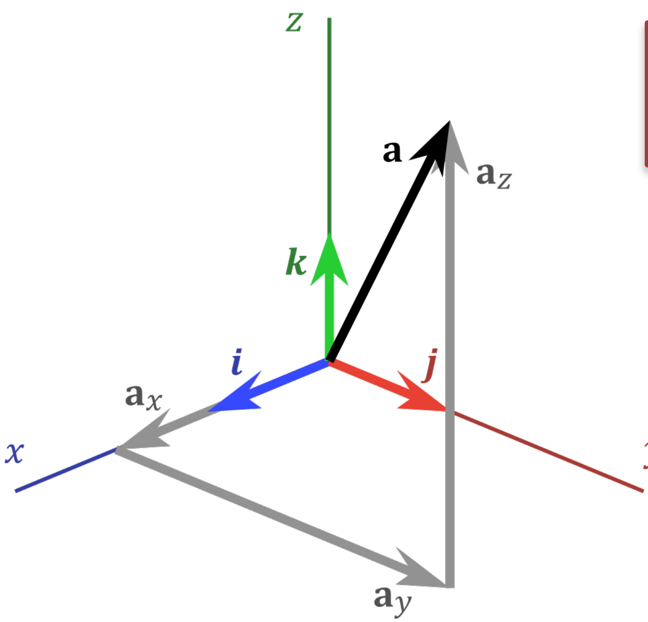
$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |\vec{\upsilon}|\, dt = \frac{S}{\Delta t}$$

$$\bar{\upsilon} \neq \left|\bar{\vec{\upsilon}}\right|$$

- **<u>Μετατόπιση</u>** Δr (διάνυσμα): η διανυσματική διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης του κινητού.
- **<u>Διάστημα</u>**: το μήκος της τροχιάς που έχει διαγράψει το κινητό.
- **<u>Μέση ταχύτητα</u>** (διάνυσμα): η μέση τιμή του διανύσματος της ταχύτητας (υπολογίζεται από τη μετατόπιση).
- **<u>Μέσο μέτρο ταχύτητας</u>**: η μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας (υπολογίζεται από το διάστημα).

Επιτάχυνση

- Η **<u>επιτάχυνση</u>** είναι ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της ταχύτητας, δηλαδή η παράγωγός της (κάθε συνιστώσα της **υ** παραγωγίζεται ανεξάρτητα).
- Η ταχύτητα είναι το ολοκλήρωμα της επιτάχυνσης.
- Η επιτάχυνση είναι η δεύτερη παράγωγος του διανύσματος θέσης.



$$\boxed{\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}(t)}=\frac{d}{dt}\left[\upsilon_x(t)\hat{x}+\upsilon_y(t)\hat{y}+\upsilon_z(t)\hat{z}\right]=$$

$$=\frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{x}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{y}+\frac{d\upsilon_z}{dt}\hat{z}=\dot{\upsilon}_x(t)\hat{x}+\dot{\upsilon}_y(t)\hat{y}+\dot{\upsilon}_z(t)\hat{z}=$$

$$=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{x}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{y}+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{z}=\ddot{x}\hat{x}+\ddot{y}\hat{y}+\ddot{z}\hat{z}=$$

$$=a_x(t)\hat{x}+a_y(t)\hat{y}+a_z(t)\hat{z}$$

Δύο τελείες πάνω από ένα σύμβολο δηλώνουν δεύτερη παράγωγο ως προς τον χρόνο.

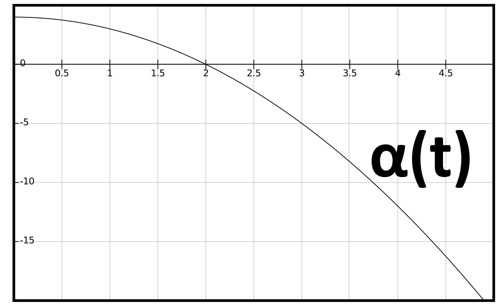
$$\boxed{\vec{\upsilon}(t)=\vec{\upsilon}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')dt'}$$

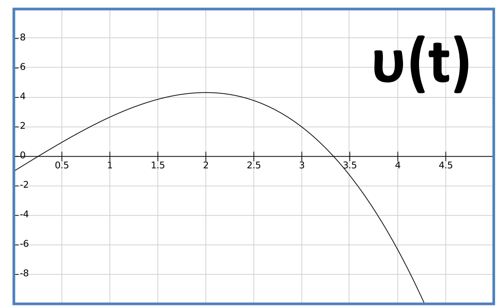
Παράδειγμα #1

Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη σχέση $a(t) = (4 - t^2)$ (SI). Υπολογίστε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου, αν για $t = 3\,\mathrm{s}$ είναι $\upsilon(3) = 2\,\mathrm{m/s}$ και $x(3) = 9\,\mathrm{m}$.

$$\upsilon(t) = \upsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')dt' = \upsilon(3) + \int_{3}^{t}\left(4 - t'^2\right)dt' = 2 + \left[4t' - \frac{t'^3}{3}\right]_3^t =$$

$$= 2 + \left(4t - \frac{t^3}{3}\right) - \left(4\cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) = 2 + 4t - \frac{t^3}{3} - 12 + 9 \Rightarrow \upsilon(t) = -1 + 4t - \frac{t^3}{3}$$

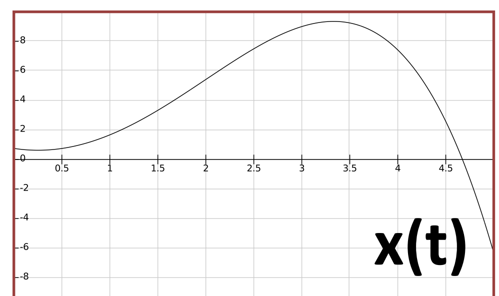




$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \upsilon(t')dt' = x(3) + \int_{3}^{t}\left(-1 + 4t' - \frac{t'^3}{3}\right)dt' = 9 + \left[-t' + 2t'^2 - \frac{t'^4}{12}\right]_3^t =$$

$$= 9 + \left(-t + 2t^2 - \frac{t^4}{12}\right) - \left(-3 + 2\cdot 3^2 - \frac{3^4}{12}\right) = 9 - t + 2t^2 - \frac{t^4}{12} + 3 - 18 + \frac{27}{4} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{3}{4} - t + 2t^2 - \frac{t^4}{12}$$



Παράδειγμα #2α

Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση $\upsilon = kx^{1/2}$, $k > 0$. Αν $x(0) = 0$, να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου. Επίσης, να βρείτε τη μέση ταχύτητά του στο διάστημα μέχρι να φτάσει σε απόσταση S από την αρχή.

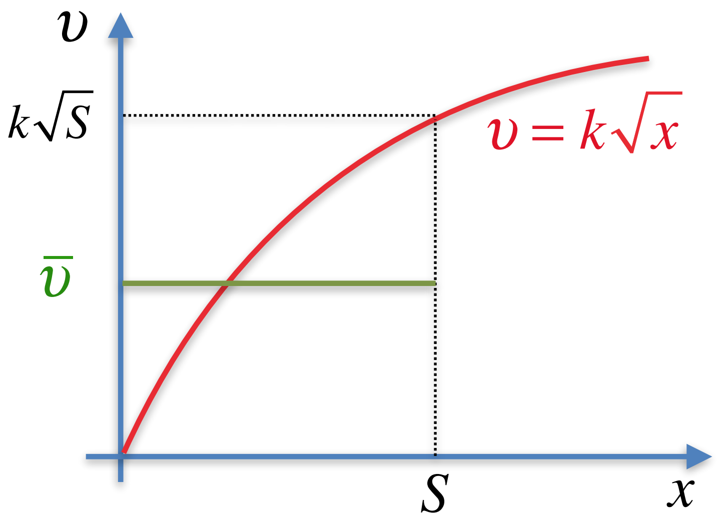
$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = k\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = k\,dt \Rightarrow \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{x'}} = \int_0^t k\,dt' \Rightarrow \left[2\sqrt{x'}\right]_0^x = \left[kt'\right]_0^t$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = kt \Rightarrow x(t) = \frac{k^2}{4}t^2 \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{k^2}{2}t \Rightarrow$$

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow a(t) = \frac{k^2}{2}$$

$$S = x(\tau) \Rightarrow S = \frac{k^2}{4}\tau^2 \Rightarrow \tau = \frac{2}{k}\sqrt{S}$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{S}{\tau} = \frac{k}{2}\frac{S}{\sqrt{S}} \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{k\sqrt{S}}{2}$$



Παράδειγμα #2β

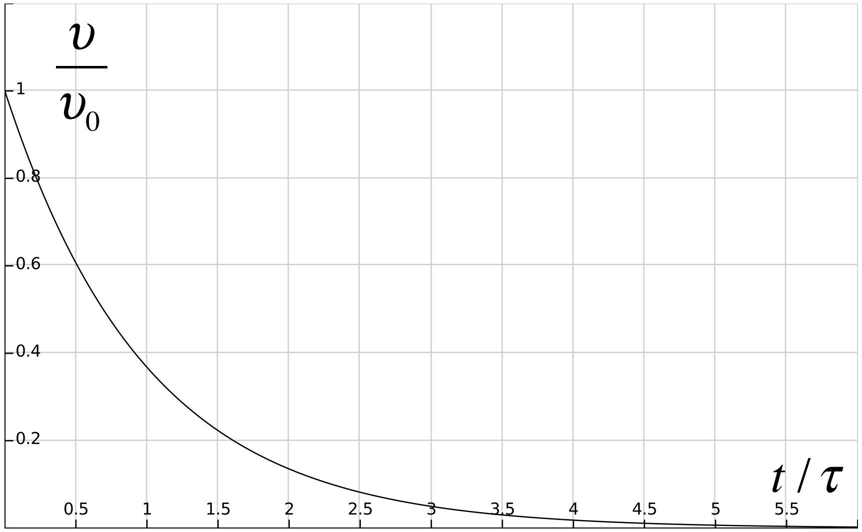
Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση *a = −kυ, k > 0*. Αν *x(0) = 0* και *υ(0) = υ₀*, να βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

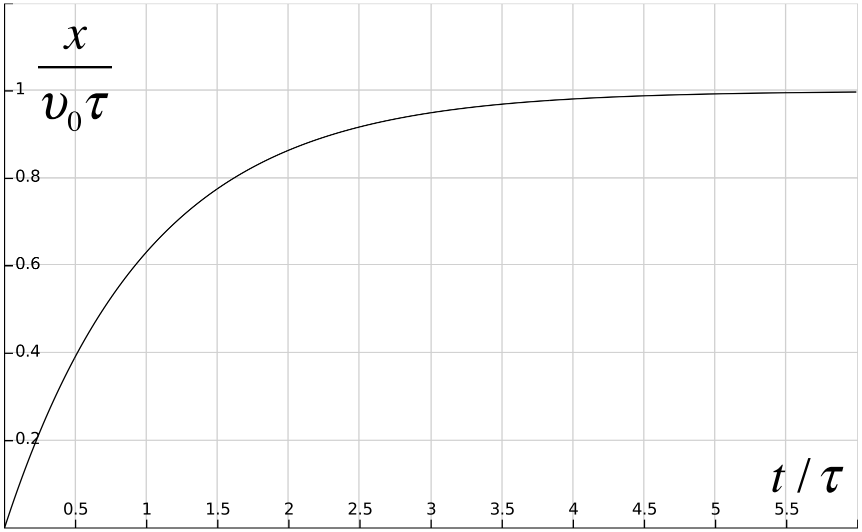
$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=-k\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon}=-k\,dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'}=-k\int_0^t dt' \Rightarrow \ln\upsilon-\ln\upsilon_0=-kt \Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_0}=e^{-kt} \Rightarrow \upsilon(t)=\upsilon_0 e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{\tau=\frac{1}{k}}$$

$$x(t)=x(0)+\int_0^t \upsilon(t')\,dt'=0+\int_0^t \upsilon_0 e^{-t'/\tau}\,dt'=\left[\upsilon_0\tau e^{-t'/\tau}\right]_0^t \Rightarrow x(t)=\upsilon_0\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$





Παράδειγμα #2β

Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση $a = -k\upsilon$, $k > 0$. Αν $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$, να βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

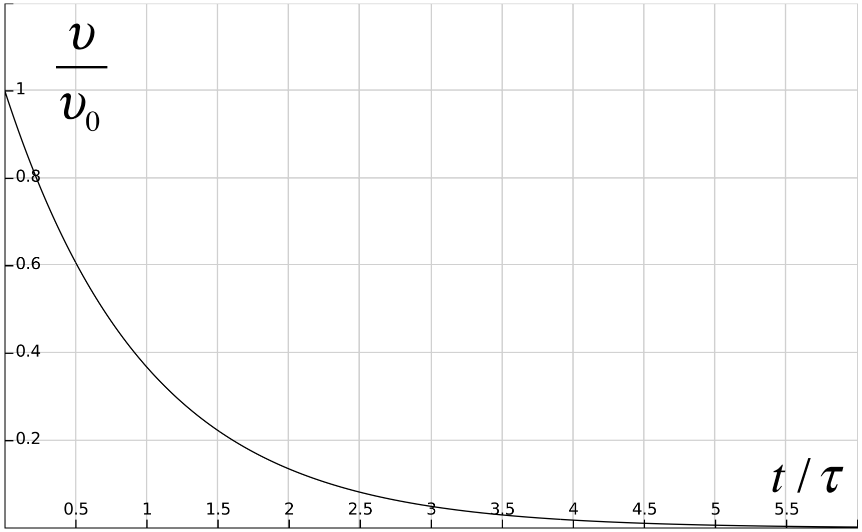
$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -k\,dt \Rightarrow \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -k\int dt \Rightarrow \ln|\upsilon| = -kt + c \Rightarrow |\upsilon| = e^{c}e^{-kt} \Rightarrow$$

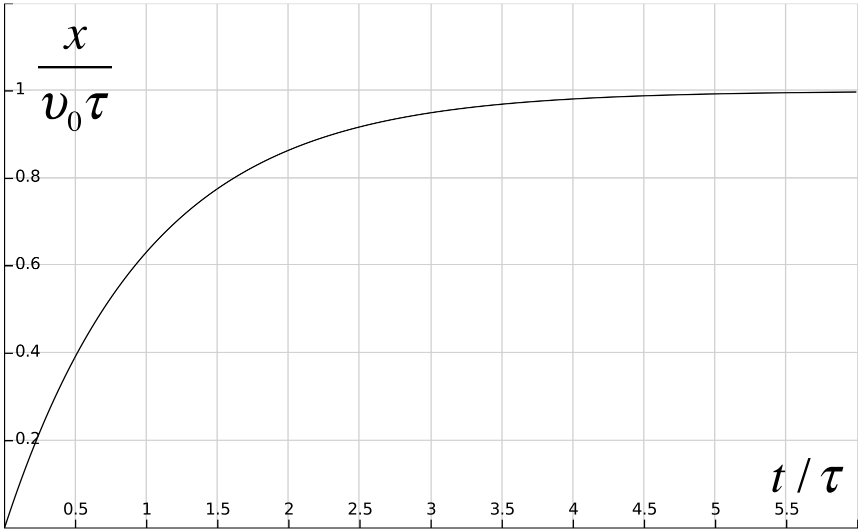
$$\underset{c_1=\pm e^{c}}{\Rightarrow} \upsilon(t) = c_1 e^{-kt} \underset{\substack{\upsilon(0)=c_1=\upsilon_0 \\ k=1/\tau}}{\Rightarrow} \upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{k}}$$

Εναλλακτική μέθοδος επίλυσης με αόριστο ολοκλήρωμα.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \upsilon(t')\,dt' = 0 + \int_0^t \upsilon_0 e^{-t'/\tau}\,dt' = \left[\upsilon_0 \tau e^{-t'/\tau}\right]_0^t \Rightarrow x(t) = \upsilon_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$





Παράδειγμα #2γ

Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση $a = -kx$, $k > 0$. Αν $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$, να βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

$$a = -kx \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -kx \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = -kx \Rightarrow \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = -kx \Rightarrow \upsilon d\upsilon = -kxdx \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon' d\upsilon' = -\int_0^x kx'dx' \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\upsilon'^2\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -k\left[\frac{x'^2}{2}\right]_0^x \Rightarrow \upsilon^2 - \upsilon_0^2 = -kx^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 - kx^2 \Rightarrow \upsilon(x) = \pm\sqrt{\upsilon_0^2 - kx^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\upsilon_0^2 - kx^2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{k} - x^2}} = \pm\sqrt{k}dt \Rightarrow \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{\upsilon_0^2}{k} - x'^2}} = \pm\sqrt{k}\int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{k}x'}{\upsilon_0}\right)\right]_0^x = \pm\sqrt{k}t \Rightarrow \arcsin\left(\frac{\sqrt{k}x}{\upsilon_0}\right) - \arcsin 0 = \pm\sqrt{k}t \Rightarrow \frac{\sqrt{k}x}{\upsilon_0} = \pm\sin\left(\sqrt{k}t\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \pm\frac{\upsilon_0}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}t\right) \\ \upsilon(t) &= \pm\upsilon_0\cos\left(\sqrt{k}t\right) \end{aligned}\right\} \underset{\upsilon(0)=\upsilon_0}{\Rightarrow} \left\{\begin{aligned} x(t) &= \frac{\upsilon_0}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}t\right) \\ \upsilon(t) &= \upsilon_0\cos\left(\sqrt{k}t\right) \\ a(t) &= -\upsilon_0\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}t\right) \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c}$$

Παράδειγμα #3

Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου στο επίπεδο x-y είναι $\vec{r}(t) = t^2\hat{x} - 2t^3\hat{y}$ (SI). Να βρείτε: α) την εξίσωση της τροχιάς του, β) την ταχύτητα και την επιτάχυνση, γ) τη γωνία μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης.

$$\vec{r}(t) = t^2\hat{x} - 2t^3\hat{y} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x(t) = t^2 \\ y(t) = -2t^3 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = -2x^{3/2}$$

απαλοιφή του χρόνου

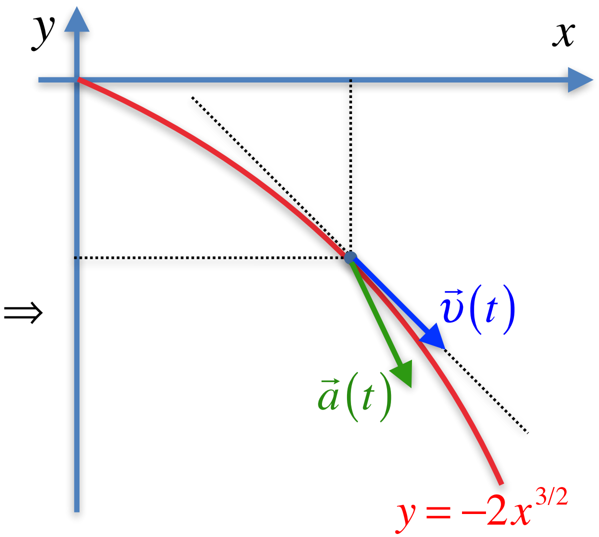
$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{\upsilon}(t) = 2t\hat{x} - 6t^2\hat{y} \Rightarrow \upsilon(t) = \left|\vec{\upsilon}(t)\right| = \sqrt{4t^2 + 36t^4}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \vec{a}(t) = 2\hat{x} - 12t\hat{y} \Rightarrow a(t) = \left|\vec{a}(t)\right| = \sqrt{4 + 144t^2}$$

$$\left(\widehat{\vec{\upsilon}(t), \vec{a}(t)}\right) = \varphi(t) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{\upsilon}(t)\cdot\vec{a}(t)}{\upsilon(t)a(t)} = \frac{\left(2t\hat{x} - 6t^2\hat{y}\right)\cdot\left(2\hat{x} - 12t\hat{y}\right)}{\sqrt{4t^2 + 36t^4}\cdot\sqrt{4 + 144t^2}} \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{4t + 72t^3}{\sqrt{4t^2 + 36t^4}\cdot\sqrt{4 + 144t^2}}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\cos\varphi(t)\right) = 1 \Rightarrow \varphi \to 0$$



Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης θα είναι παράλληλα.

Παράδειγμα #4

Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο x-y με ταχύτητες $\upsilon_x = 4t^3 + 4t$, $\upsilon_y = 4t$ (SI). Αν για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο *(1, 2) m*, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_x &= 4t^3 + 4t \\ \upsilon_y &= 4t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\upsilon}(t) = \left(4t^3 + 4t\right)\hat{x} + 4t\,\hat{y}$$

Πρώτα βρίσκουμε το διάνυσμα θέσης με ολοκλήρωση της ταχύτητας.

$$\vec{r}(0) = (1,2) \Rightarrow \vec{r}(0) = \hat{x} + 2\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt' = (\hat{x} + 2\hat{y}) + \int_0^t \left[\left(4t'^3 + 4t'\right)\hat{x} + 4t'\hat{y}\right]dt'$$

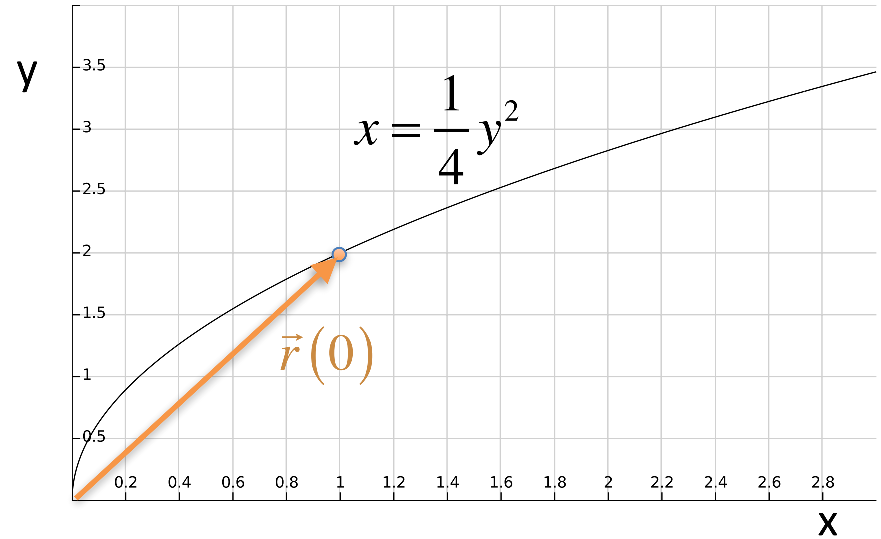
$$= (\hat{x} + 2\hat{y}) + \left[\int_0^t \left(4t'^3 + 4t'\right)dt'\right]\hat{x} + \left(\int_0^t 4t'\,dt'\right)\hat{y} =$$

$$= (\hat{x} + 2\hat{y}) + \left[t'^4 + 2t'^2\right]_0^t \hat{x} + \left[2t'^2\right]_0^t \hat{y} \Rightarrow$$

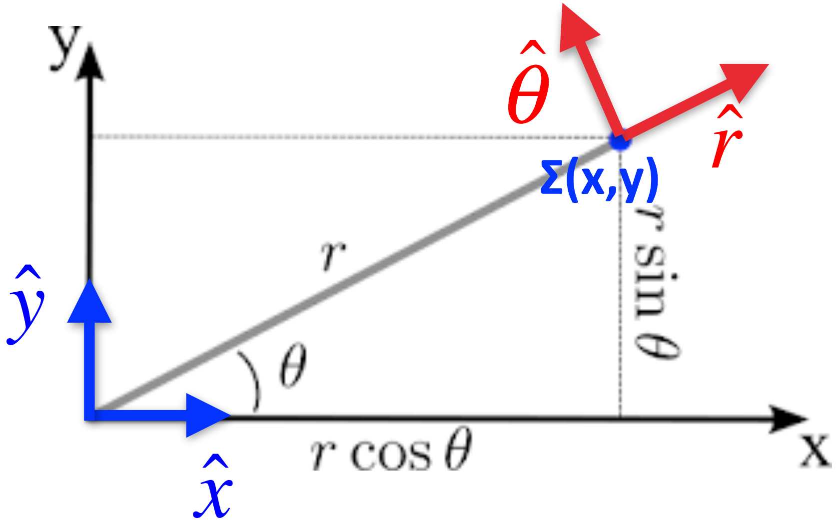
$$\vec{r}(t) = \left(1 + t^4 + 2t^2\right)\hat{x} + \left(2 + 2t^2\right)\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 1 + t^4 + 2t^2 = \left(1 + t^2\right)^2 \\ y(t) &= 2 + 2t^2 = 2\left(1 + t^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2$$

Κατόπιν απαλείφουμε τον χρόνο.



Ταχύτητα & επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες



$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{r}\right) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} =$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \Rightarrow$$

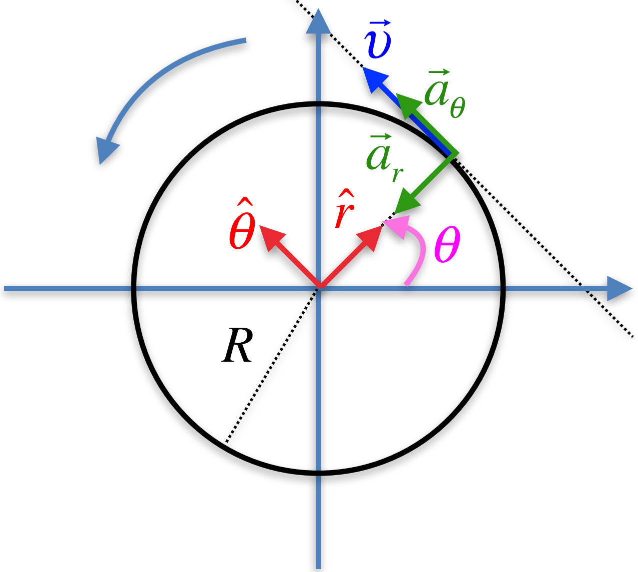
$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}}$$

Προσοχή: τα μοναδιαία διανύσματα στο πολικό σύστημα εξαρτώνται από τον χρόνο !!!
Όχι όμως τα μοναδιαία του καρτεσιανού συστήματος.

$$\left.\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \frac{d}{dt}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})\frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})\dot{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \frac{d}{dt}(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) = \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})\frac{d\theta}{dt} = (-\cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{y})\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\hat{r} \end{aligned}\right\}$$

Κυκλική κίνηση

$$\boxed{r = R = const.}$$



$$\vec{r} = R\hat{r} \Rightarrow r = R \Rightarrow \dot{r} = 0$$

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \vec{\upsilon} = R\dot{\theta}\hat{\theta} = \omega R\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

Γωνιακή ταχύτητα

$$\boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}}$$

Γωνιακή επιτάχυνση

$$\boxed{a_\gamma = \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}}$$

Γραμμική ταχύτητα

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \omega R\hat{\theta}}$$

Επιτάχυνση

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_r &= -R\omega^2\hat{r} \\ \vec{a}_\theta &= R\ddot{\theta}\hat{\theta} \\ \vec{a} &= \vec{a}_r + \vec{a}_\theta \end{aligned}}$$

- Ο ακτινικός άξονας ταυτίζεται με τον κεντρομόλο και ο γωνιακός με τον επιτρόχιο.
- Η γωνιακή ταχύτητα εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας.
- Η ταχύτητα δεν έχει ακτινική συνιστώσα.
- Η γωνιακή συνιστώσα της ταχύτητας είναι πάντα μη μηδενική αλλά μπορεί να μεταβάλλεται.
- Η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης έχει πάντα φορά προς το κέντρο.
- Η γωνιακή συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι μηδέν για ομαλή κυκλική κίνηση (ω = σταθερό).

Παράδειγμα #5

Ένα σωματίδιο ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται σε ένα επίπεδο με σταθερή ακτινική ταχύτητα $\upsilon_r = 4\ m/s$. Η γωνιακή του ταχύτητα είναι επίσης σταθερή και ίση με $\omega = 2\ rad/s$. Να βρείτε τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σωματιδίου όταν θα έχει φτάσει σε απόσταση 2.$1\ m$ από την αρχή των αξόνων.

$$\upsilon_r = \dot{r} = 4\frac{m}{s} \Rightarrow r(t) = r(0) + \int_0^t 4\,dt' \Rightarrow r(t) = 4t\ (\mathrm{SI})$$

$$\omega = \dot{\theta} = 2\frac{rad}{s} \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) + \int_0^t 2\,dt' \Rightarrow \theta(t) = 2t\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r} = 4t\hat{r}, \quad r(\theta) = 2\theta\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = 4\hat{r} + (4t)2\hat{\theta} \Rightarrow \vec{\upsilon} = 4\hat{r} + 8t\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} = \left(0 - 4t\cdot 2^2\right)\hat{r} + (0 + 2\cdot 4\cdot 2)\hat{\theta}$$

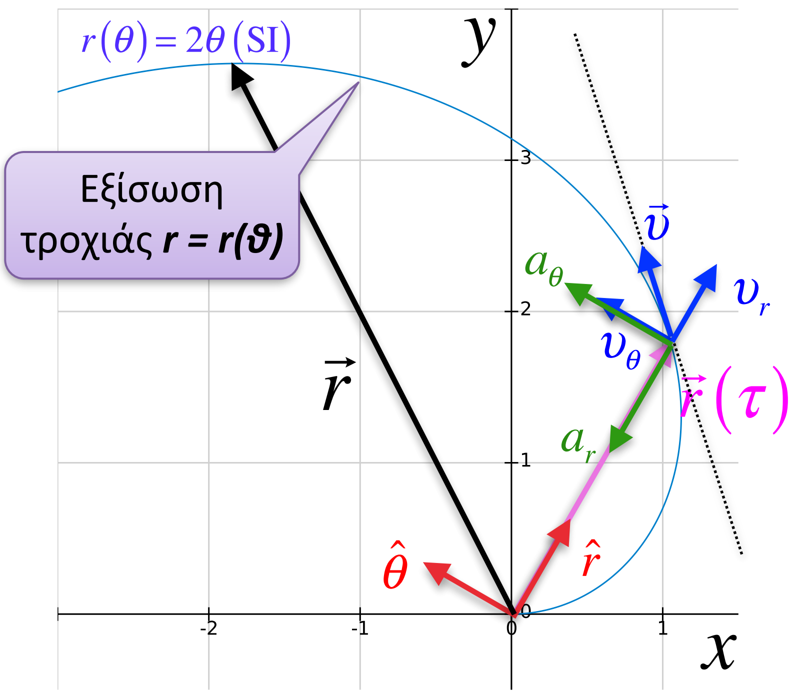
$$\Rightarrow \vec{a} = -16t\hat{r} + 16\hat{\theta}$$

$$r(\tau) = 2.1\mathrm{m} \Rightarrow 4\tau = 2.1 \Rightarrow \tau = 0.525\ \mathrm{s}$$

$$\theta(\tau) = 2\tau \Rightarrow \theta(\tau) = 1.05\ \mathrm{rad}\ \left(\approx 60^0\right)$$

$$\vec{\upsilon}(\tau) = 4\hat{r} + 8\cdot 0.525\hat{\theta} \Rightarrow \vec{\upsilon}(\tau) = 4\hat{r} + 4.2\,\hat{\theta}\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{a}(\tau) = -16\cdot 0.525\hat{r} + 16\hat{\theta} \Rightarrow \vec{a}(\tau) = -8.4\hat{r} + 16\,\hat{\theta}\ \frac{m}{s^2}$$



Παράδειγμα #6

Ένα σωματίδιο κινείται διαγράφοντας σπειροειδή τροχιά με κατεύθυνση προς τα έξω. Η εξίσωση της τροχιάς δίνεται από τη σχέση *r(ϑ) = ϑ/π* (SI). Η γωνία αυξάνεται με τον χρόνο ως *ϑ(t) = πt*^{2} (SI). Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου.

$$r(t)=r\left(\theta(t)\right)=\frac{\theta(t)}{\pi}=t^2$$

$$\dot r(t)=t,\quad \ddot r(t)=1$$

$$\theta(t)=\pi t^2,\quad \omega=\dot\theta(t)=2\pi t,\quad \ddot\theta(t)=2\pi$$

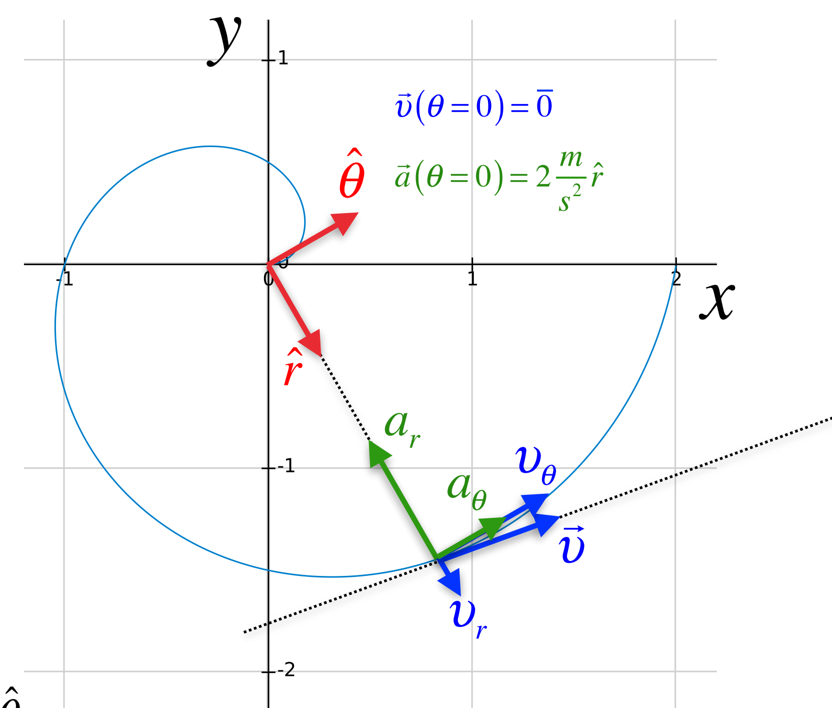
$$\vec\upsilon=\dot r\hat r+r\dot\theta\hat\theta=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\hat r+r\frac{d\theta}{dt}\hat\theta=2t\hat r+t^2 2\pi t\hat\theta\Rightarrow$$

$$\vec\upsilon(t)=2t\hat r+4\pi t^3\hat\theta\Rightarrow\vec\upsilon(\theta)=2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\hat r+2\pi\left(\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\right)^3\hat\theta$$

$$\vec a=\left(\ddot r-r\dot\theta^2\right)\hat r+\left(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta\right)\hat\theta=$$

$$=\left(2-t^2 4\pi^2 t^2\right)\hat r+\left(2\pi t^2+2\cdot 2\pi t 2\pi t\right)\hat\theta\Rightarrow$$

$$\vec a(t)=\left(2-4\pi^2 t^4\right)\hat r+10\pi t^2\hat\theta\Rightarrow\vec a(\theta)=2\left(1-2\theta^2\right)\hat r+10\theta\hat\theta$$



$$\vec\upsilon\left(\theta=\frac{5\pi}{3}\right)\approx 2.6\frac{m}{s}\hat r+13.5\frac{m}{s}\hat\theta$$

$$\vec a\left(\theta=\frac{5\pi}{3}\right)\approx -107.8\frac{m}{s^2}\hat r+52.4\frac{m}{s^2}\hat\theta$$

Παράδειγμα #7

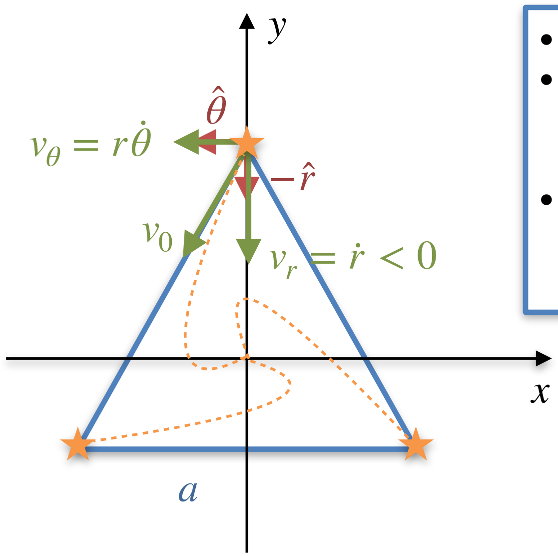
Τρεις μέλισσες βρίσκονται στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά a. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινάνε ταυτόχρονα και οι τρεις με ταχύτητα ίδιου μέτρου v_0, έτσι ώστε η καθεμία να κατευθύνεται προς την επόμενη (αριστερόστροφα). Στη συνέχεια διατηρούν το μέτρο της ταχύτητάς τους, αλλά μεταβάλλουν τον προσανατολισμό τους έτσι ώστε, σε κάθε χρονική στιγμή, να εξακολουθεί η καθεμία να κατευθύνεται προς την επόμενη (αριστερόστροφα).

α) Εξηγήστε γιατί η ταχύτητα της καθεμίας, αν γραφεί σε πολικές συντεταγμένες, έχει σταθερές προβολές στα τοπικά μοναδιαία διανύσματα.

β) Από τη σχέση που προκύπτει από το ερώτημα α) να απαλείψετε τον χρόνο και να υπολογίσετε την εξίσωση τροχιάς $r = r(\theta)$ καθεμίας σε πολικές συντεταγμένες.

γ) Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα του α) με την σταθερότητα του μέτρου της ταχύτητας, ολοκληρώστε την κατάλληλη διαφορική εξίσωση και υπολογίστε τη συνάρτηση $r = r(t)$.

δ) Υπολογίστε τη συνολική διάρκεια της κίνησης μέχρι να συναντηθούν και οι τρεις στο κέντρο βάρους του τριγώνου.



- Τοποθετούμε την αρχή των αξόνων στο βαρύκεντρο του τριγώνου.
- Επειδή οι μέλισσες κινούνται με την ίδια (σταθερή) ταχύτητα, κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με την ταχύτητα να κατευθύνεται στη θέση της επόμενης (από αριστερά) μέλισσας.
- Οι συνιστώσες της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες σχηματίζουν σταθερή γωνία με τη συνολική ταχύτητα. Από τη γεωμετρία του ισόπλευρου τριγώνου, η γωνία μεταξύ της ταχύτητας και της v_r είναι πάντα 30^o.

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} = (-\dot{r})(-\hat{r}) + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Παράδειγμα #7 (συνέχεια)

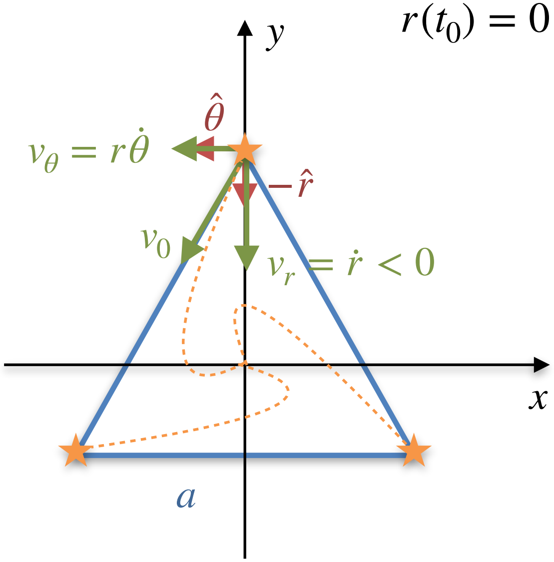
$$\frac{|v_\theta|}{|v_r|} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}r\dot{\theta} = -\dot{r} \Rightarrow \sqrt{3}rd\theta = -dr \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\sqrt{3}d\theta$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'} = -\sqrt{3}\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta' \Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\sqrt{3}\left(\theta-\theta_0\right) \Rightarrow \boxed{r(\theta) = r_0 e^{-\sqrt{3}(\theta-\theta_0)}}$$

$$\frac{|v_r|}{v_0} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow -\dot{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \Rightarrow \boxed{r(t) = r_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t}$$

$$r(t_0) = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{2r_0}{\sqrt{3}v_0} \Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{2a}{3v_0}}$$

χρόνος κίνησης



	r_0	θ_0 (rad)
Μέλισσα #1	$a/\sqrt{3}$	$\pi/2$
Μέλισσα #2	$a/\sqrt{3}$	$7\pi/6$
Μέλισσα #3	$a/\sqrt{3}$	$11\pi/6$