Εισαγωγή στα ΣΗΕ

Δημέας Άρης Διάλεξη #2

04/10/2024

Βασισμένο στο βιβλίο

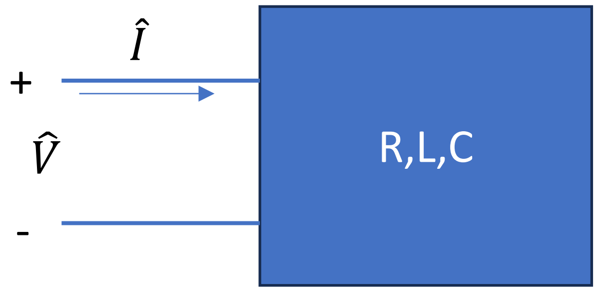
Εισαγωγή στα ΣΗΕ (Βουρνά και Κονταξή)

Περιεχόμενα

- Ενεργός και άεργος ισχύς
- Τριφασικά Συστήματα

Ενεργός και άεργος ισχύς

Μιγαδική ισχύς



- Έστω ένα γραμμικό παθητικό δίκτυο, δηλαδή ένα ηλεκτρικό φορτίο που αποτελείται από αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία
- Το φορτίο τροφοδοτείται από τάση $\hat{V}$ και ρεύμα $\hat{I}$
- Η μιγαδική ισχύς που απορροφάται από το δίκτυο ορίζεται ως:

$$\mathbf{S}=P+jQ=\hat{V}\hat{I}^{*} \quad (2.25)$$

- Από την προηγούμενη σχέση, βλέπουμε ότι η μιγαδική ισχύς έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος

Φαινόμενη ισχύς

- Έστω ότι το ρεύμα $\hat{I}$ είναι διάνυσμα αναφοράς ($\hat{I} = I\angle 0^o$) και η τάση $\widehat{\mathrm{V}}$ έχει πολική μορφή $\widehat{\mathrm{V}} = \mathrm{V}\angle\theta$
- Οπότε η (2.25) γίνεται **S**=P+jQ= $\hat{V}\hat{I}^*$= $\mathrm{V}I\angle\theta$ (2.26)
- Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος , δηλαδή το $\mathrm{V}I$ ονομάζεται φαινόμενη ισχύς
- Η φάση της μιγαδικής ισχύος είναι ίση με τη διαφορά φάσεων τάσης και ρεύματος
- Μετράται σε Volt-Ampere, συντομογραφικά VA, και έχει πολλαπλάσια: kVA(10^3 VA), MVA (10^6 VA)

Ενεργός και άεργος ισχύς

- Η **ενεργός ισχύς** ή **πραγματική ισχύς** ορίζεται ως το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ισχύος
- Οπότε δίδεται από την σχέση $P=Re\{\mathbf{S}\}=VIcos\theta$ (2.27)
  - Μονάδα μέτρησης: Watt (W), με πολλαπλάσια το kilowatt (kW) και το Megawatt(MW)

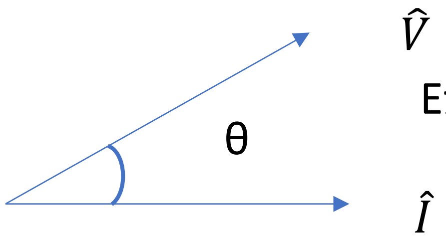
- Η **άεργος ισχύς** ορίζεται ως το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ισχύος
- Οπότε δίδεται από την σχέση $Q=Im\{\mathbf{S}\}=VIsin\theta$ (2.28)
  - Μονάδα μέτρησης: Volt-Ampere-reactive (Var), με πολλαπλάσια το kVar και το MVar

Συντελεστής ισχύος

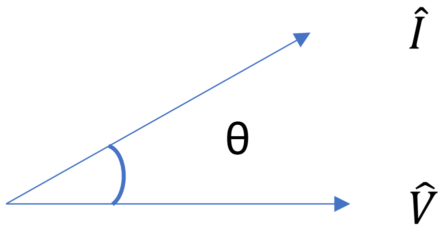
- Ορίζουμε ως γωνία συντελεστή ισχύος την φάση της μιγαδικής ισχύος δηλαδη την γωνία θ της **S**=$VI\angle\theta$
- Ορίζουμε ως συντελεστή ισχύος το συνημίτονο της γωνίας θ:

$$\Sigma I = \cos\theta \quad (2.29)$$

- Από το συνημίτονο δε φαίνεται αν η γωνία θ είναι θετική ή αρνητική
- Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζουμε τον ΣΙ ως εξής:
  - Επαγωγικός ΣΙ: θ>0, δηλαδή η τάση προηγείται του ρεύματος
  - Χωρητικός ΣΙ: θ<0, δηλαδή το ρεύμα προηγείται της τάσης



Επαγωγικός



Χωρητικός

Σχέση της μιγαδικής ισχύος **S κ**αι της σύνθετης αντίστασης Z

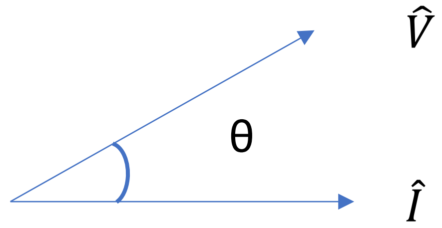
- Υπάρχει σχέση μεταξύ της μιγαδικής ισχύος και της σύνθετης αντίστασης ενός φορτίου
- Από τον ορισμό της **Z** (2.9) έχουμε

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\widehat{V}}{\hat{I}} = \frac{\mathrm{V}}{I} \angle\, \theta \ (2.30)$$

- Η γωνία του ΣΙ είναι ίδια με την φάση της σύνθετης αντίστασης του φορτίου

Επαγωγική φόρτιση

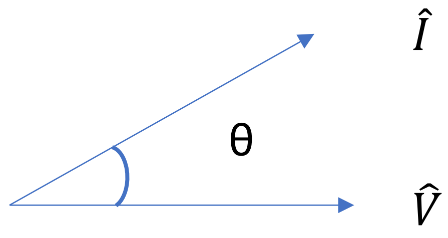
- Επαγωγική φόρτιση: όταν το φορτίο είναι επαγωγικό, η τάση προηγείται του ρεύματος, δηλαδή η γωνία θ είναι θετική και η άεργος ισχύς είναι θετική
  - Το επαγωγικό φορτίο απορροφά άεργο ισχύ
  - Ισοδύναμα: Το επαγωγικό φορτίο παράγει αρνητική άεργο ισχύ



Επαγωγική φόρτιση

Χωρητική φόρτιση

- Χωρητική φόρτιση: όταν το φορτίο είναι χωρητικό, η τάση ακολουθεί το ρεύμα, δηλαδή η γωνία θ είναι αρνητική και η άεργος ισχύς είναι αρνητική
    - Το χωρητικό φορτίο παράγει άεργο ισχύ
    - Ισοδύναμα: Το χωρητικό φορτίο απορροφά αρνητική άεργο ισχύ



Χωρητική φόρτιση

Ισχύς του φορτίου

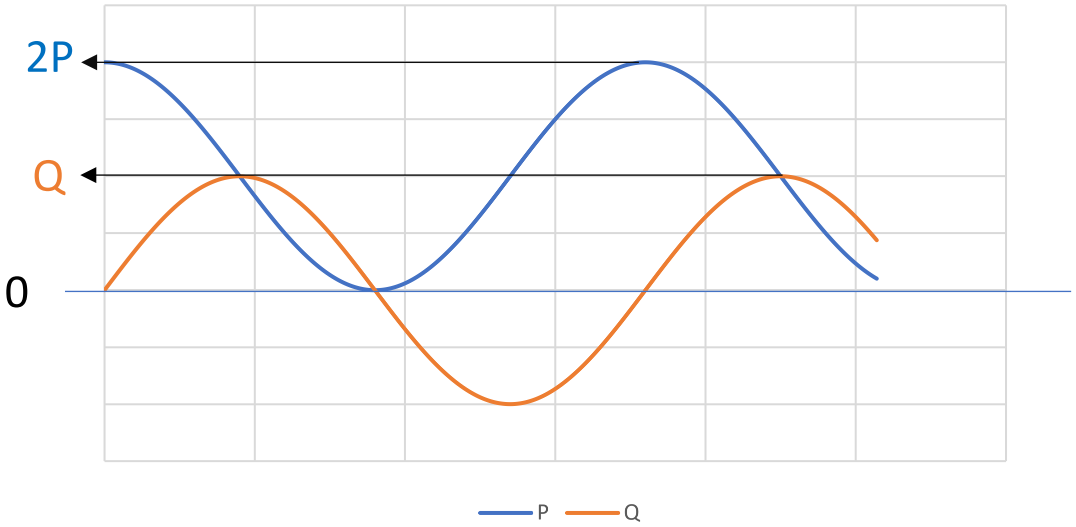
Η ισχύς που καταναλώνει το φορτίο συναρτήσει της σύνθετης αντίστασης αγωγιμότητας από την σχέση

$$\mathbf{S}=\widehat{V}\left(\frac{\widehat{V}}{\mathbf{Z}}\right)^{*}=\frac{\mathrm{V}^{2}}{\boldsymbol{Z}^{*}}=\mathrm{V}^{2}\,\boldsymbol{Y}^{*}\ (2.31)$$

Στιγμιαία ισχύς

- Η στιγμιαία ισχύς που απορροφά ένα γραμμικό παθητικό δίκτυο είναι:

$$p(t) = vi = 2VIcos(\omega t)cos(\omega t + \theta) = VIcos\theta + VIcos(2\omega t + \theta) =$$
$$VIcos\theta(1 + cos2\omega t) - VIsin\theta\ sin2\omega t = P\ (1 + cos2\omega t) - Q\ sin2\omega t$$



P $(1 + cos2\omega t)$=p(t)-q(t)

$q(t)$=- Q $sin2\omega t$

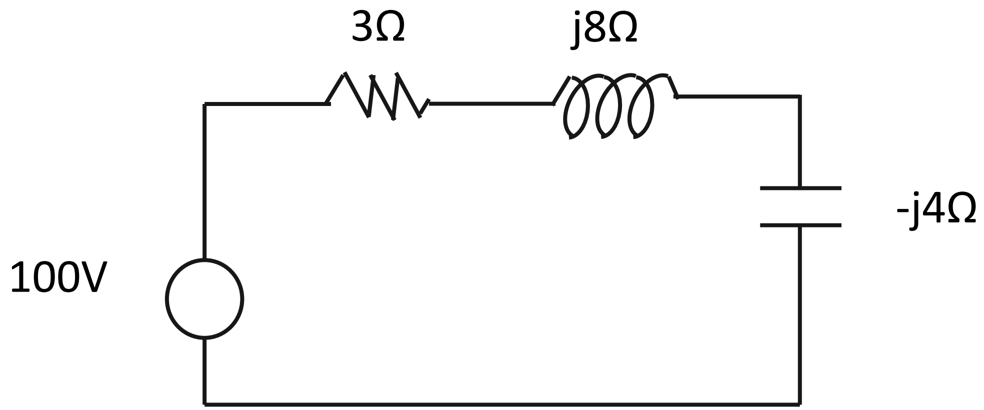
P=Re{**S**}=VIcosθ (2.27)
Q=Im{**S**}=VIsinθ (2.28)

Ενεργός Ισχύς

- Από την (2.26) προκύπτει ότι η ενεργός ισχύς είναι ίση με τη μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{0}^{T} p(t)dt \ (2.23)$$

Παράδειγμα 2.3.4



- Να υπολογιστεί η καταναλισκόμενη ισχύς συνολικά, και σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος
- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:
- Z=3+j8-j4=3+4j=5Ω$\angle 53.1^{o}$
- Το ρεύμα δίδεται από την σχέση
- $\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\boldsymbol{Z}}$= $\frac{100\mathrm{V}\angle 0^{o}}{5\Omega\angle 53.1^{o}}$=20A$\angle -53.1^{o}$
- Η μιγαδική ισχύς που απορροφάται είναι
- **S**= $\hat{V}\hat{I}^{*}$= $100\mathrm{V}\angle 0^{o}$* 20A$\angle 53.1^{o}$= 2000VA$\angle 53.1^{o}$ = 1200W+j1600Var

Παράδειγμα 2.3.4

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει η αντίσταση R είναι:

$$\boldsymbol{S}_R = \widehat{V_R}\hat{I}^* = R\hat{I}\mathrm{I} = \mathrm{R}I^2 = 1200W + j0$$

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει το πηνίο είναι:

$$\boldsymbol{S}_L = \widehat{V_L}\hat{I}^* = jX_L\hat{I}\hat{I}^* = jX_LI^2 = \text{j3200Var}$$

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει ο πυκνωτής είναι:

$$\boldsymbol{S}_C = \widehat{V_C}\hat{I}^* = jX_C\hat{I}\hat{I}^* = jX_CI^2 = \text{-j1600Var}$$

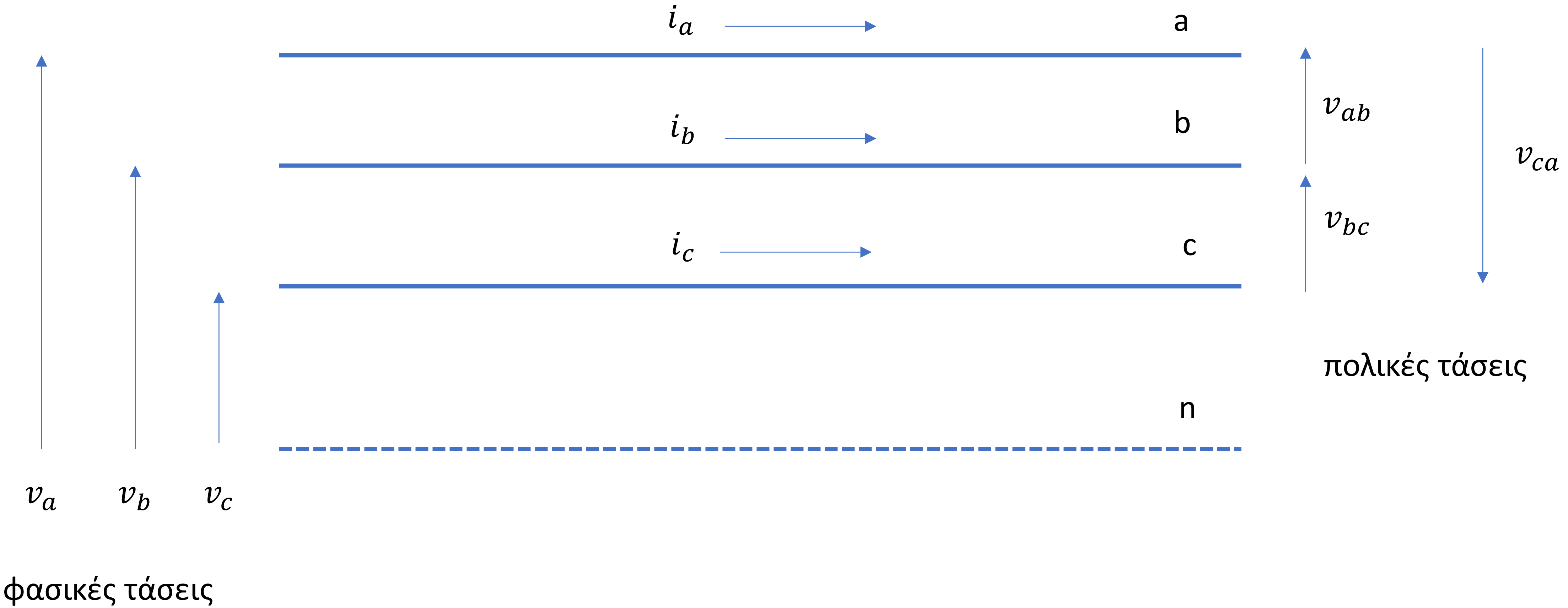
- Προφανώς

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{S}_R + \boldsymbol{S}_L + \boldsymbol{S}_C$$

Τριφασικά συστήματα: φασική και πολική τάση

- Θα εξετάσουμε συμμετρικά τριφασικά συστήματα
- Τα ρεύματα και οι τάσεις έχουν ίσα μέτρα και οι γωνίες τους διαφέρουν κατά 120^o
- $v_a = \sqrt{2}Vcos\omega t, i_a = \sqrt{2}Icos(\omega t - \theta)$
- $v_b = \sqrt{2}Vcos(\omega t - \frac{2\pi}{3}), i_b = \sqrt{2}Icos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \theta)$ (2.34)
- $v_c = \sqrt{2}Vcos(\omega t + \frac{2\pi}{3}), i_c = \sqrt{2}Icos(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \theta)$

Τριφασικά συστήματα



Μιγαδική Μορφή των τάσεων (φασιθέτες)

- οι φασικές τάσεις γράφονται σε μιγαδική μορφή ως:

$$\begin{aligned} \hat{V}_a &= V\angle 0^{\circ} \\ \hat{V}_b &= V\angle -120^{\circ} \\ \hat{V}_c &= V\angle 120^{\circ} \end{aligned} \qquad (2.35)$$

- Οι πολικές τάσεις μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\hat{V}_{ab} = \hat{V}_a - \hat{V}_b = V - \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V = \sqrt{3}V\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}V\angle 30°$$

$$\hat{V}_{bc} = \hat{V}_b - \hat{V}_c = \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V - \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V = \sqrt{3}V\angle -90°$$

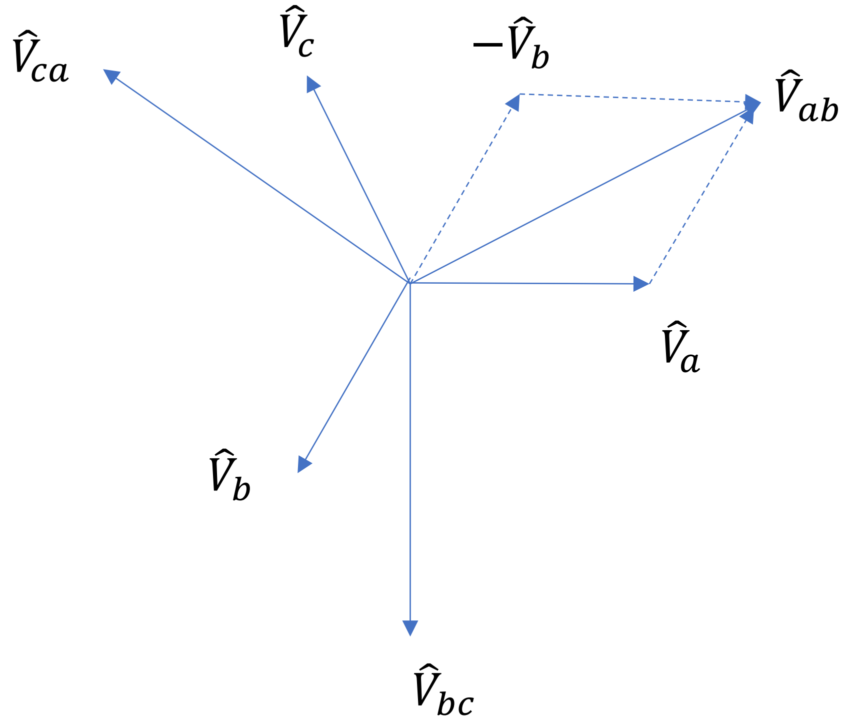
$$\hat{V}_{ca} = \hat{V}_c - \hat{V}_a = \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V - V = \sqrt{3}V\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}V\angle 150°$$

Στιγμιαίες τιμές των πολικών τάσεων

- Για τον υπολογισμό των στιγμιαίων τιμών θα χρησιμοποιήσουμε την εξής τριγωνομετρική ταυτότητα
- cosA-cosB=2sin $\frac{A+B}{2}$sin $\frac{A-B}{2}$
- Οπότε τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned} v_{ab} &= \sqrt{6}V cos(\omega t + \pi/6) \\ v_{bc} &= \sqrt{6}V cos(\omega t - \pi/2) \\ v_{ca} &= \sqrt{6}V cos(\omega t + 5\pi/6) \end{aligned} \qquad (2.37)$$

Διανυσματικό διάγραμμα



Φασικές τάσεις από τις πολικές

- Αν γνωρίζουμε τις πολικές τάσεις, μπορούν να προκύψουν οι φασικές τάσεις.
- Θεωρώντας

$$\hat{V}_a + \hat{V}_b + \hat{V}_c = 0 \quad (2.39)$$

- Τότε

$$\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca} = \hat{V}_a - \hat{V}_b - \left(\hat{V}_c - \hat{V}_a\right) = 3\hat{V}_a \quad (2.38)$$

- Οπότε

$$\begin{aligned} \hat{V}_a &= (\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca})/3 \\ \hat{V}_b &= (\hat{V}_{bc} - \hat{V}_{ab})/3 \quad (2.40) \\ \hat{V}_c &= (\hat{V}_{ca} - \hat{V}_{bc})/3 \end{aligned}$$

Συμμετρικό τριφασικό σύστημα,

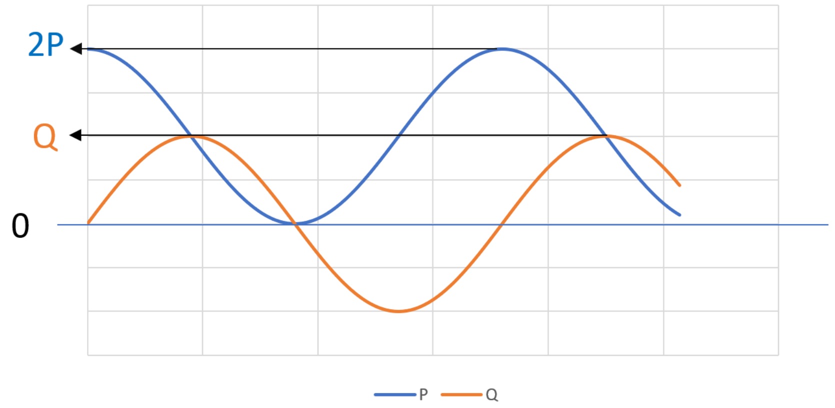
- Εφόσον δουλεύουμε με συμμετρικό τριφασικό σύστημα, όλες οι τάσεις είναι γνωστές αν ξέρουμε τη μία
- Οπότε δε χρειάζεται να υπολογίζουμε και τις τρεις φάσεις ξεχωριστά
- Χρειάζεται να συγκρατήσουμε είναι ότι η φασική τάση συνδέεται με την πολική τάση με την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{V}_{\pi} = \sqrt{3}\hat{V}_{\varphi}\angle +30^{o}$$

<u>Στις εφαρμογές μας θα θεωρούμε πάντα ότι η τάση είναι πολική, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.</u>

Τριφασική ισχύς

- Έχουμε δείξει ότι η ισχύς που ρέει σε μια μονοφασική γραμμή εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από δύο παλλόμενες συνιστώσες:
- Η συνιστώσα $p(t)$–qtt)έχει μέση τιμή ίση με την πραγματική (ενεργό) ισχύ Pκαι ίσο πλάτος ταλάντωσης
- Η συνιστώσα $q(t)$ έχει μέση τιμή μηδέν και πλάτος ταλάντωσης ίσο με την άεργο ισχύ Q



Συνολική ισχύς στις τρεις φάσεις

- Για την μονοφασική ισχύ είχαμε δείξει (έστω στη φάση α)
- $p_a(t) = vi = 2VIcos(\omega t)cos(\omega t + \theta) = VIcos\theta + VIcos(2\omega t + \theta)$
- Οπότε

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = VIcos\theta + VIcos(2\omega t + \theta) + VIcos\theta + VIcos(2\omega t - 4\pi/3 + \theta) + VIcos\theta + VIcos(2\omega t + 4\pi/3 + \theta)$$

$$= 3VIcos\theta$$

Συνολική τριφασική Ισχύς

- Η συνολικά μεταφερόμενη στιγμιαία ισχύς σε ένα τριφασικό σύστημα είναι:

$$P=3\,\mathrm{V}_{\varphi} I_L cos\theta = \sqrt{3}\mathrm{V}_{\pi} I_L cos\theta \quad (2.42)$$

- Όπου
- V_{φ}=V: ενεργός τιμή των φασικών τάσεων
- V_{π}= $\sqrt{3}$V: ενεργός τιμή των πολικών τάσεων
- I_L: ενεργός τιμή ρεύματος σε κάθε φάση της γραμμής

Τριφασική άεργος και τριφασική μιγαδική ισχύς

- Αντίστοιχα η τριφασική άεργος ισχύς Q ορίζεται σαν το άθροισμα του εύρους ταλάντωσης της στιγμιαίας αέργου ισχύος των τριών φάσεων (κατ’αναλογία προς τη μία φάση):

$$\text{P}=3\ \mathrm{V}_{\varphi} I_L sin\theta = \sqrt{3}\mathrm{V}_{\pi} I_L sin\theta\ (2.43)$$

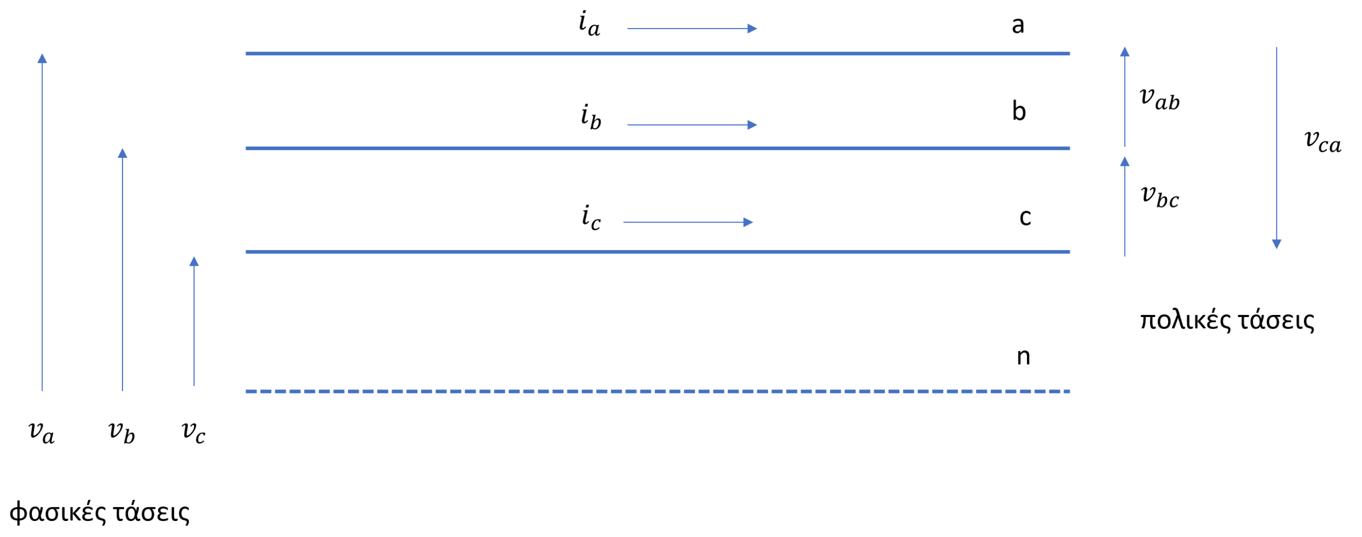
- Και η τριφασική μιγαδική ισχύς ορίζεται

$$\mathbf{S}=\text{P+jQ= }3\widehat{\mathrm{V}}_{\varphi}\widehat{I_L}^{*}\ (2.44)$$

<u>Το θ είναι η διαφορά μεταξύ φασικής(όχι πολικής) τάσης και ρεύματος</u>

Συνδεσμολογίες Αστέρα και Τρίγωνο

- Υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να συνδεθεί μία πηγή και ένα φορτίο:
  - Αστέρα
  - Τρίγωνο



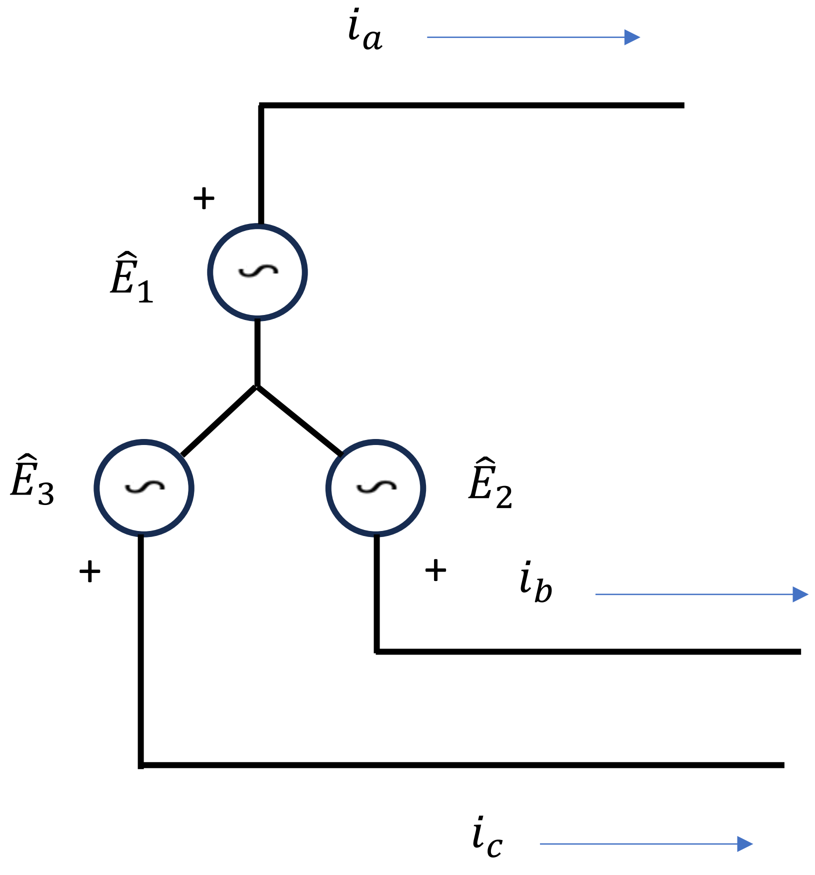
Σύνδεση Αστέρα

- Οι τάσεις $\hat{E}_1, \hat{E}_2 \; και \; \hat{E}_3$ (ηλεκτρεγερτική δύναμη, ΗΕΔ) ονομάζονται φάσεις της πηγής και συμβολίζονται με τους παραστατικούς μιγαδικούς αριθμούς:

$$\hat{E}_1 = E\angle 0^\circ$$
$$\hat{E}_2 = E\angle -120^\circ \qquad (2.46)$$
$$\hat{E}_3 = E\angle 120^\circ$$

- Τα ρεύματα που διαρρέουν τις φάσεις της πηγής είναι ίσα με τα ρεύματα που ρέουν στη γραμμή:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_a$$
$$\hat{I}_2 = \hat{I}_b \qquad (2.47)$$
$$\hat{I}_3 = \hat{I}_c$$



Ρεύματα στη συνδεσμολογία αστέρα

- Οι εξισώσεις (2.47) μπορούν να συμβολιστούν ως:

$$\hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{Y}} = \hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{L}} \quad (2.48)$$

- Όπου
- $\hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{Y}}$:ρεύμα μιας φάσης της πηγής συνδεδεμένης κατ’αστέρα
- $\hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{L}}$: ρεύμα της φάσης της γραμμής
- Μπορεί (αλλά όχι υποχρεωτικά) να γειώνεται ο ουδέτερος κόμβος. Η συνδεσμολογία αυτή (γειωμένος αστέρας) είναι διαδεδομένη σε σύγχρονες γεννήτριες

Τάσεις στη συνδεσμολογία αστέρα

- Πολικές τάσεις της γραμμής:

$$\hat{V}_{ab} = \sqrt{3}E\angle 30°$$
$$\hat{V}_{bc} = \sqrt{3}E\angle -90° \qquad (2.49)$$
$$\hat{V}_{ca} = \sqrt{3}E\angle 150°$$

- Αν συμβολίσουμε V_{π} με την ενεργό τιμή της πολικής τάσης και E_{Y} την ενεργό τιμή την ΗΕΔ μιας φάσης, τότε

$$\mathrm{V}_{\pi} = \sqrt{3}\mathrm{E}_{Y} \quad (2.50)$$

Ισχύς στην συνδεσμολογία αστέρα

- Σύμφωνα με την 2.44

$$\mathbf{S} = 3\widehat{\mathrm{V}}_{\varphi}\widehat{I_L}^{*} = 3\widehat{\mathrm{V}}_{\mathrm{Y}}\widehat{I_Y}^{*} \quad (2.52)$$

- Θεωρώντας και την $\hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{Y}} = \hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{L}}$ (2.48) και ότι $\widehat{\mathrm{V}}_{\varphi} = \hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{Y}}$, η φαινόμενη ισχύς είναι

$$\mathrm{S} = 3V_{\varphi}\mathrm{I_L} = \sqrt{3}V_{\pi}\mathrm{I_L}$$

Συνδεσμολογία τριγώνου

- Στη συνδεσμολογία τριγώνου, η πολική τάση της γραμμής είναι ίση με την ΗΕΔ κάθε φάσης της πηγής. Άρα για τις ενεργές τιμές ισχύει πως:

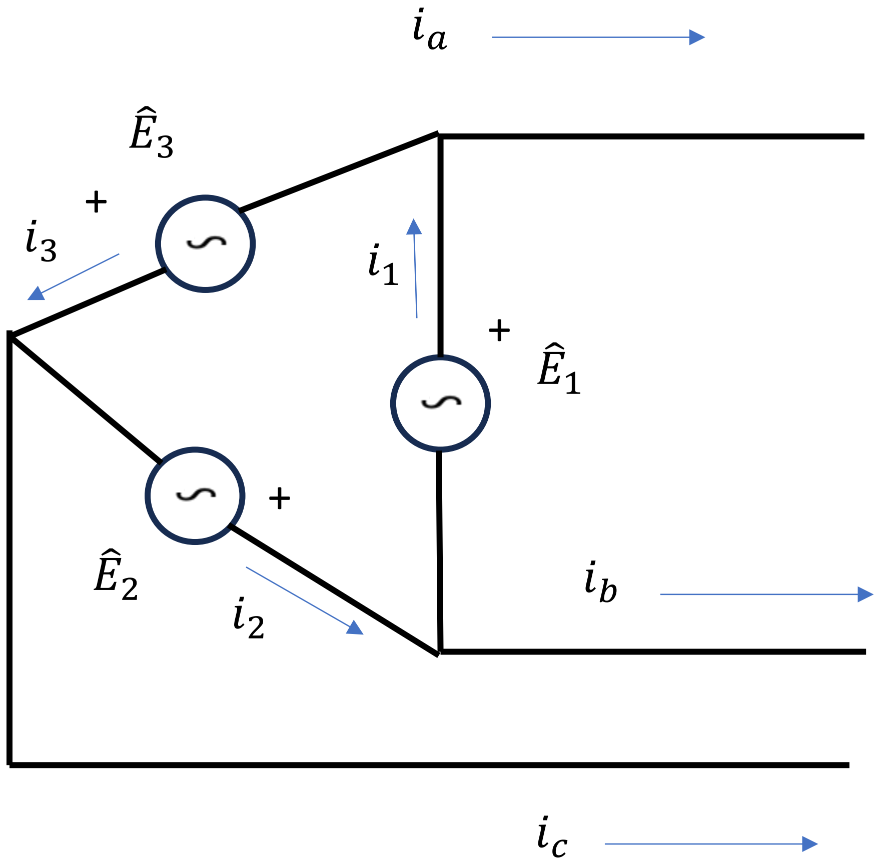
$$V_\pi = E_\Delta \quad (2.53)$$

- Η φασική τάση στη γραμμή είναι:

$$\hat{V}_a = \frac{1}{3}(\hat{E}_1 - \hat{E}_3) = \frac{E_\Delta}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{E_\Delta}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{E_\Delta}{\sqrt{3}}\angle -30°$$

- Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της (2.40), η οποία λέει ότι $\hat{V}_a = (\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca})/3$
- Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της (2.35), η οποία λέει ότι $\hat{V}_a = V\angle 0°$ και $\hat{V}_c = V\angle + 120°$
- Συμπέρασμα: αν μια τριφασική πηγή με ΗΕΔ E_Δ ανά φάση συνδεθεί κατά τρίγωνο, το rms της φασικής τάσης της γραμμής είναι $E_\Delta/\sqrt{3}$:

$$V_\varphi = \frac{E_\Delta}{\sqrt{3}} \quad (2.54)$$



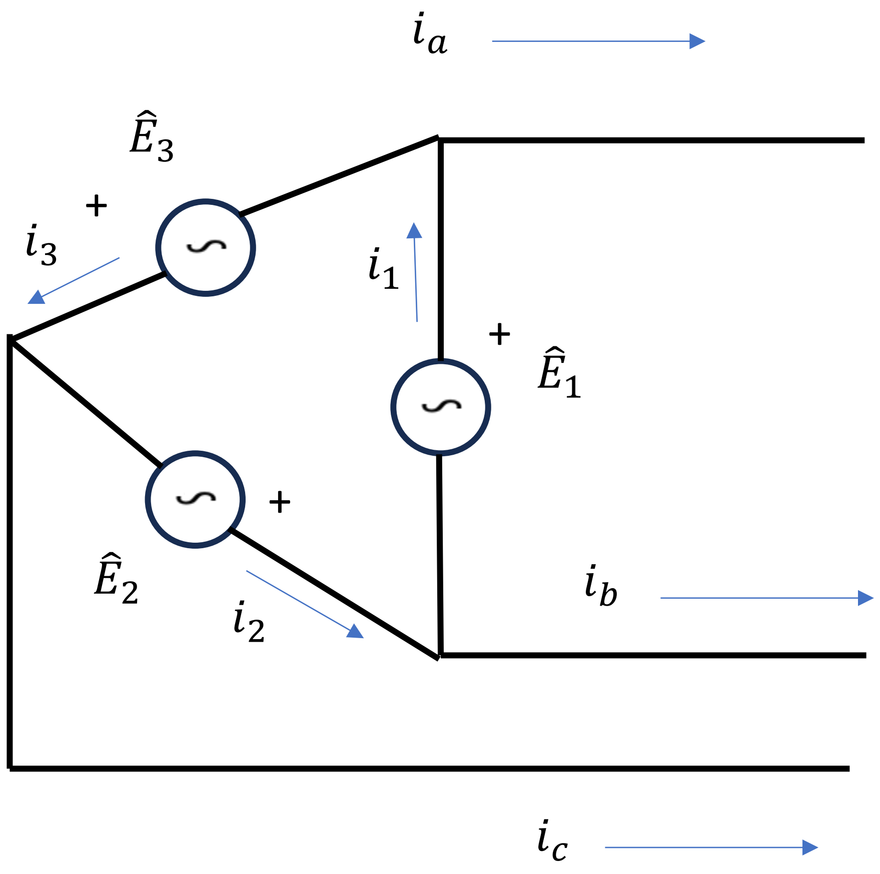
Ρεύματα συνδεσμολογίας τριγώνου

- Όταν μια πηγή συνδέεται κατά τρίγωνο, το ρεύμα κάθε φάσης της πηγής δεν είναι πλέον ίσο με το ρεύμα της γραμμής.

$$\begin{aligned} \hat{I}_a &= \hat{I}_1 - \hat{I}_3 \\ \hat{I}_b &= \hat{I}_2 - \hat{I}_1 \\ \hat{I}_c &= \hat{I}_3 - \hat{I}_2 \end{aligned} \qquad (2.55)$$

- Συμβολίζοντας με φ τη διαφορά φάσης του φασικού ρεύματος της πηγής ως προς την τάση της πηγή

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= I\angle\varphi \\ \hat{I}_2 &= I\angle\varphi - 120° \\ \hat{I}_3 &= I\angle\varphi + 120° \end{aligned} \qquad (2.56)$$



Ρεύματα στη συνδεσμολογία τριγώνου

- Από την (2.56) και την (2.55), έχουμε:

$$\hat{I}_a = \hat{I}_1 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \sqrt{3}\hat{I}_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\hat{I}_1 \angle - 30°$$

- Όταν η πηγή συνδέεται κατά τρίγωνο, το ρεύμα σε κάθε φάση της γραμμής είναι 3φορές μεγαλύτερο από το ρεύμα που διαρρέει τις φάσεις της πηγής. Συγκεκριμένα, για το ρεύμα γραμμής $\hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{L}}$ ισχύει:

$$\hat{\mathrm{I}}_{\mathrm{L}} = \sqrt{3}\ \hat{\mathrm{I}}_{\Delta}\ (2.57)$$

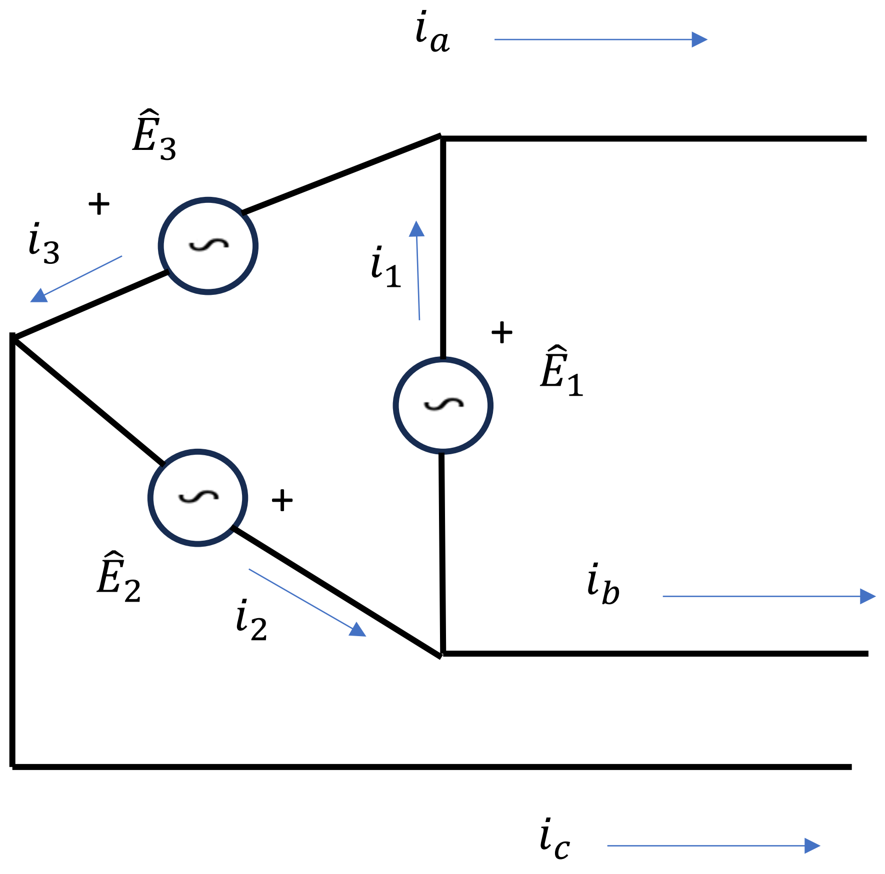
Ισχύς συνδεσμολογίας τριγώνου

- Η μιγαδική ισχύς που παράγει η πηγή είναι **S**= $3\hat{E}_1\hat{I}_1^{\ *}$
- Από την προηγούμενη ανάλυσή μας γνωρίζουμε ότι
  - $\hat{V}_a = \frac{\hat{E}_1}{\sqrt{3}}\angle -30°$ και
  - $\hat{I}_a = \sqrt{3}\hat{I}_1\angle 30°$
- Άρα έχουμε:

$$\mathbf{S} = 3\hat{E}_1\hat{I}_1^* = 3\hat{V}_a\hat{I}_a^* \qquad (2.58)$$

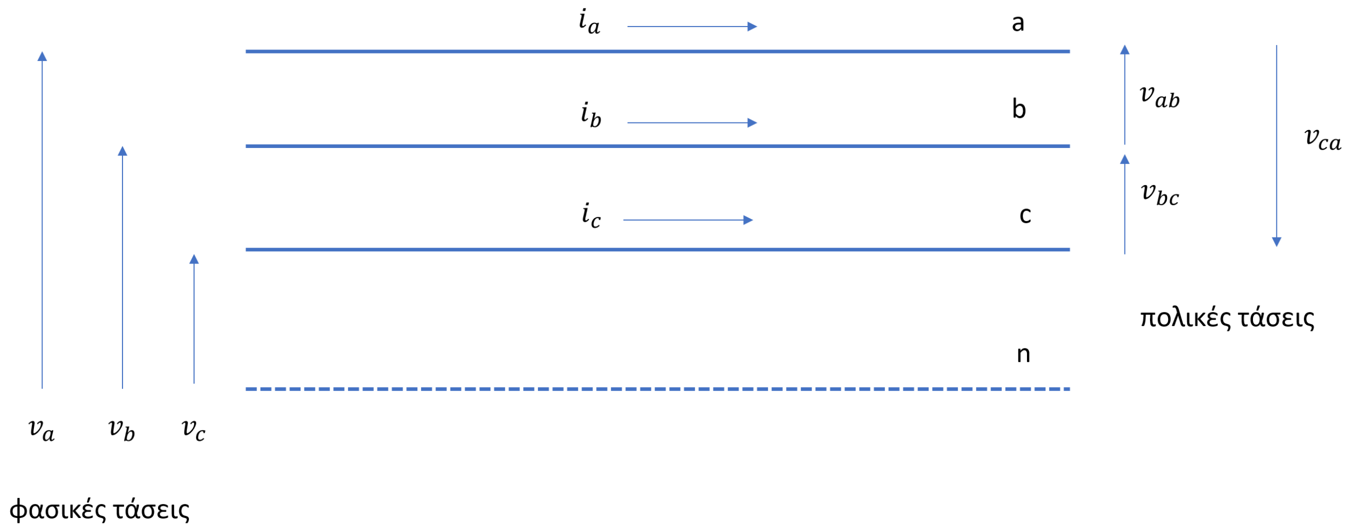
- Άρα η φαινόμενη ισχύς μπορεί να εκφραστεί ως

$$S = 3E_\Delta I_\Delta = \sqrt{3}V_\pi I_L \qquad (2.59)$$



Συνδεσμολογία φορτίου

- Έστω τώρα ότι στο δεξί μέρος του κυκλώματος έχουμε ένα ηλεκτρικό φορτίο που αποτελείται από τρεις σύνθετες αντιστάσεις $\mathbf{Z}$, ίσες μεταξύ τους
- Όπως και στην περίπτωση της πηγής, οι αντιστάσεις μπορούν να συνδεθούν σχηματίζοντας είτε αστέρα είτε τρίγωνο



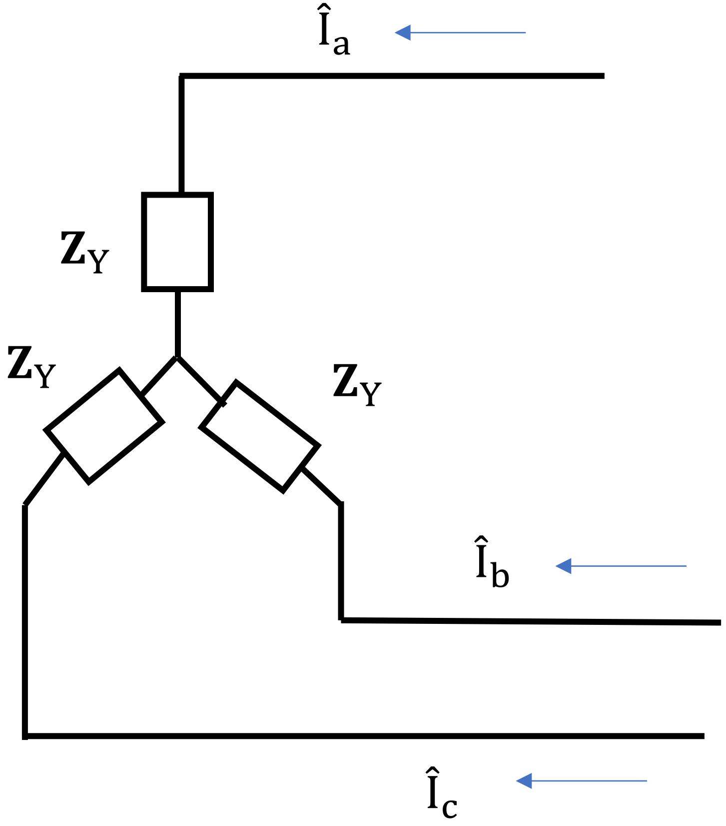
Συνδεσμολογία φορτίου σε αστέρα: ρεύμα

- Στη συνδεσμολογία αστέρα, το ρεύμα σε κάθε αντίσταση είναι ίσο με το ρεύμα της γραμμής
- Η τάση στα άκρα κάθε αντίστασης είναι ίση με τη φασική τάση
- Βάσει του ορισμού της σύνθετης αντίστασης:

$$\hat{I}_a = \frac{\hat{V}_a}{\mathbf{Z}_Y} \quad (2.61)$$

- Το οποίο λόγω συμμετρίας είναι αρκετό για να περιγράψουμε πλήρως τις τρεις φάσεις. Συμβολίζοντας με I_L την ενεργό τιμή του ρεύματος γραμμής και με V_φ την ενεργό τιμή της φασικής τάσης, έχουμε:

$$I_L = \frac{V_\varphi}{Z_Y} \quad (2.60)$$



Συνδεσμολογία φορτίου σε αστέρα: ισχύς

- Η μιγαδική ισχύς που *καταναλώνει* ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεδεμένο κατ’αστέρα υπολογίζεται συναρτήσει της σύνθετης αντίστασης, όπως στην (2.31):

$$\mathbf{S} = 3\hat{V}_\varphi \hat{I}_L^* = \frac{3V_\varphi^2}{\mathbf{Z}_Y^*} = \frac{V_\pi^2}{\mathbf{Z}_Y^*} \quad (2.62)$$

όπου θυμόμαστε από τη (2.41) ότι η φασική και η πολική τάση έχουν την ακόλουθη σχέση: $\hat{V}_\pi = \sqrt{3}\hat{V}_\varphi \angle + 30^\circ$

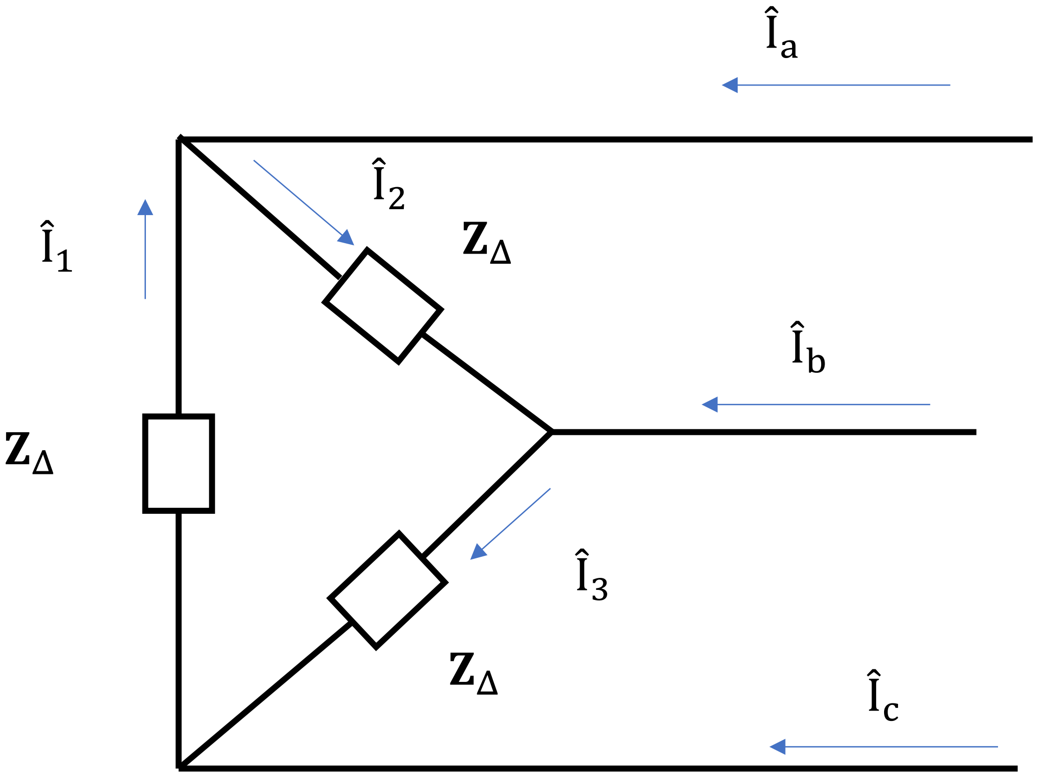
Συνδεσμολογία φορτίου κατά τρίγωνο: ρεύμα

- Στη συνδεσμολογία τριγώνου, η τάση που εφαρμόζεται σε κάθε αντίσταση είναι η *πολική* τάση
- Άρα, από άποψης ενεργών τιμών, το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντίσταση είναι:

$$I_{\Delta} = \frac{V_{\pi}}{Z_{\Delta}} \quad (2.63)$$

- Θυμόμαστε από τον τύπο (2.57) ότι $I_L = \sqrt{3} I_{\Delta}$
- Αν και ο τύπος (2.57) είχε εξαχθεί για την περίπτωση *πηγής* σε συνδεσμολογία τριγώνου, συνεχίζει να ισχύει για την περίπτωση *φορτίου* σε συνδεσμολογία τριγώνου δεδομένης της συμμετρίας των ρευμάτων των φάσεων
- Άρα από την (2.63) και την (2.41) (πάλι, η (2.41) λέει ότι $\hat{V}_{\pi} = \sqrt{3}\hat{V}_{\varphi} \angle + 30^{\circ}$):

$$I_L = \sqrt{3} I_{\Delta} = \frac{3V_{\varphi}}{Z_{\Delta}} \quad (2.64)$$



Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για πηγές τάσης

- Μια πηγή σε συνδεσμολογία τριγώνου μπορεί να μετατραπεί σε μια ισοδύναμη πηγή συνδεσμολογίας αστέρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.54)
- Η (2.54) λέει ότι $V_\varphi = \frac{E_\Delta}{\sqrt{3}}$
- Στην περίπτωσή μας, έχουμε ότι η φασική τάση είναι η τάση της συνδεσμολογίας τριγώνου E_Y.

$$E_Y = \frac{E_\Delta}{\sqrt{3}} \quad (2.65)$$

- Η ισοδυναμία σημαίνει ότι παράγεται η ίδια ισχύς και από τις δύο συνδεσμολογίες αν το ρεύμα γραμμής είναι I_L, γιατί οι τάσεις μεταξύ των φάσεων της γραμμής είναι ίσες

Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για αντιστάσεις

- Έστω $\mathbf{Z}_{12}$, $\mathbf{Z}_{23}$, $\mathbf{Z}_{31}$ οι σύνθετες αντιστάσεις συνδεσμολογίας κατά τρίγωνο
- Και ας συμβολίσουμε με $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ τις ισοδύναμες σύνθετες αντιστάσεις συνδεσμολογίας κατ’αστέρα
- Γνωρίζουμε από τη θεωρία κυκλωμάτων πως:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{31}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}} \\
\mathbf{Z}_2 &= \frac{\mathbf{Z}_{23}\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}} \\
\mathbf{Z}_3 &= \frac{\mathbf{Z}_{31}\mathbf{Z}_{23}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για αντιστάσεις

- Στην περίπτωση συμμετρικού συστήματος, έχουμε τρεις ίσες αντιστάσεις στη συνδεσμολογία τριγώνου:

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{31} = \mathbf{Z}_{\Delta}$$

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.66), έχουμε ότι είναι ισοδύναμες με τρεις ίσες αντιστάσεις συνδεδεμένες κατ᾽αστέρα, όπου:

$$\mathbf{Z}_{Y} = \frac{\mathbf{Z}_{\Delta}}{3} \quad (2.67)$$

- Η ισοδυναμία σημαίνει πως, αν εφαρμοστεί η ίδια τάση σε κάθε φάση της γραμμής, το ρεύμα γραμμής θα είναι το ίδιο και στις δύο συνδεσμολογίες
- Η ισχύς που καταναλώνεται και στις δύο συνδεσμολογίες είναι:

$$\mathbf{S} = \frac{V_{\pi}^{2}}{\mathbf{Z}_{Y}^{*}} = 3\,\frac{V_{\pi}^{2}}{\mathbf{Z}_{\Delta}^{*}} \quad (2.68)$$

- Η πρώτη ισότητα είναι η (2.62)
- Και η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την (2.67)

Χρήσιμες Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $\cos(a+b) = cosa \cdot cosb - sina \cdot sinb$
- $\sin(a+b) = sina \cdot cosb - sinb \cdot cosa$
- $cosa \cdot cosb = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $cosa - cosb = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

Μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές τιμές

Μοίρες	Rad	cos	sin
30	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}/2$	0.5
45	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\frac{\pi}{3}$	0.5	$\sqrt{3}/2$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	-0.5	$\sqrt{3}/2$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}/2$	0.5
180	π	-1	0