Φυσική Ι
(Μηχανική)

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

Κωνσταντίνος Κουσουρής
Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

Ενότητα #1

Χρήσιμες πληροφορίες

- **Διδάσκοντες**
  - **<u>Μ. Κόκκορης</u>**, Καθηγητής (Πειραματική Πυρηνική Φυσική), kokkoris@central.ntua.gr, Γρ. 216, Κτ. Φυσικής, 2107723029
  - **<u>Κ. Κουσουρής</u>**, Αν. Καθηγητής (Πειραματική Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων), kkousour@central.ntua.gr, Γρ. 209, Κτ. Φυσικής, 2107724447

- Υπεύθυνη Εργαστηρίων
  - **<u>Α. Δημακοπούλου</u>**, ΕΔΙΠ,aldim@central.ntua.gr, aldimakop@gmail.com, τηλ. 2107723030
- **Ιστοσελίδα μαθήματος (κωδικός: 9004)**

“Φυσική Ι (Μηχανική) και Εργαστήριο”

https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=1346

Εδώ θα βρίσκετε το υλικό του μαθήματος και όλες τις σχετικές πληροφορίες. **<u>Πρέπει να εγγραφείτε ώστε να λαμβάνετε τα μηνύματα των διδασκόντων.</u>**

Πρόγραμμα μαθημάτων

- Δευτέρα 12:45 - 14:30
  - Εργαστηριακή εξάσκηση (περισσότερες πληροφορίες σε ειδικό μάθημα).
  - Αναπλήρωση παραδόσεων (αν χρειαστεί)
- Τετάρτη 10:45 - 13:30 (Παραδόσεις)
- Πέμπτη 10:45 - 12:30 (Παραδόσεις)

Επισκόπηση - ύλη μαθήματος - αξιολόγηση

- ❑ Κινηματική υλικού σημείου
- ❑ Δυναμική - Νόμοι Newton
- ❑ Συστήματα αναφοράς
- ❑ Ειδική θεωρία σχετικότητας
- ❑ Έργο - Ενέργεια
- ❑ Ταλαντώσεις
- ❑ Συστήματα σωματιδίων
- ❑ Δυναμική στερεού σώματος

Το μάθημα περιλαμβάνει 5 ώρες/εβδομάδα παραδόσεις και υποχρεωτική εργαστηριακή άσκηση. Ο τελικός βαθμός (Β) προκύπτει από τον τύπο

Β=0.8*Γ+0.2*Ε

όπου (Γ) είναι ο βαθμός της γραπτής εξέτασης και (Ε) είναι ο βαθμός του εργαστηρίου.

- **Αν Γ < 3, τότε Β = Γ, ανεξάρτητα από το Ε**
- **<u>Για φοιτητές μεγαλύτερων ετών υπολογίζεται μόνο ο βαθμός της γραπτής εξέτασης</u>**.

Βιβλιογραφία

- *Φυσική: Βασικές Αρχές, [102075353],* **Halliday David, Resnick Robert, Walker Jearl** — **ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ**

- *Εισαγωγή στη Μηχανική, [77108691],* **D. Kleppner, R. Kolenkow** — **ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ**

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΙΛΟΓΕΣ

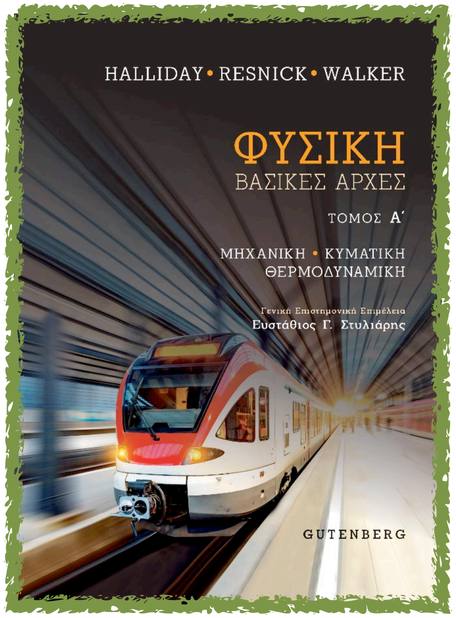
1. *Εισαγωγή στη Νευτώνεια Μηχανική, [86057374]*, **Κ. Φαράκος**
2. *Πανεπιστημιακή Φυσική, [86198097]*, **H. Young, R. Freedman**
3. *Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς, [18549052]*, **Giancoli**
4. *Κλασική Δυναμική Σωματιδίων και Συστημάτων, [94644129],* **S. Thornton, J. Marion**
5. *ΜΗΧΑΝΙΚΗ, [32761],* **C. Kittel et al**

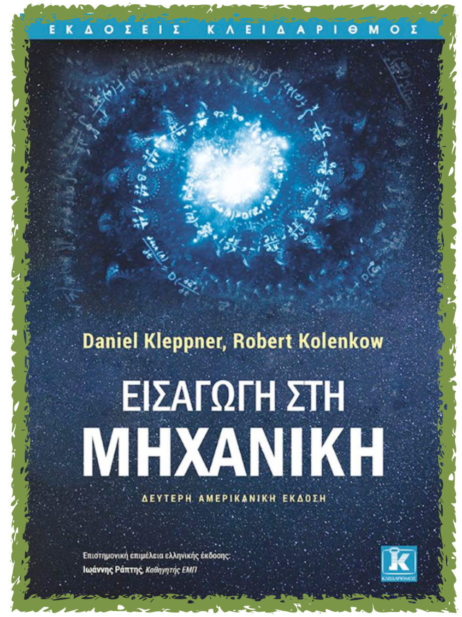
Εύδοξος

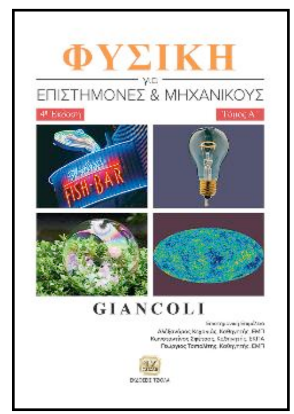
(επιλογή συγγραμμάτων)

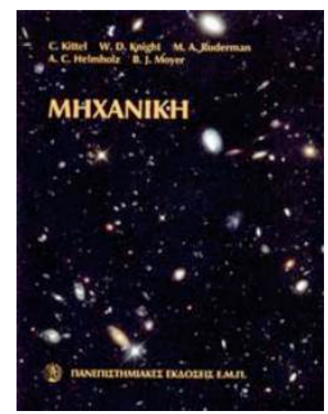
https://service.eudoxus.gr/public/departments/courses/1497/2024

Βιβλιογραφία (συνέχεια)









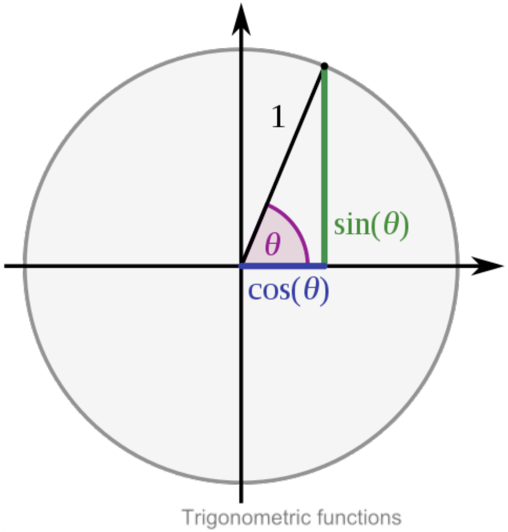
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοποί

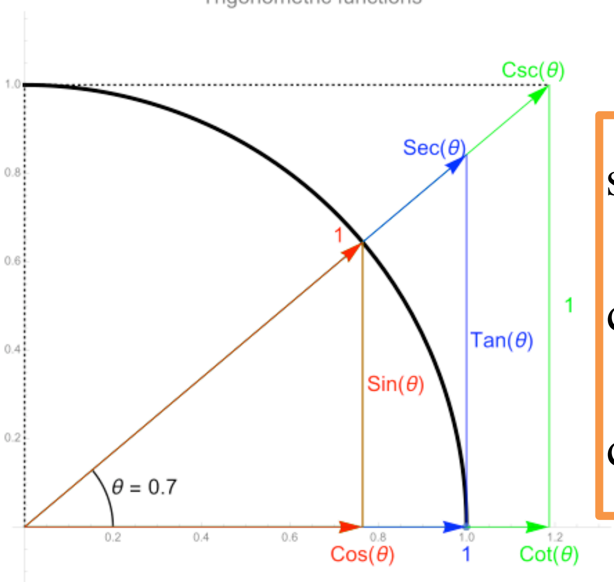
1. **χρήση γνωστών μαθηματικών εννοιών (*π.χ. παράγωγοι συναρτήσεων*) στην περιγραφή της Φυσικής,**
2. **εισαγωγή νέων μαθηματικών εργαλείων (*θα διδαχθούν αναλυτικά στα μαθήματα Μαθηματικών κατά τα πρώτα εξάμηνα, αλλά εμείς τα χρειαζόμαστε νωρίτερα!*)**
    - **Τριγωνομετρία**
    - **Διανύσματα**
    - **Διαφορικός λογισμός (συναρτήσεις μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών)**
    - **Ολοκληρωτικός λογισμός**
    - **Διαφορικές εξισώσεις**
    - **Μιγαδικοί αριθμοί**

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί στον μοναδιαίο κύκλο



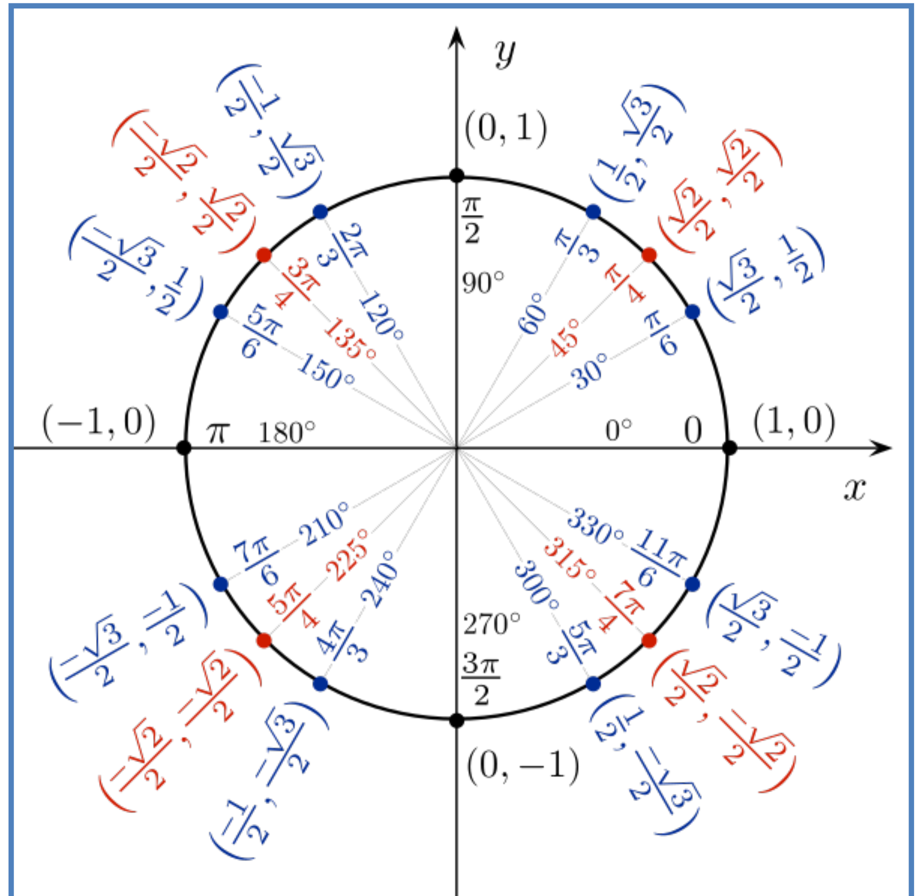
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$



sec = secant, csc = cosecant, cot = cotangent

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

$$2\cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$\sin a \pm \sin b = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

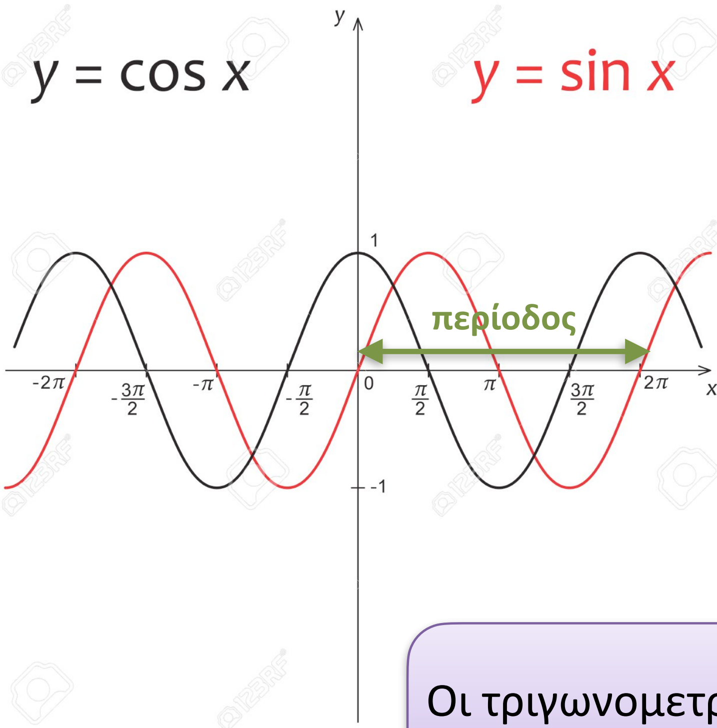
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

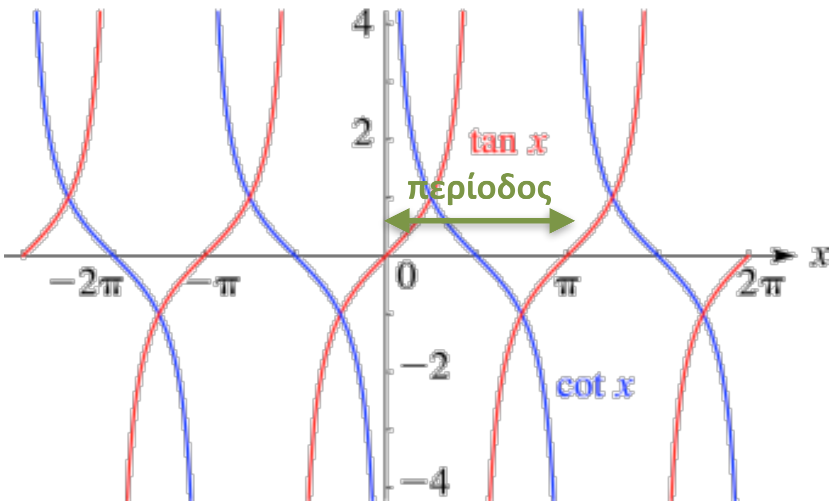
$$\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

$$a\sin x + b\cos x = A\sin(x+\varphi)$$

$$A = \sqrt{a^2+b^2}, \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις





Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι **περιοδικές**, με περίοδο 2π (sinx, cosx) και π (tanx, cotx).

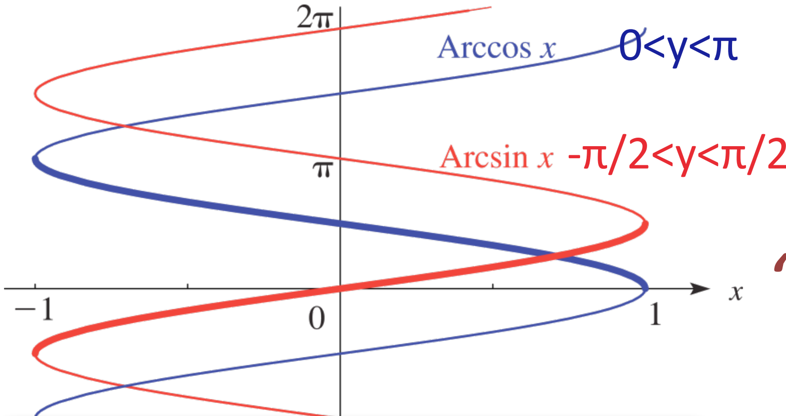
Ημίτονο: ημx ⇒ sinx

Συνημίτονο: συνx ⇒ cosx

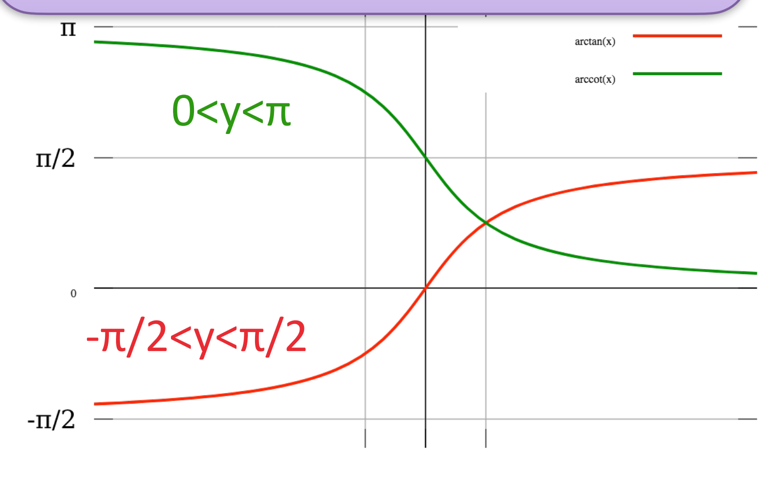
Εφαπτομένη: εφx ⇒ tanx

Συνεφαπτομένη: σφx ⇒ cotx

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις



Επειδή οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι **πλειότιμες** (δηλαδή για κάθε x έχουμε άπειρα y, λόγω της περιοδικότητας) χρησιμοποιούμε τις **κύριες τιμές** τους.



Αντίστροφη συνάρτηση

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

arc = τόξο

"ποιο είναι το τόξο γωνίας (σε rad) που έχει τον συγκεκριμένο τριγωνομετρικό αριθμό;"

$$\sin^{-1} x \equiv \arcsin x$$

$$\cos^{-1} x \equiv \arccos x$$

$$\tan^{-1} x \equiv \arctan x$$

$$\cot^{-1} x \equiv \operatorname{arccot} x$$

Παραδείγματα

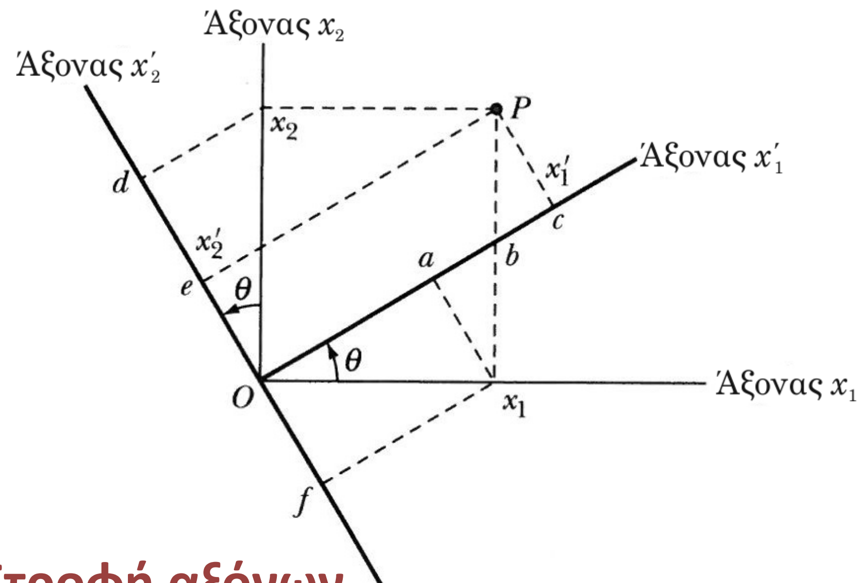
arcsin(0.5)=π/6=0.524 (όχι 30 !!)

arccos(0)=π/2=1.571 (όχι 90 !!)

arctan(1)=π/4=0.785(όχι 45 !!)

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Βαθμωτά & διανυσματικά μεγέθη



Τα φυσικά μεγέθη είναι **βαθμωτά** (π.χ. *ενέργεια*), **διανυσματικά** (π.χ. *ταχύτητα*) ή **τανυστικά** (π.χ. *τανυστής αδράνειας στερεού σώματος*)

Βαθμωτή ποσότητα φ

$$\varphi'(\vec{x}') = \varphi(\vec{x})$$

Στροφή αξόνων

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x'_2 &= -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Γραμμικός μετασχηματισμός συντεταγμένων

$$x'_i = \lambda_{i1}x_1 + \lambda_{i2}x_2 + \lambda_{i3}x_3 \equiv \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}x_j$$

Πίνακας στροφής

$$R \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad |R| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Διανυσματική ποσότητα A

$$\vec{A} \equiv (A_1, A_2, A_3)$$

$$\vec{A}' \equiv (A'_1, A'_2, A'_3)$$

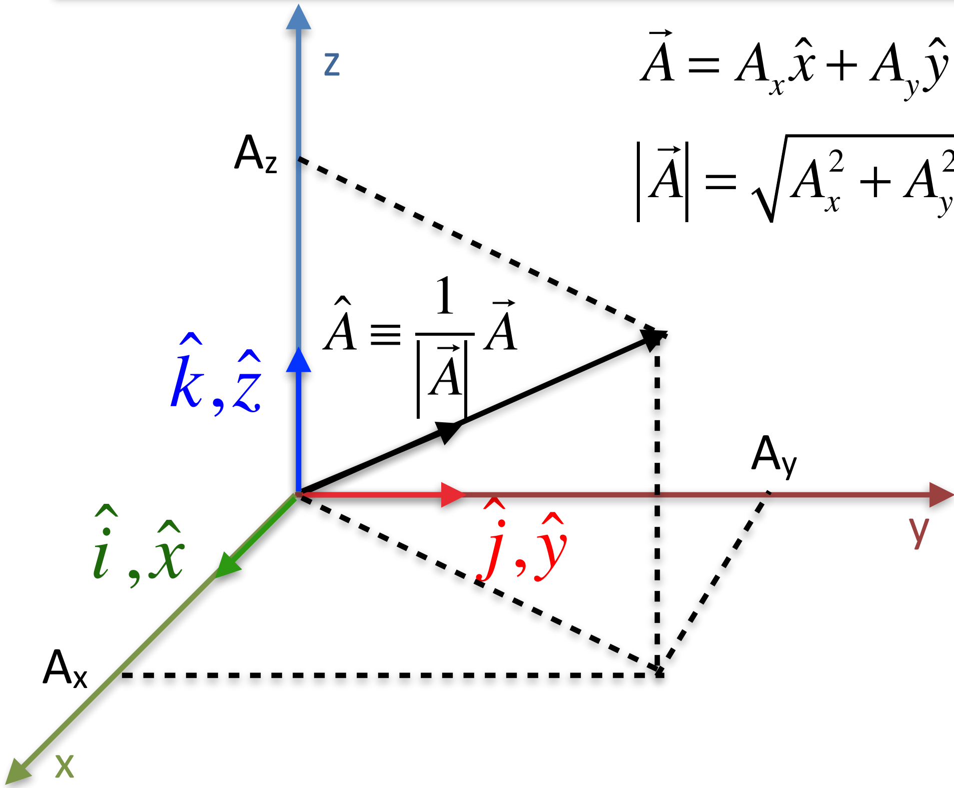
$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}A_j$$

Μοναδιαία διανύσματα & σύστημα συντεταγμένων

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \equiv \left(A_x, A_y, A_z\right)$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Μέτρο διανύσματος



Μοναδιαία διανύσματα

- έχουν μοναδιαίο μήκος και χρησιμεύουν για να δείχνουν την κατεύθυνση
- οποιοδήποτε (μη μηδενικό) διάνυσμα μπορεί να γίνει μοναδιαίο

$$\hat{x}, \hat{i} = (1,0,0)$$

$$\hat{y}, \hat{j} = (0,1,0)$$

$$\hat{z}, \hat{k} = (0,0,1)$$

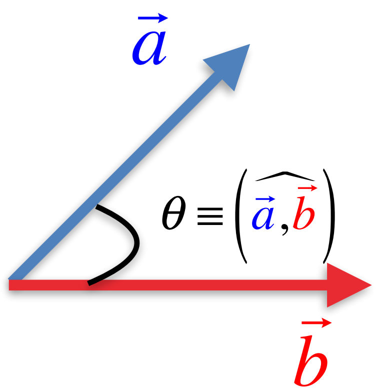
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

- τρία μοναδιαία διανύσματα
- κάθετα μεταξύ τους
- κάθε διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$\hat{x} \perp \hat{y} \perp \hat{z}$$

Εσωτερικό (ή βαθμωτό) γινόμενο



Μία από τις δύο πράξεις πολλαπλασιασμού μεταξύ διανυσμάτων: **δύο διανύσματα δίνουν έναν αριθμό (βαθμωτή ποσότητα)**.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

$$\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$$

Γωνία μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων

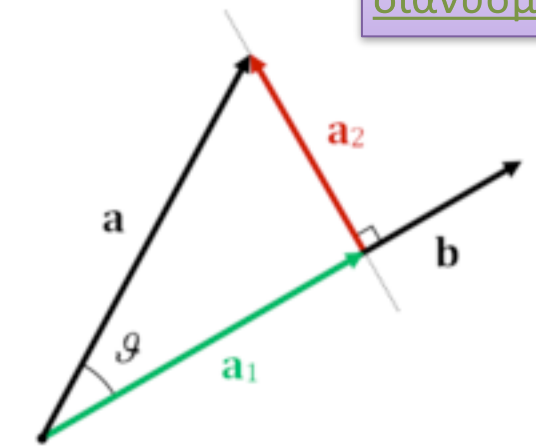
$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

Συνθήκη καθετότητας

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \underset{\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} \vec{a} \perp \vec{b}}$$

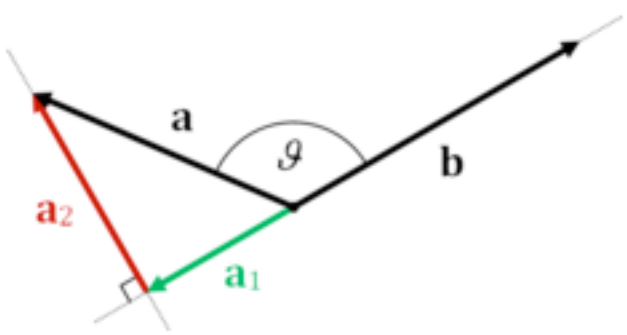
Προβολή διανύσματος

Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες: μία παράλληλη σε άλλο, γνωστό διάνυσμα (**προβολή**) και μία κάθετη σε αυτό. Ενίοτε, ως <u>*προβολή*</u> εννοούμε <u>το μήκος της διανυσματικής προβολής</u>.



Προβολή (projection)

$$\vec{a}_1 \equiv \mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(|\vec{a}|\cos\theta\right)\hat{b} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_1 = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}}$$

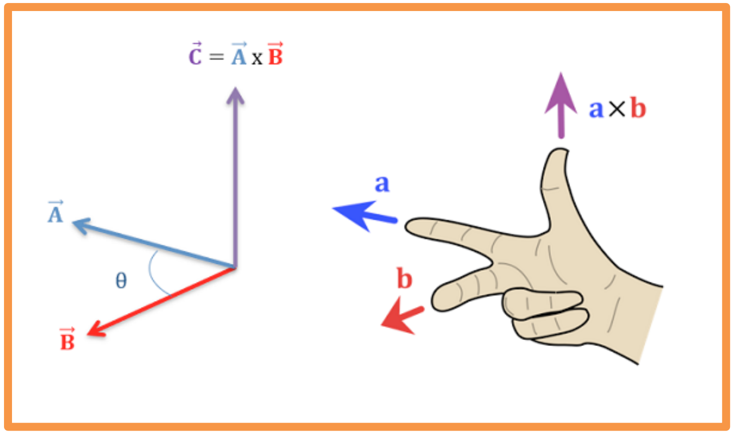


Κάθετη (rejection)

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_2 = \vec{a} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}}$$

Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο

Μία από τις δύο πράξεις πολλαπλασιασμού μεταξύ διανυσμάτων: **δύο διανύσματα δίνουν ένα τρίτο διάνυσμα**.

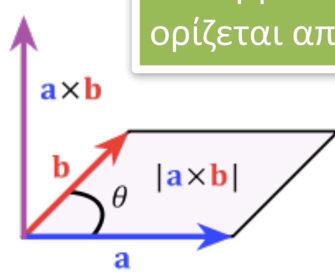


$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\hat{x}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\hat{y}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\hat{z}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)\hat{x}+\left(a_z b_x-a_x b_z\right)\hat{y}+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)\hat{z}$$

Το αποτέλεσμα της πράξης είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των άλλων δύο. Η φορά του δίνεται από τον **κανόνα του δεξιού χεριού**.

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα δύο διανύσματα.



$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

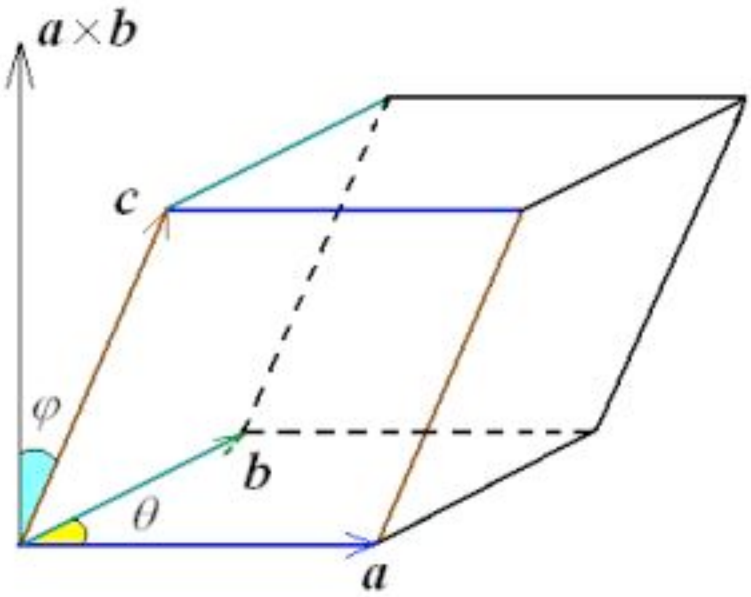
$$\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$$

$$\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$$

Συνθήκη παραλληλίας

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\underset{\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}\vec{a}\parallel\vec{b}$$

Μικτό γινόμενο



Η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου τριών διανυσμάτων, ανά δύο μη συγγραμμικών, ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν.

$$V = \left|\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|$$

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}$$

Ταυτότητες

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}+\kappa\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\kappa\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}+\kappa\vec{c}\right)=\lambda\vec{a}\times\vec{b}+\kappa\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{x}\cdot\hat{z}=\hat{y}\cdot\hat{z}=0$$

$$\hat{x}\times\hat{x}=\hat{y}\times\hat{y}=\hat{z}\times\hat{z}=\vec{0}$$

$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z},\ \hat{y}\times\hat{x}=-\hat{z}$$

$$\hat{x}\times\hat{z}=-\hat{y},\ \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

$$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x},\ \hat{z}\times\hat{y}=-\hat{x}$$

Ασκήσεις

1) Υπολογίστε το $\left|\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\right|$ αν $\vec{A}=2\hat{x}-3\hat{y}+5\hat{z}$ και $\vec{B}=3\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z}$.

$$\vec{A}+\vec{B}=(2+3)\hat{x}+(-3+1)\hat{y}+(5-2)\hat{z}=5\hat{x}-2\hat{y}+3\hat{z}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(2-3)\hat{x}+(-3-1)\hat{y}+(5+2)\hat{z}=-\hat{x}-4\hat{y}+7\hat{z}$$

$$\left|\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\right|=\left|5(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 7\right|=24$$

2) Αν $\vec{A}=2\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$, $\vec{B}=\hat{x}-2\hat{y}+2\hat{z}$ και $\vec{C}=3\hat{x}-4\hat{y}+2\hat{z}$, βρείτε την προβολή του $\vec{A}+\vec{C}$ στην διεύθυνση του $\vec{B}$.

$$\vec{A}+\vec{C}=(2+3)\hat{x}+(1-4)\hat{y}+(1+2)\hat{z}=5\hat{x}-3\hat{y}+3\hat{z}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{C}\right)\cdot\vec{B}=5\cdot 1+(-3)\cdot(-2)+3\cdot 2=17$$

$$\left|\vec{B}\right|^2=1^2+(-2)^2+2^2=9$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{B}}\left(\vec{A}+\vec{C}\right)=\frac{\left(\vec{A}+\vec{C}\right)\cdot\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|^2}\vec{B}=\frac{17}{9}\left(\hat{x}-2\hat{y}+2\hat{z}\right)=\frac{17}{9}\hat{x}-\frac{34}{9}\hat{y}+\frac{34}{9}\hat{z}$$

Ασκήσεις (συνέχεια)

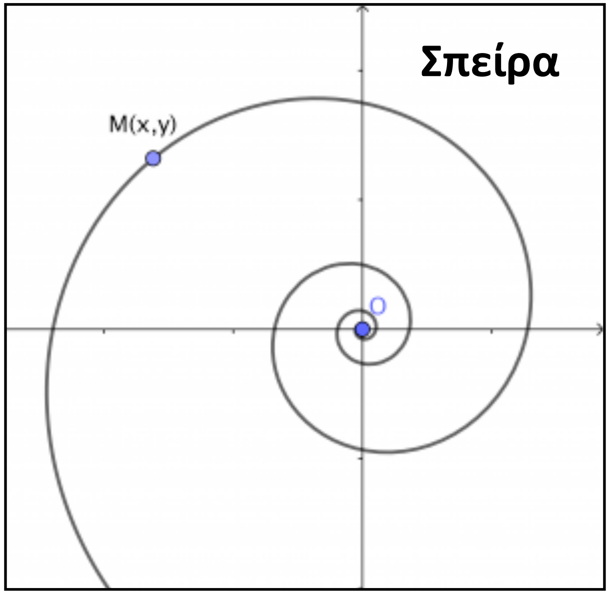
3) Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{A} = 3\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z}$ και $\vec{B} = \hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{z} = 0\hat{x} + 10\hat{y} + 5\hat{z} = 10\hat{y} + 5\hat{z}$$

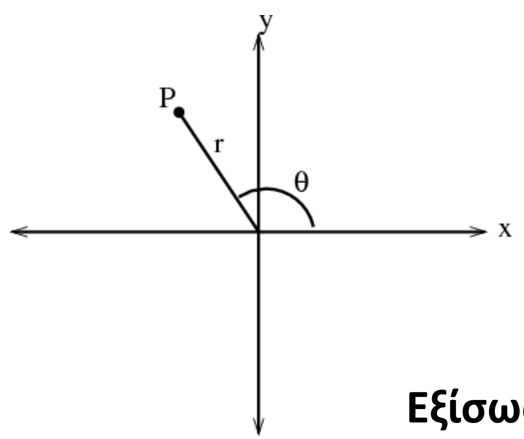
$$\hat{C} = \frac{1}{\left|\vec{C}\right|}\vec{C} = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 5^2}}\left(10\hat{y} + 5\hat{z}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{y} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{z}$$

Παρατήρηση: εδώ θα μπορούσε κανείς να πάρει και το αντίθετο διάνυσμα (είναι επίσης κάθετο στο επίπεδο των ***A, B****) !!!*

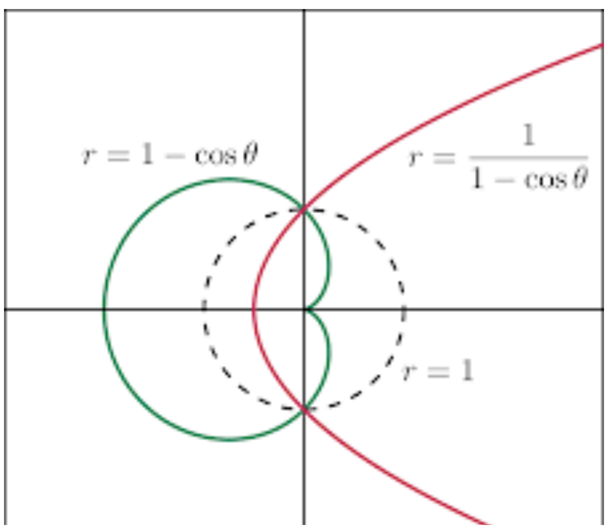
Πολικό σύστημα συντεταγμένων σε δύο διαστάσεις



Ένα σημείο στο επίπεδο μπορεί να προσδιοριστεί με διάφορους τρόπους. Το ζεύγος (x, y) ορίζει το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Στη Φυσική θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση των σωμάτων, δηλαδή το σύνολο των σημείων από τα οποία διέρχεται ένα σώμα, που ονομάζεται **τροχιά**. Σε πολλά φυσικά προβλήματα, η τροχιά είναι υπερβολικά πολύπλοκη αν εκφραστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες, οπότε χρησιμοποιούμε εναλλακτικά συστήματα.



Στο **πολικό σύστημα** συντεταγμένων ένα σημείο καθορίζεται από:
α) την απόσταση **r** από την αρχή των αξόνων,
β) την γωνία **θ** που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον θετικό ημιάξονα x.



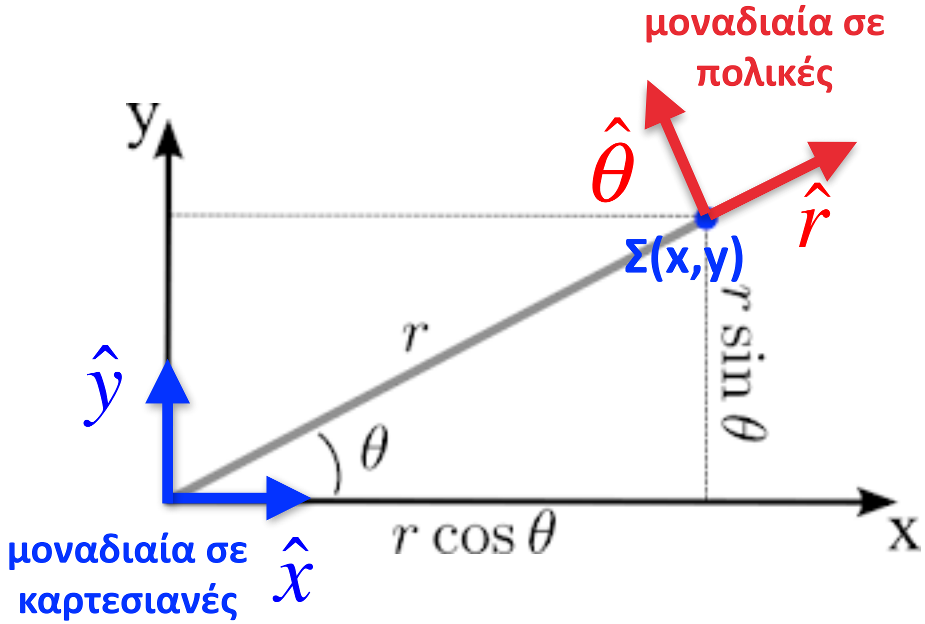
Καρδιοειδής, Κύκλος, Παραβολή

Εξίσωση κύκλου

$$x^2 + y^2 = R^2$$ καρτεσιανές

$$r = R$$ πολικές

Πολικό σύστημα συντεταγμένων σε δύο διαστάσεις



Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = r\hat{r}$$

καρτεσιανές **πολικές**

$$\begin{Bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{Bmatrix}$$

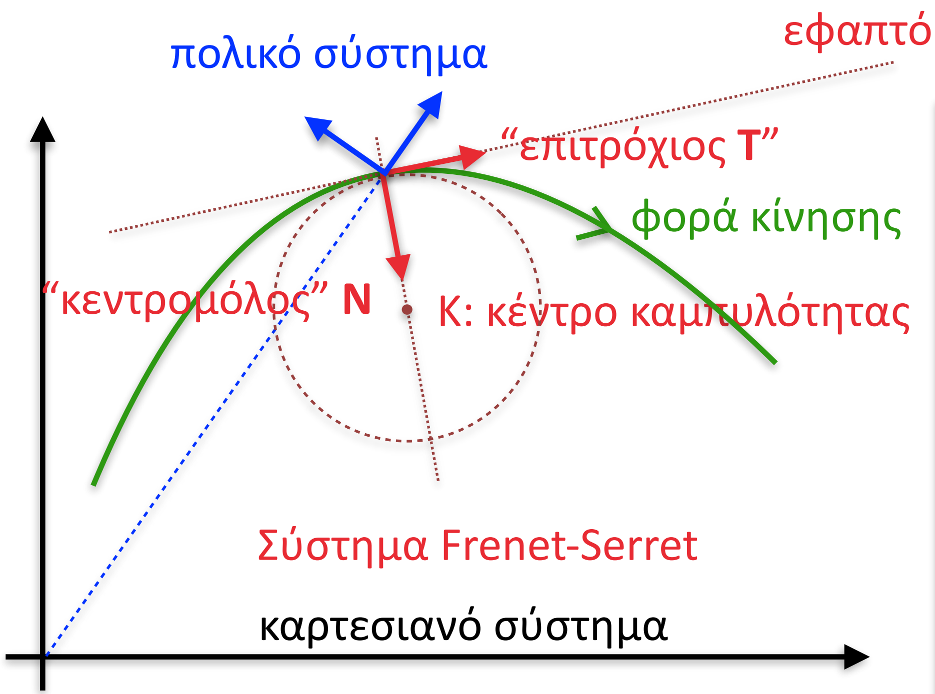
$$\boxed{\hat{r} \perp \hat{\theta} \Leftrightarrow \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα στις πολικές συντεταγμένες **<u>ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑ</u>** αλλά **<u>κινούνται μαζί με το σημείο Σ</u>**.

$$\left.\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

πίνακας στροφής

Σύστημα Frenet-Serret σε δύο διαστάσεις



- Το σύστημα **Frenet-Serret** είναι **τοπικό**, όπως και το πολικό, δηλαδή τα μοναδιαία διανύσματα στρέφονται από σημείο σε σημείο.
- Η μία κατεύθυνση (**T**) είναι **εφαπτόμενη** της τροχιάς, με φορά αυτή της κίνησης και ονομάζεται **επιτρόχιος**.
- Η άλλη κατεύθυνση (**N**) είναι **κάθετη στην εφαπτόμενη**, με φορά προς το κέντρο καμπυλότητας και ονομάζεται **κεντρομόλος**.
- Η ακριβής μαθηματική περιγραφή δίνεται στα πλαίσια της **διαφορικής γεωμετρίας**.

$$s \equiv \int_0^t |\dot{\vec{r}}(t')|\,dt'$$

s: μήκος τροχιάς

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \hat{N} = \frac{1}{|d\hat{T}/ds|}\frac{d\hat{T}}{ds}$$

T, **N**: μοναδιαία

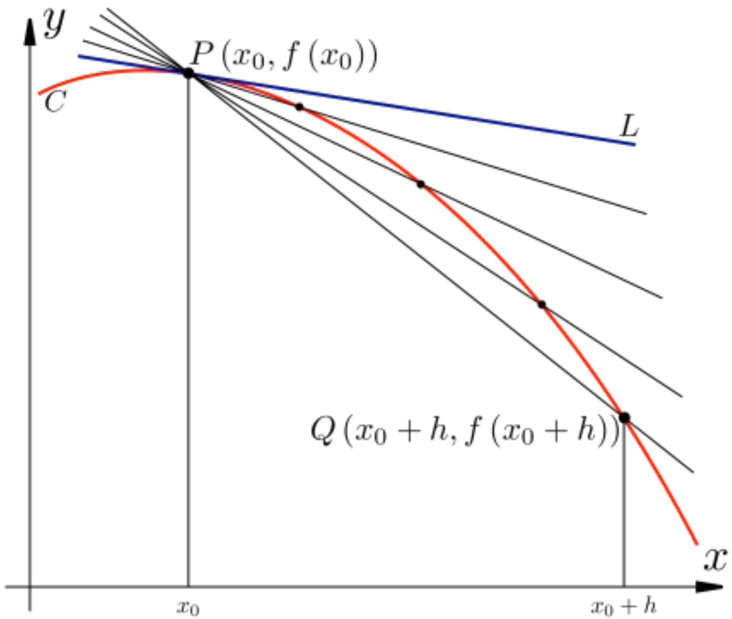
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$$

κ: καμπυλότητα
ρ: ακτίνα καμπυλότητας

Σε μία κυκλική τροχιά ακτίνας R, το πολικό σύστημα ταυτίζεται (**N** = −**r**, **T** = −**θ**) με το σύστημα Frenet - Serret και ισχύει ρ = R.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Παράγωγος συνάρτησης



- Η έννοια της παραγώγου αναπτύχθηκε αρχικά στο πλαίσιο της προσπάθειας εύρεσης της εφαπτομένης μίας καμπύλης.
- Ορίζεται ως μία οριακή διαδικασία.
- Η παράγωγος μία συνάρτησης εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής αυτής σε κάποιο σημείο.
- Η παράγωγος σε ένα σημείο ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης της συνάρτησης στο σημείο αυτό.
- Η παράγωγος τάξης (n) εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της παραγώγου τάξης (n-1).

Εξίσωση εφαπτομένης

$$\boxed{y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)}$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h}}$$

$$\boxed{\frac{d^n f}{dx^n} \equiv f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}\left(x+h\right) - f^{(n-1)}\left(x\right)}{h}}$$

Κανόνες παραγώγισης

$$c' = 0$$

$$\left(x^{\rho}\right)' = \rho x^{\rho-1}$$

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$\left(a^{x}\right)' = (\ln a)a^{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

κανόνες γινομένου & πηλίκου

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

$$\left[a\,f(x) \pm b\,g(x)\right]' = a\,f'(x) \pm b\,g'(x)$$

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))g'(x) \Leftrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

κανόνας αλυσίδας

Διαφορικό συνάρτησης

Διαφορικό

$$\boxed{df = f'(x)dx}$$

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

Το διαφορικό μίας συνάρτησης είναι απειροστό αλλά μπορεί να προσεγγίσει μία μικρή, πεπερασμένη μεταβολή της συνάρτησης.

Παράδειγμα
Βρείτε την ποσοστιαία μεταβολή του όγκου μιας σφαίρας αν η ακτίνα αυξηθεί κατά 1%.

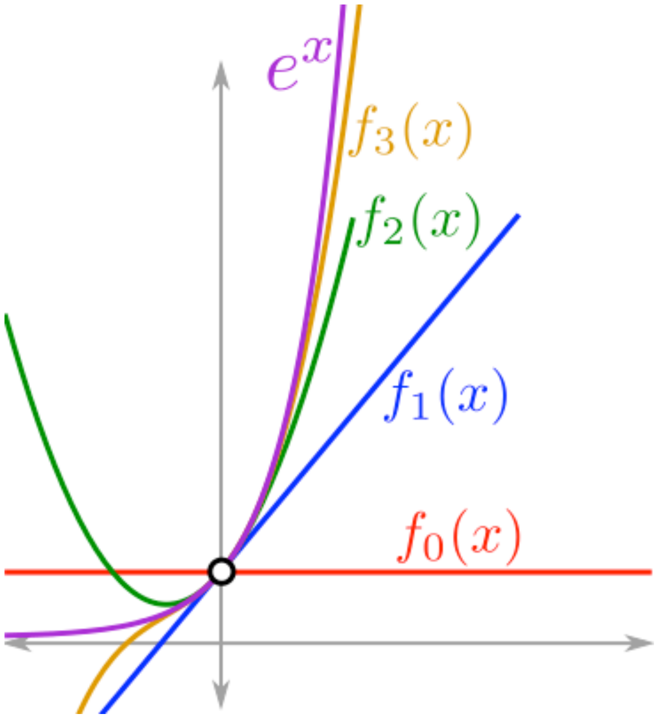
$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow dV = V'(R)dR = 4\pi R^2 dR$$

$$\frac{\Delta V}{V} \cong \frac{dV}{V} = \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\frac{dR}{R} \cong 3\frac{\Delta R}{R} = 3\%$$

Ανάπτυγμα Taylor

Πρόκειται για μία προσέγγιση της συνάρτησης f(x) σε κάποιο σημείο της x_0 με ένα πολυώνυμο n βαθμού. Όσο πιο κοντά στο x_0 είναι το x τόσο καλύτερη η προσέγγιση.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots$$



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

"n παραγοντικό"

$$n! = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, & n>0 \end{cases}$$

Θεωρήστε την συνάρτηση f(x)=e^x. Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor αυτής για x_0=0.

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

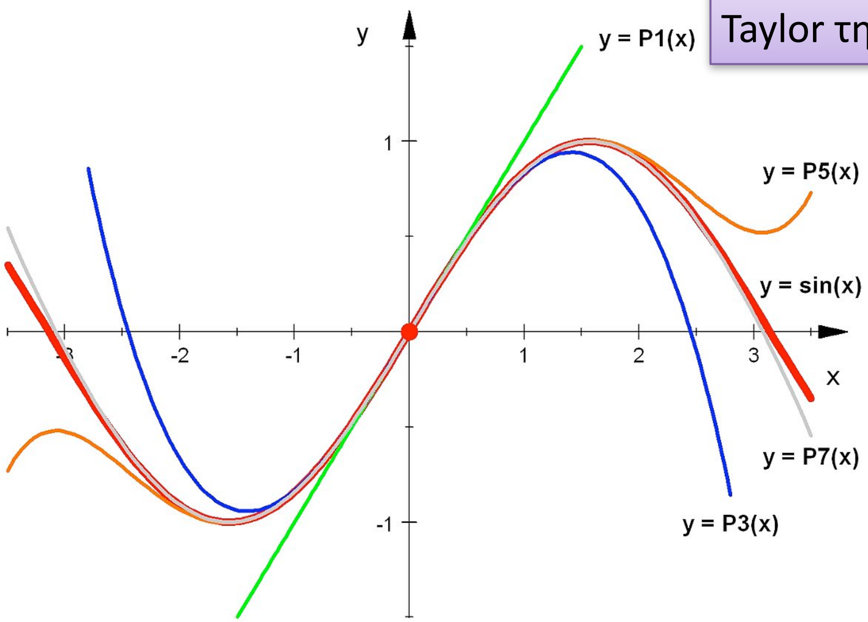
$$f_0(x) = 1$$

$$f_1(x) = 1 + x$$

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Ανάπτυγμα Taylor (συνέχεια)

Βρείτε την τιμή του sin(π/6) χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της f(x)=sinx γύρω από κατάλληλο σημείο x_0.



Επειδή το x=π/6=0.52 είναι αρκετά μικρή τιμή επιλέγουμε x_0=0.

$$\left.\begin{aligned} & f(x)=\sin x, \quad x_0=0, \\ & f(0)=0 \\ & f'(x)=\cos x, \quad f'(0)=1 \\ & f''(x)=-\sin x, \quad f''(0)=0 \\ & f'''(x)=-\cos x, \quad f'''(0)=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x)\approx x-\frac{x^3}{6}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.5$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\approx\frac{\pi}{6}-\frac{\pi^3}{6^4}=0.499674\ldots$$

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση με ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού δίνει τιμή (0.52) περίπου 5% μεγαλύτερη από την ακριβή (0.50), ενώ η επόμενη προσέγγιση με πολυώνυμο 3ου βαθμού δίνει τιμή που διαφέρει κατά 3/5000.

Ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $x_0=0$

Όταν $x_0=0$, τότε έχουμε το **ανάπτυγμα Maclaurin**. Πρακτικά πρόκειται για προσεγγίσεις συναρτήσεων όταν το όρισμά τους είναι πολύ μικρό (τείνει στο μηδέν).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{(a-1)a}{2}x^2 + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

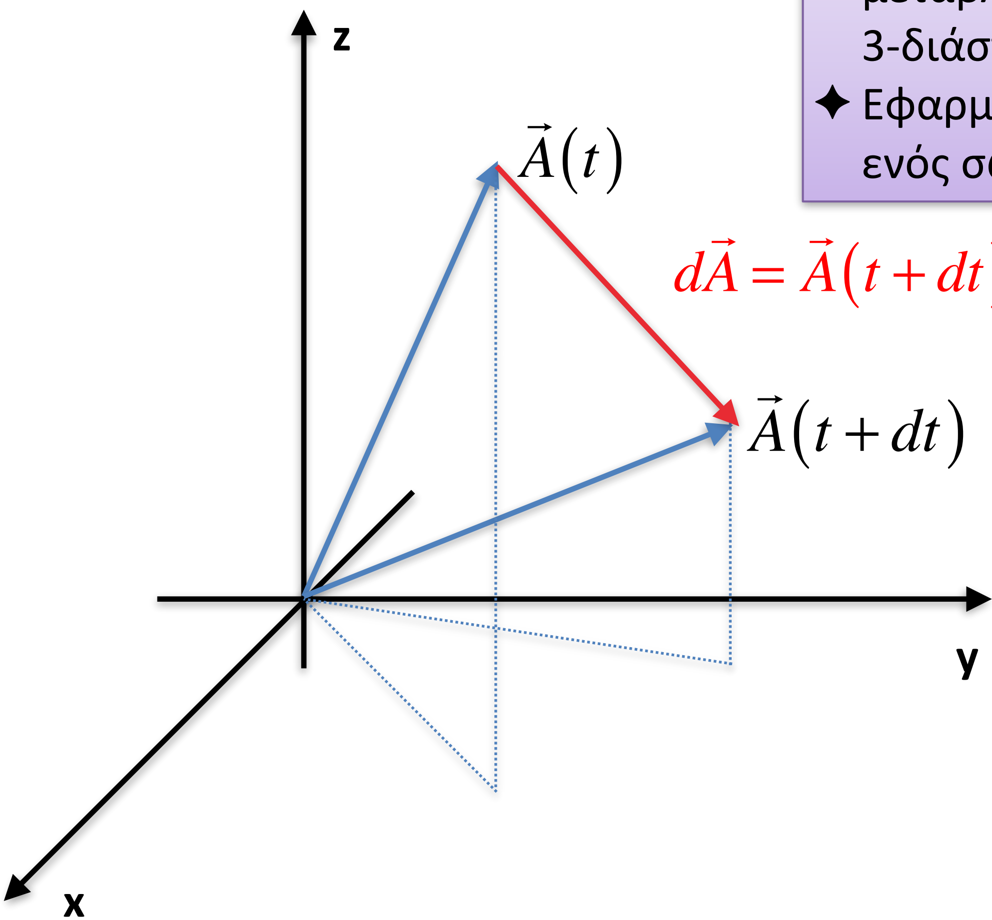
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Κοινές συναρτήσεις που εμφανίζονται στην Φυσική. Σε πρακτικές εφαρμογές κρατάμε συνήθως πολυώνυμα βαθμού 1 ή 2.

Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής

$$\vec{A} : \Re \to \Re^3$$

- Διανυσματική συνάρτηση **A**: απεικόνιση του συνόλου R στο R^3 (δηλαδή μία εξαρτημένη μεταβλητή απεικονίζεται σε ένα διάνυσμα του 3-διάστατου χώρου).
- Εφαρμογή στη φυσική: θέση **r**(t)=(x(t),y(t),z(t)) ενός σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.



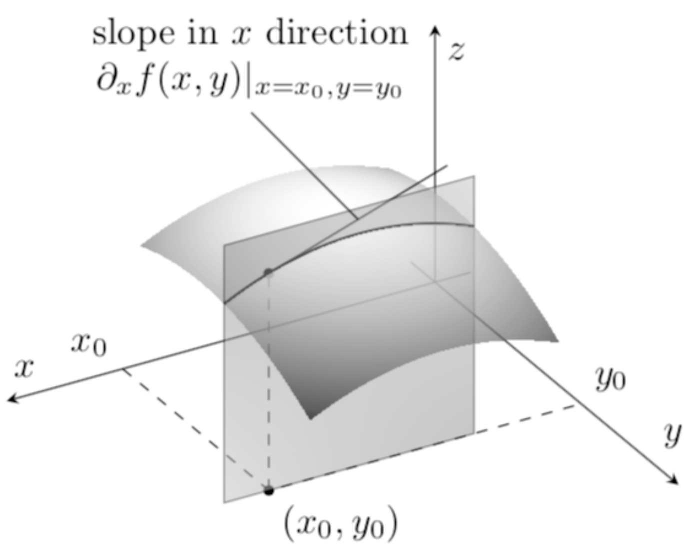
$$d\vec{A} = \vec{A}(t+dt) - \vec{A}(t)$$

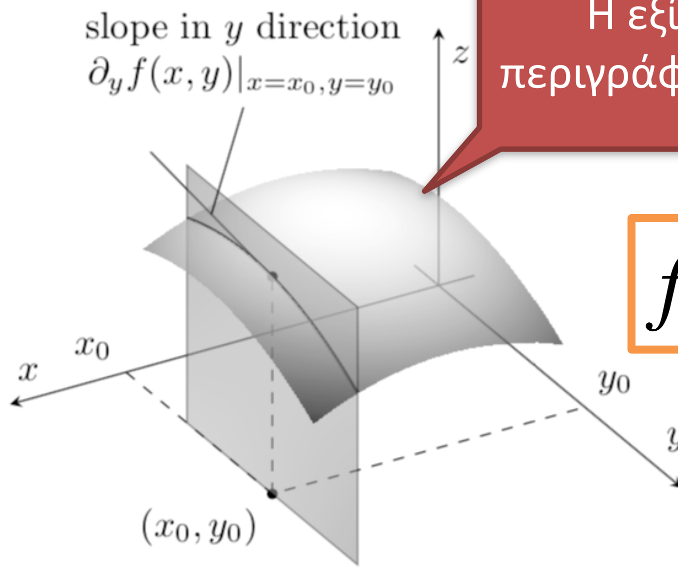
$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{x} + A_y(t)\hat{y} + A_z(t)\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\hat{x} + \frac{dA_y(t)}{dt}\hat{y} + \frac{dA_z(t)}{dt}\hat{z}$$

παραγωγίζουμε κάθε συνιστώσα ξεχωριστά

Μερική παράγωγος βαθμωτής συνάρτησης πολλών μεταβλητών





Η εξίσωση z=f(x,y) περιγράφει μία επιφάνεια.

$$f : \Re^3 \to \Re$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

- Βαθμωτή συνάρτηση f πολλών μεταβλητών (π.χ. θερμοκρασία συναρτήσει της θέσης).
- Η μερική παράγωγος εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης όταν αλλάζει μία μεταβλητή ενώ οι άλλες είναι σταθερές.
- Ισχύουν οι κανόνες παραγώγισης θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές.

Μερική παράγωγος: παραδείγματα

$$f(x,y)=x^2\cos y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\cos y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-x^2\sin y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-2x\sin y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^2\cos y \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \end{array}}$$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

$$f(x,y,z)=z+xye^z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^z \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=xe^z \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=1+xye^z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=xye^z \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^z \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=ye^z \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=xe^z \end{array} \right.$$

Κλίση βαθμωτής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Διαφορικός τελεστής **"ανάδελτα"** (γενίκευση του τελεστή d/dx).

Τελεστής
μαθηματικό σύμβολο που υποδηλώνει δράση σε ένα αντικείμενο

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Κλίση ή **βαθμίδα** μίας συνάρτησης f (είναι ένα διάνυσμα αποτελούμενο από τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης f).

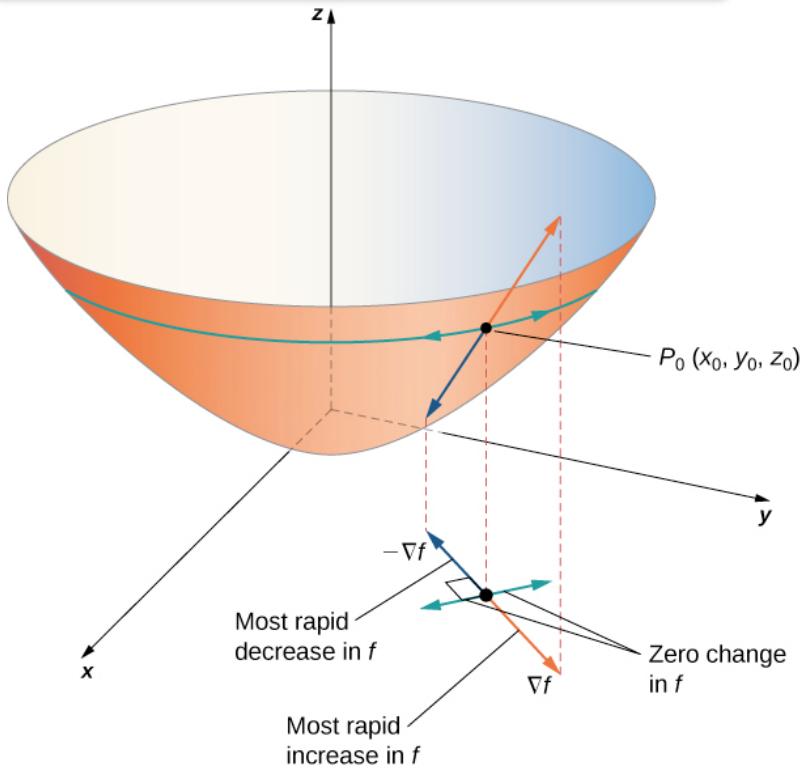
Παράδειγμα

$$f(x,y,z) = xy + z^2, \quad P(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla} f_P = (1,1,2)$$

Κατευθυνόμενη παράγωγος & ολικό διαφορικό

Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της f είναι στην κατεύθυνση της κλίσης !!



$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

Ολικό διαφορικό

$$\vec{r} = (x, y, z) \Rightarrow d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

Κατευθυνόμενη παράγωγος

$$D_{\hat{a}} f(\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{r} + h\hat{a}) - f(\vec{r})}{h} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{a}$$

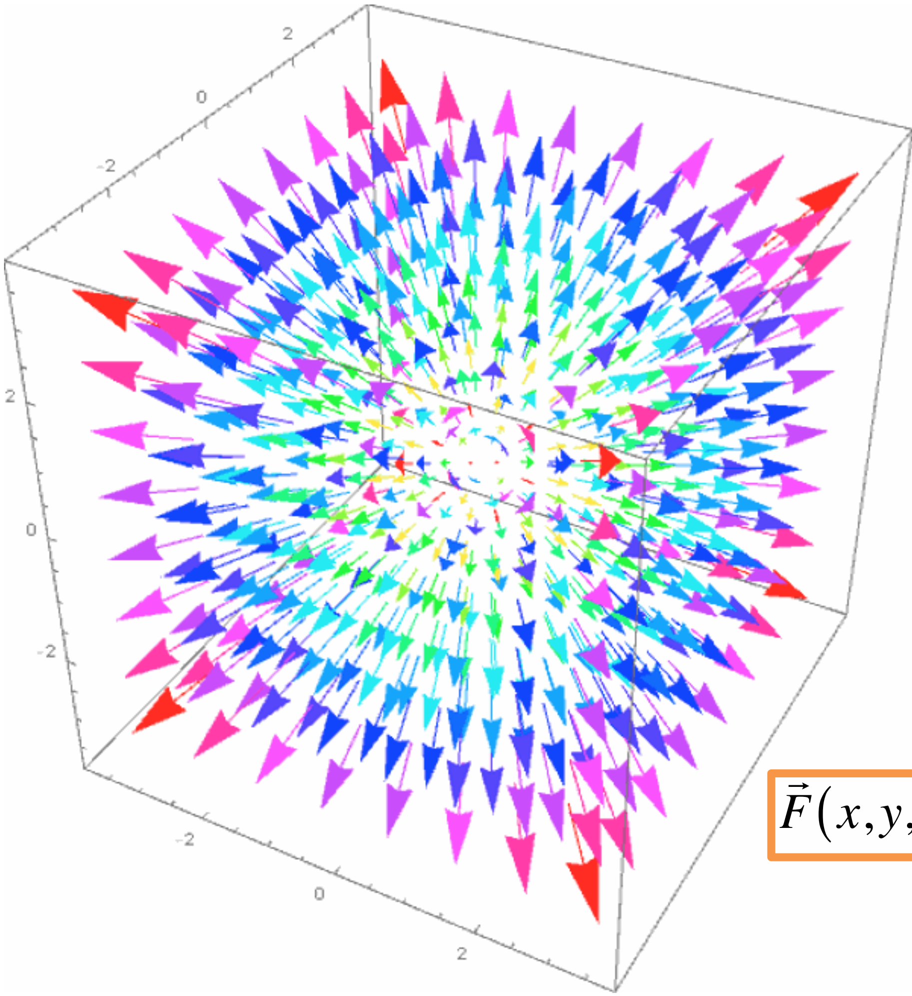
Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$ στο σημείο P(1,0) στην κατεύθυνση του διανύσματος (1,1).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}_P f = (1,0)$$

$$\vec{a} = (1,1) \Rightarrow \hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$D_{\hat{a},P} f = \vec{\nabla}_P f \cdot \hat{a} = (1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών



- Διανυσματική συνάρτηση **F** πολλών μεταβλητών (π.χ. πεδίο δύναμης).
- Απεικόνιση του R^3 στο R^3 (δηλαδή σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί ένα διάνυσμα).

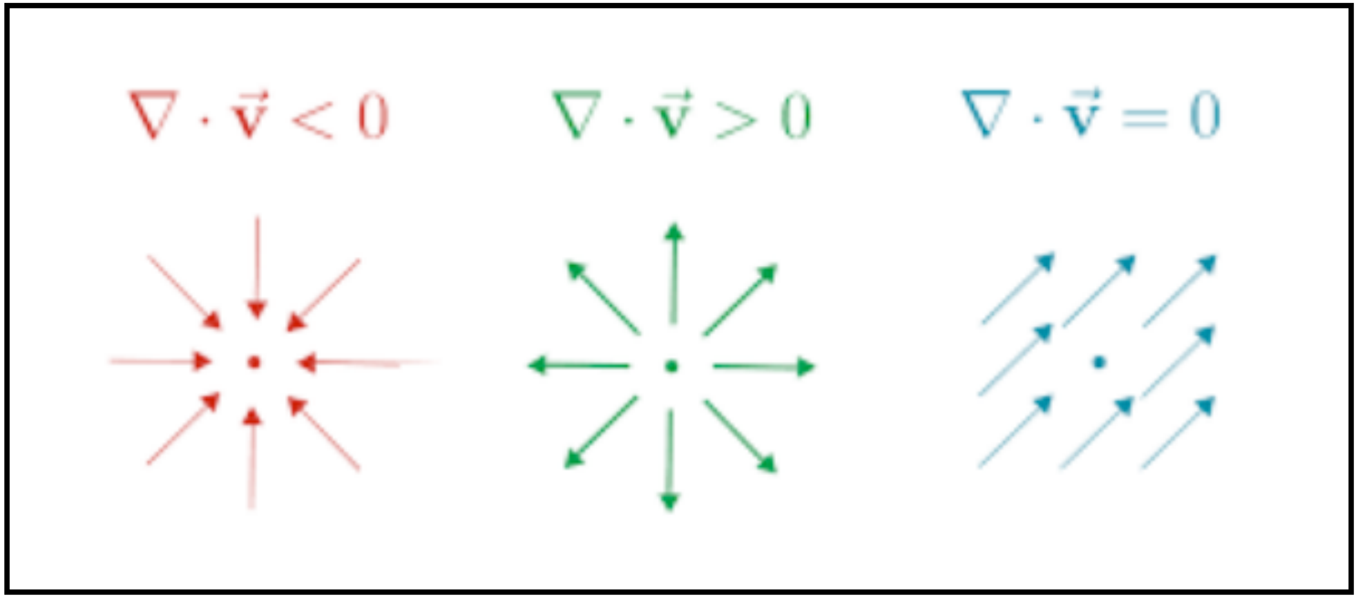
$$\vec{F} : \Re^3 \to \Re^3$$

$$\boxed{\vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\hat{x} + F_y(x,y,z)\hat{y} + F_z(x,y,z)\hat{z}}$$

Απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

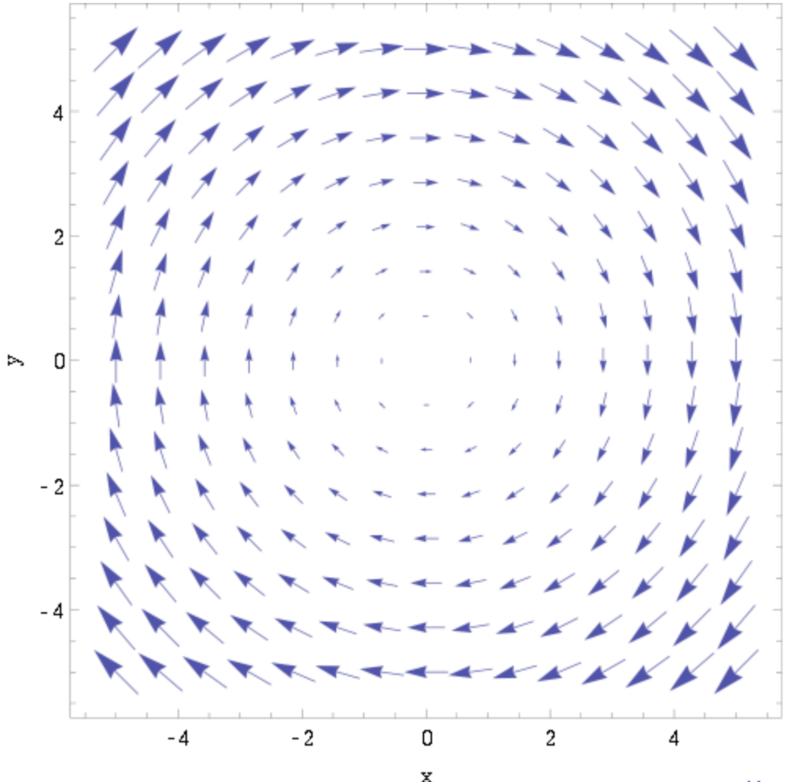
$$\mathrm{div}\vec{F} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- ✦ **Απόκλιση** (divergence) ή **div**.
- ✦ Εκφράζει την πυκνότητα εξερχόμενης ροής του πεδίου από έναν απειροστό όγκο γύρω από ένα σημείο του πεδίου.



Στροβιλισμός διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$



- **Στροβιλισμός** ή **curl** ή **rot**.
- Εκφράζει την διαφορική περιστροφή του πεδίου γύρω από ένα σημείο αυτού.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

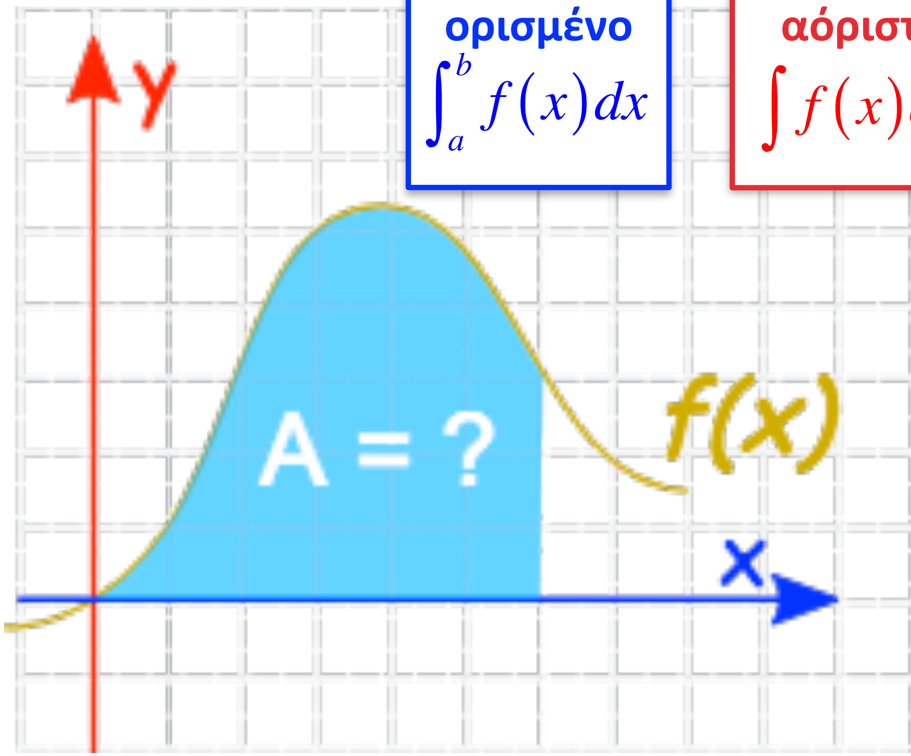
Έννοια του ολοκληρώματος

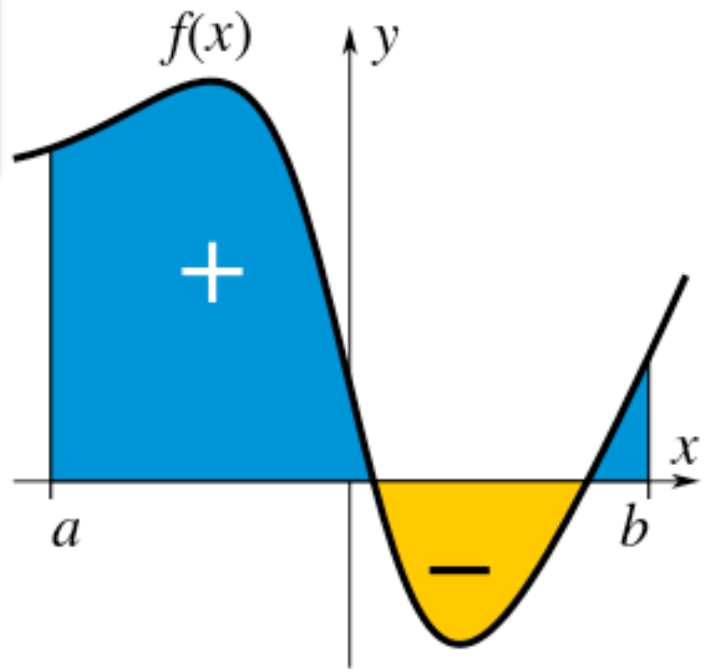
ορισμένο

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

αόριστο

$$\int f(x)\,dx$$

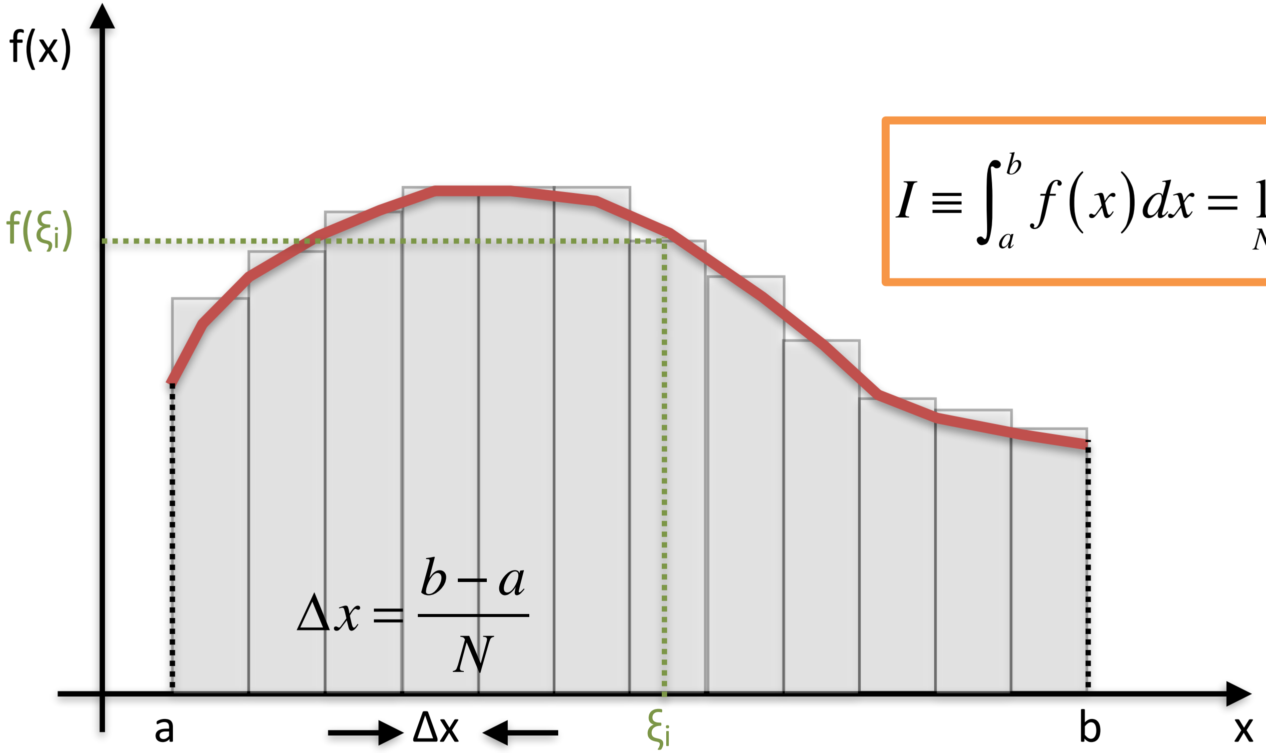




- ✦ Το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης ώς έννοια προέκυψε από την ανάγκη υπολογισμού εμβαδών.
- ✦ **Ορισμένο ολοκλήρωμα:** εκφράζει το προσημασμένο εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα.
- ✦ **Αόριστο ολοκλήρωμα (αντιπαράγωγος):** είναι η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x$$



$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

1. Διαμερίζουμε το πεδίο ορισμού [a,b] σε N διαστήματα εύρους Δx.
2. Αθροίζουμε το προσημασμένο εμβαδόν όλων των ορθογωνίων με βάση Δx και ύψος $f(\xi_i)$, όπου ξ_i είναι ένα σημείο του διαστήματος εύρους Δx.
3. Παίρνουμε το όριο $N \to \infty$.
4. Το αποτέλεσμα του ορίου είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

Αρχική συνάρτηση - αόριστο ολοκλήρωμα

- Η αρχική συνάρτηση F(x) είναι αυτή που αν την παραγωγίσουμε θα πάρουμε την f(x).
  - κάθε συνάρτηση f(x) έχει **<u>άπειρες</u>** αρχικές συναρτήσεις (γιατι;) !!
- Ένα **<u>ορισμένο</u>** ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την βοήθεια της αρχικής συνάρτησης ως η διαφορά αυτής στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης.
  - το αποτέλεσμα **δεν εξαρτάται** από την επιλογή της αρχικής συνάρτησης (γιατι;) !!
- Το **<u>αόριστο</u>** ολοκλήρωμα εκφράζει το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων.

ανεξάρτητη μεταβλητή

αρχική συνάρτηση

<u>βουβή</u> μεταβλητή ολοκλήρωσης (μπορούμε να της δώσουμε ό,τι όνομα θέλουμε)

$$\boxed{f(x) = \frac{dF}{dx}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

ολοκληρωτέα συνάρτηση

οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού

Τύπος υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

$$\boxed{I \equiv \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Κανόνες ολοκλήρωσης & βασικά ολοκληρώματα

Κανόνες ολοκλήρωσης

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz = \cdots$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \left[k f(x) + \lambda g(x)\right]dx = k\int_a^b f(x)dx + \lambda\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du, \quad u = g(x)$$

Αόριστα ολοκληρώματα / αρχικές συναρτήσεις

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$$

ONLINE υπολογισμός ολοκληρωμάτων

https://www.integral-calculator.com/

Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$I_3 = \int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e 1\cdot\ln x\,dx = \int_1^e (x)'\ln x\,dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\,dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = (e\ln e - 1\ln 1) - (e-1) = 1$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/3} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx, \quad u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx, \quad u_1 = \cos 0 = 1, \quad u_2 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$I_4 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{-1}{u}\,du = -\int_1^{1/2} \frac{1}{u}\,du = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{u}\,du = \left[\ln|u|\right]_{1/2}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = -(-\ln 2) = \ln 2$$

Εφαρμογές (συνέχεια)

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

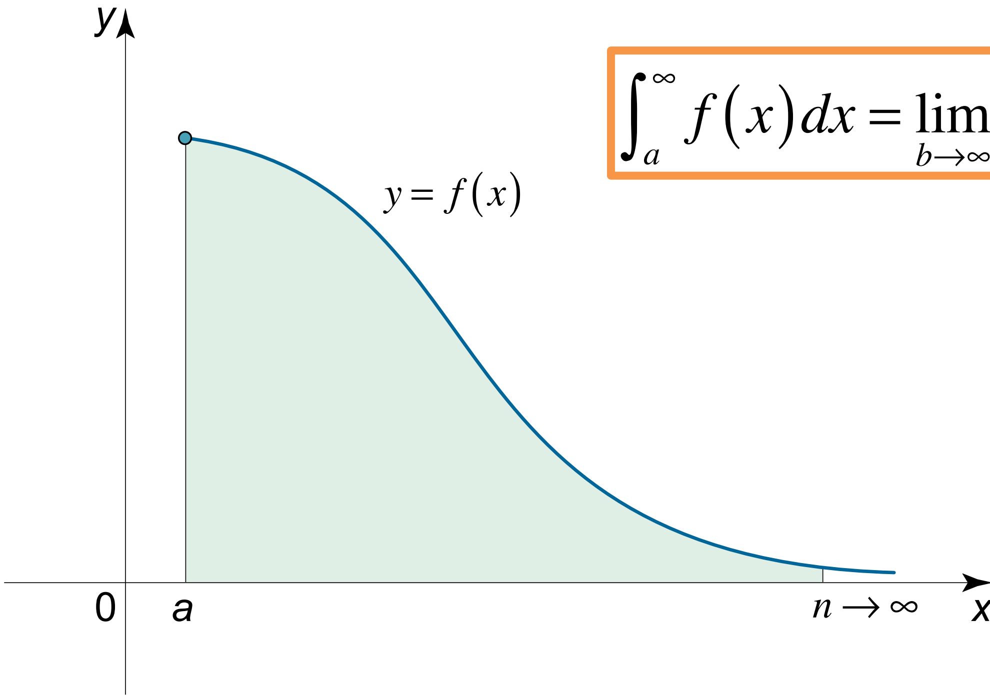
$$I_2 = \int x e^x\, dx = \int x\left(e^x\right)'\, dx = x e^x - \int (x)'\, e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + c$$

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+1} dx, \quad x = \tan u \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 u} du, \quad u = \arctan x$$

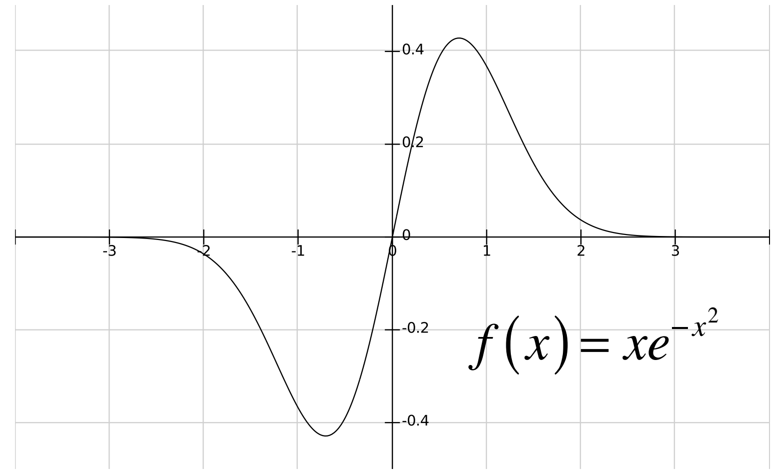
$$I_3 = \int \frac{1}{\tan^2 u + 1} \frac{1}{\cos^2 u} du = \int \frac{1}{\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} + 1} \frac{1}{\cos^2 u} du = \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u + \cos^2 u} \frac{1}{\cos^2 u} du = \int 1\, du =$$

$$= u + c = \arctan x + c$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα



$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)}$$



$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \left(-\lim_{b\to\infty} e^{-b}\right) - \left(-e^0\right) = 0+1=1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \left(-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0+1=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b xe^{-x^2}\,dx = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_a^b = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\left(-\frac{e^{-b^2}-e^{-a^2}}{2}\right) = \frac{0-0}{2} = 0$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εισαγωγή

Ονομάζουμε διαφορική εξίσωση κάθε εξίσωση που συσχετίζει μία ή περισσότερες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους.
Οι περισσότεροι φυσικοί νόμοι εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις !!!

- ✦ **συνήθεις:** μία συνάρτηση μίας μεταβλητής
- ✦ **μερικές:** συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
- ✦ **γραμμικές:** οι συναρτήσεις και οι παράγωγοι αυτών εμφανίζονται σε πρώτη δύναμη
- ✦ **μη γραμμικές:** όσες δεν είναι γραμμικές !!
- ✦ **τάξη διαφορικής:** η μέγιστη τάξη παραγώγου στην εξίσωση

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v})=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$ 2ος Ν. Newton

$$\vec{\nabla}^2 f(\vec{r},t)-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 f(\vec{r},t)}{\partial t^2}=0$$ Κυματική εξίσωση

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
Εξ. Maxwell

$$\frac{\partial\Theta(\vec{r},t)}{\partial t}=D\vec{\nabla}^2\Theta(\vec{r},t)$$ Διάχυση θερμότητας

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r},t)+V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)$$ Εξ. Schrödinger

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$ Διατήρηση ηλ. φορτίου

Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων

$y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = ce^{-x}$ Γραμμική, ομογενής, πρώτης τάξης

$y' = x \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + c$ Γραμμική, μη ομογενής, πρώτης τάξης

$y'' + y = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ Γραμμική, ομογενής, δεύτερης τάξης

Κάθε επιλύσιμη Δ.Ε. έχει τόσες απροσδιόριστες σταθερές όσες η τάξη της !!

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Μία διαφορική εξίσωση που συνοδεύεται από επιπλέον συνθήκες για τον υπολογισμό των απροσδιόριστων σταθερών.

Παράδειγμα #1

$$\left.\begin{array}{l} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y(x) = ce^{x} \\ 1 = ce^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = e^{x}$$

Παράδειγμα #2

$$\left.\begin{array}{l} y'' + y = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad y'(x) = c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y'(0) = c_1 = 0 \\ y(0) = c_2 = 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = \cos x$$

Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)}$$

Μέθοδος επίλυσης

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \Rightarrow \frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow \int \frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{f(y)}dy = \int g(x)dx$$

Οι δύο σταθερές c_1, c_2 πάντα μπορούν να αντικατασταθούν από μία άλλη.

Παράδειγμα

$$y' = yx^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = yx^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx \Rightarrow \ln|y| + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$|y| = e^{\frac{x^3}{3}+c_2-c_1} \Rightarrow |y| = e^{c_2-c_1}e^{\frac{x^3}{3}} \Rightarrow y = \pm e^{c_2-c_1}e^{\frac{x^3}{3}} \Rightarrow y = c_3 e^{\frac{x^3}{3}},\ c_3 \in \Re$$

Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών (παράδειγμα)

$y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, y(0) = -1$

πρόβλημα αρχικών τιμών (Δ.Ε. + συνθήκη)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \Rightarrow \int y^{-3}\,dy = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}, \quad u = 1+x^2, \quad du = 2x\,dx \Rightarrow$$

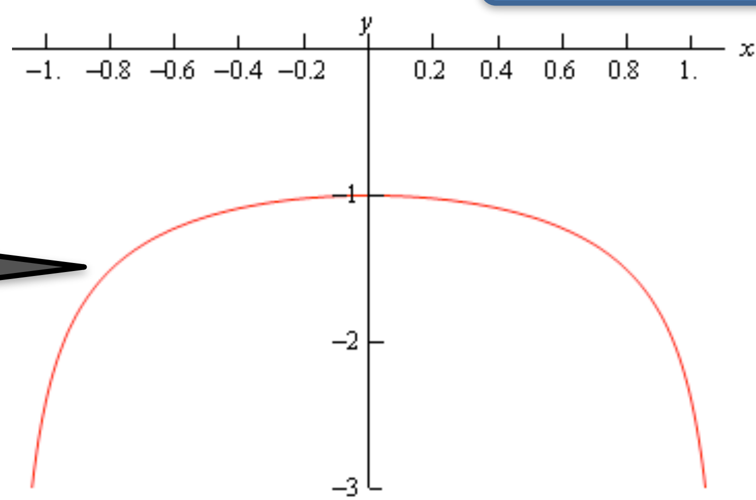
$$\Rightarrow \frac{y^{-3+1}}{-3+1} + c_1 = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du \Rightarrow -\frac{1}{2y^2} + c_1 = \frac{1}{2}\frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c_2 \Rightarrow -\frac{1}{2y^2} + c_1 = \sqrt{1+x^2} + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} = c - 2\sqrt{1+x^2}, \quad y(0) = -1 \Rightarrow 1 = c - 2 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \frac{1}{y^2} = 3 - 2\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$$

λύση

$$3 - 2\sqrt{1+x^2} > 0 \Rightarrow 9 > 4\left(1+x^2\right) \Rightarrow x^2 < \frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

υποχρεωτικός περιορισμός στο πεδίο ορισμού



γραφική παράσταση λύσης

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

$$\boxed{y' + R(x)y = Q(x)}$$

λύση της **ομογενούς** Δ.Ε. y΄+Ry=0

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_0(x)\int \frac{Q(x)}{y_0(x)}dx, \quad y_0(x) = ce^{-\int R(x)dx}}$$

εδώ δεν χρειάζεται η συνηθισμένη σταθερά του αόριστου ολοκληρώματος (βλέπετε γιατί;)

Παράδειγμα

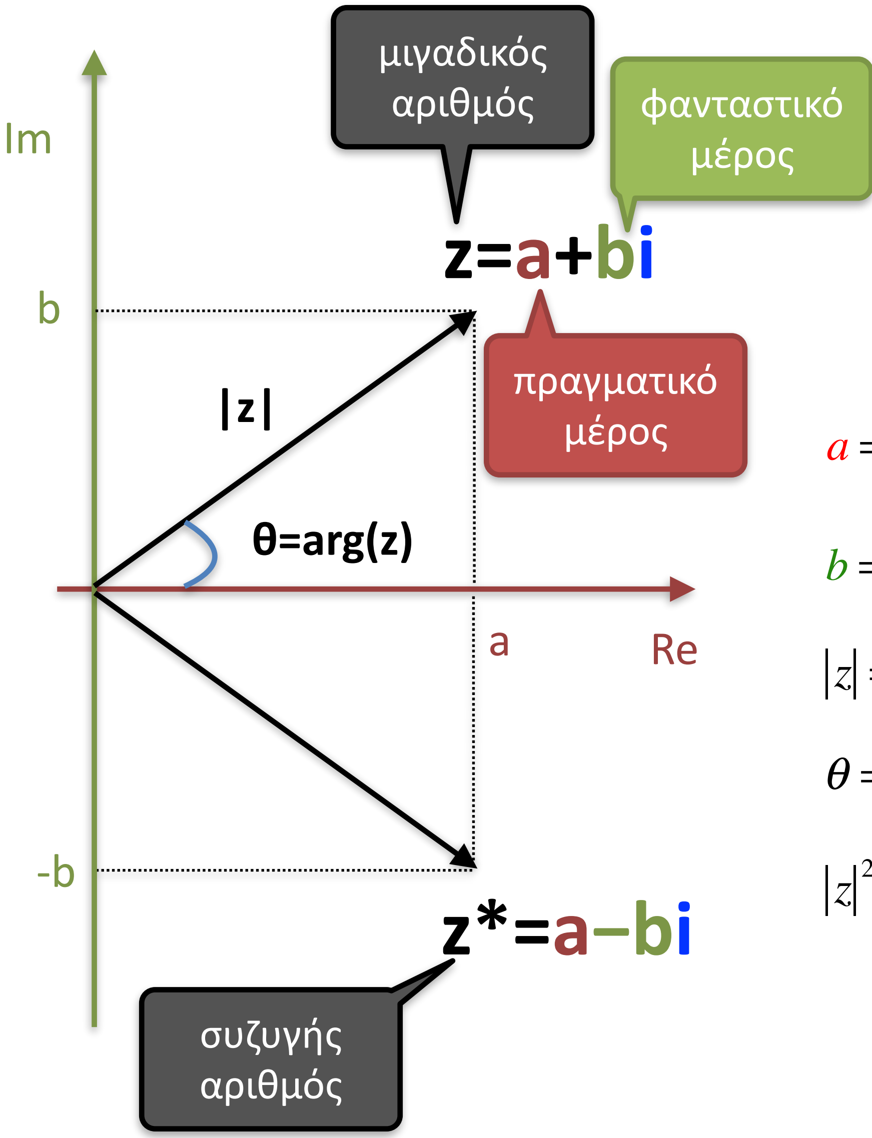
$$y' + xy = x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} R(x) = x \\ Q(x) = x \\ y_0(x) = ce^{-\int x\,dx} = ce^{-\frac{x^2}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + ce^{-\frac{x^2}{2}}\int \frac{1}{c} x e^{\frac{x^2}{2}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^u\,du = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} e^u, \quad u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow du = x\,dx$$

$$\Rightarrow y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y(x) = ce^{-x^2/2} + 1$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μιγαδικοί αριθμοί



Με την εισαγωγή της φανταστικής μονάδας επιτυγχάνουμε την επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. **Οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν πληθώρα εφαρμογών στην Φυσική !!**

φανταστική μονάδα

$$\boxed{i^2=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+z^*) \\ b=\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}(z-z^*) \\ |z|=\sqrt{a^2+b^2} \\ \theta=\arg(z)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=a+bi \Leftrightarrow z=|z|e^{i\theta} \\ z^*=a-bi \Leftrightarrow z^*=|z|e^{-i\theta} \end{array}\right.$$

$$|z|^2=z\cdot z^*$$

Τύπος Euler

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$