Εισαγωγή στα ΣΗΕ

Δημέας Άρης Διάλεξη #1

02/10/2024

Βασισμένο στο βιβλίο

Εισαγωγή στα ΣΗΕ (Βουρνά και Κονταξή)

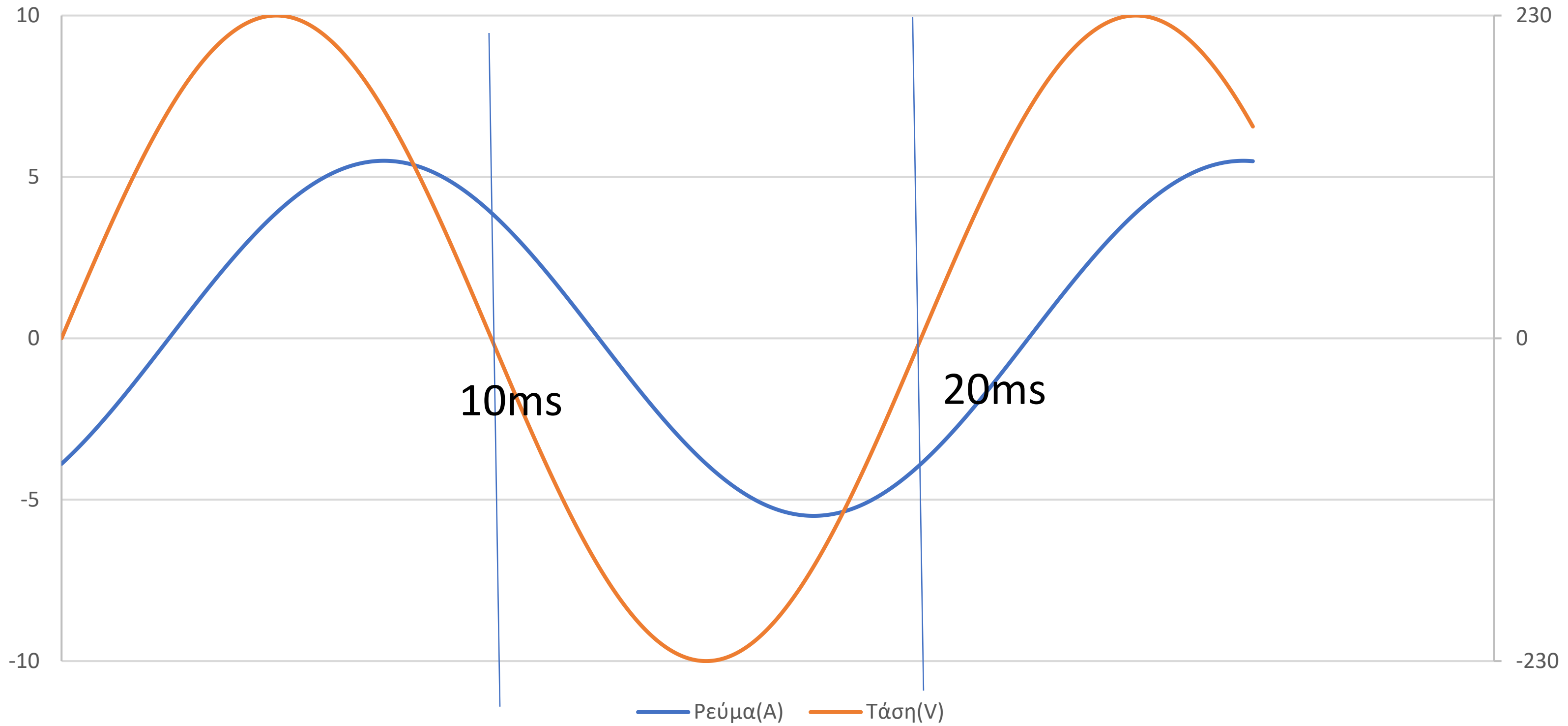
Περιεχόμενα

- Παραστατικοί Μιγαδικοί Αριθμοί
- Σύνθετες Αντιστάσεις Παθητικών Στοιχείων
- Ενεργός και Άεργος Ισχύς

Παραστατικοί Μιγαδικοί Αριθμοί

- Έστω η γενική ημιτονοειδής συνάρτηση
$$f(t) = F_{max} \cos(\omega t + \varphi) \ (2.1)$$
- Μπορεί να εκφράζει ρεύμα ή τάση
- F_{max} : η μέγιστη τιμή της συνάρτησης
- ω : η κυκλική συχνότητα
- φ : η γωνία φάσης

Παράδειγμα



- Συχνότητα 50Hz (περίοδος 20ms)=> ω=2πf=100π
- Τάση: $V(t) = 230V sin(\omega t) = 230V cos(\omega t + 90^o) \Rightarrow V_{max} = 230V, \varphi = 90^o$
- Ρεύμα: $\mathrm{I}(t) = 5.5\mathrm{A} sin(\omega t - 45^o) = 230V cos(\omega t + 45^o) \Rightarrow \mathrm{I}_{max} = 230V, \varphi = 45^o$

Ταυτότητα Euler

- Θεωρούμε ότι στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας η κυκλική συχνότητα ω παραμένει σταθερή
- Η συνάρτηση f(t) μπορεί να οριστεί από την μέγιστη ισχύ και τη γωνία φάσης χρησιμοποιώντας την μιγαδική αναπαράσταση
- Ταυτότητα του Euler: $e^{i\theta} = cos\theta + jsin\theta$ (2.2)
- Άρα η $f(t) = F_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ (2.1) είναι το πραγματικό μέρος της (2.2) δηλαδή

$$f(t) = \mathrm{Re}\left\langle F_{max} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \right\rangle (2.3)$$

Ενεργός ή ενδεικνύμενη τιμή (rms)

- Η ενεργός ή ενδεικνύμενη τιμή της f δίδεται από την σχέση

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt} = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

- Σημείωση: $cosa \cdot cosb = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$=> $cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

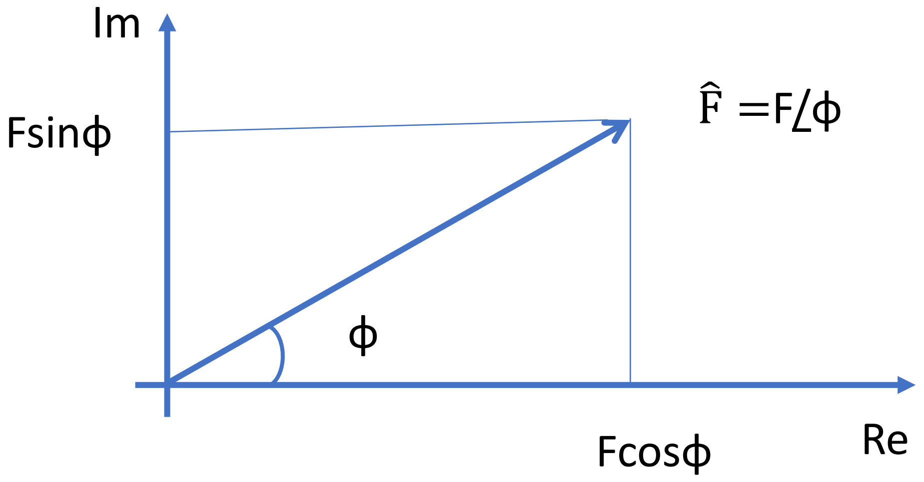
Παραστατικός μιγαδικός αριθμός και καρτεσιανή μορφή

- Ορίζεται ως παραστατικός μιγαδικός αριθμός (φασιθέτης, phasor) της $f(t)$ ο:

$$\hat{\mathrm{F}} = Fe^{j\varphi} = \mathrm{F}\angle\phi \quad (2.5)$$

- Η καρτεσιανή μορφή είναι f(t) είναι

$$\hat{\mathrm{F}} = F(cos\varphi + jsin\varphi) \ (2.6)$$



Συμβολισμός Μεγεθών

Σύμβολο	Περιγραφή
v,i,e,p	Στιγμιαία τιμής τάσεων, ρεύματος, κλπ
V,I,E	Ενεργός (rms)
$\widehat{\mathrm{V}}$, $\hat{\mathrm{I}}$, $\widehat{\mathrm{E}}$	Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί
Z,S	Σύνθετη αντίσταση, μιγαδική ισχύς
Z,S	Μέτρο σύνθετης αντίστασης, φαινόμενη ισχύς

Η σύνθετη αντίσταση και η μιγαδική ισχύς θα οριστούν στη συνέχεια

Παράδειγμα (2.1.2)(α)

- Να γραφεί σε μιγαδική (διανυσματική) μορφή η εναλλασσόμενη τάση v(t)=100Vcos(100πt-π/6)
- Βάσει της (2.4) $\left(F = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}}\right)$ η rms τιμή είναι V= $\frac{100}{\sqrt{2}}V = 70.7V$
- Οπότε $\widehat{\mathrm{V}}$ =70.7∠- 30^o

Παράδειγμα (2.1.2)(β)

- Γράψτε σε ημιτονοειδή μορφή τη διανυσματική παράσταση $\hat{\mathrm{I}} =$100A∠20^{o}

Βάσει της (2.3) $f(t) = \mathrm{Re}\langle F_{max} e^{j\varphi} e^{j\omega t}\rangle$ έχουμε

i(t)=100 $\sqrt{2}$A cos(ωt+ 20^{o})

Παράδειγμα (2.1.2)(γ)

- Προσθέστε δύο ημιτονοειδείς συναρτήσεις ίδιας συχνότητας χρησιμοποιώντας τις διανυσματικές παραστάσεις
- Έστω οι συναρτήσεις:

$$\mathrm{a(t)} = \sqrt{2}Acos(\omega t + a) \text{ και } \mathrm{\beta(t)} = \sqrt{2}\mathrm{B}cos(\omega t + \beta)$$

- Το άθροισμα θα είναι c(t)=a(t)+b(t)
- Χρησιμοποιώντας την 2.3: $f(t) = \mathrm{Re}\langle F_{max}e^{i\varphi}e^{j\omega t}\rangle$ έχουμε

$$c(t) = \mathrm{Re}\left\langle \sqrt{2}Ae^{ja}e^{j\omega t} + \sqrt{2}Be^{ja}e^{j\omega t} \right\rangle = \mathrm{Re}\left\langle \sqrt{2}e^{j\omega t}(\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}) \right\rangle$$

$$= \mathrm{Re}\left\langle \sqrt{2}e^{j\omega t}\hat{\mathrm{C}} \right\rangle$$

Όπου $\hat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}$

Πρακτικά λέμε ότι με την χρήση παραστατικών μιγαδικών αριθμών απλοποιούμε πάρα πολύ τις πράξεις

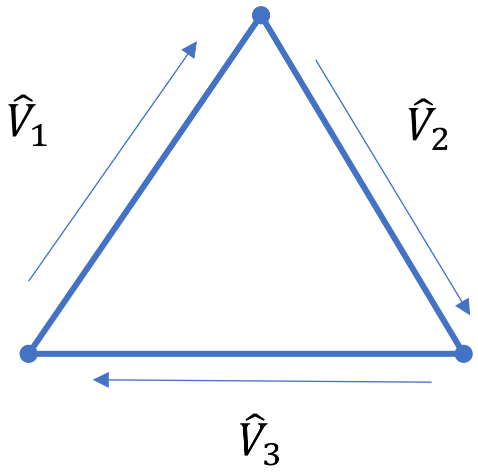
Νόμοι Kirchhoff

- Στο προηγούμενο παράδειγμα (2.1.2-γ) δείξαμε ότι τα αθροίσματα ημιτονοειδών συναρτήσεων είναι ισοδύναμα με τα αθροίσματα των φασιθετών τους
- Άρα, σε κυκλώματα με ημιτονοειδή σήματα ίσης συχνότητας, μπορούμε να εκφράσουμε διανυσματικά τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff

Νόμος Τάσεων του Kirchhoff

- Νόμος Τάσεων: το άθροισμα πτώσεων τάσεων κατά μήκος κάθε βρόχου ενός κυκλώματος είναι μηδέν:

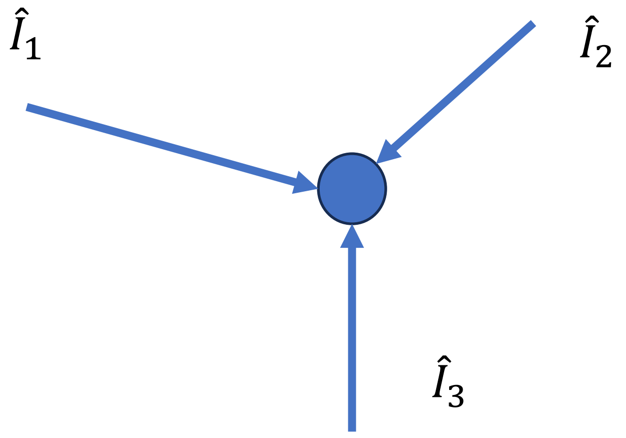
$$\sum_i \widehat{V_i}=0$$



Νόμος ρευμάτων

- Νόμος ρευμάτων: το άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος είναι μηδέν:

$$\sum_i \widehat{I_i}=0$$

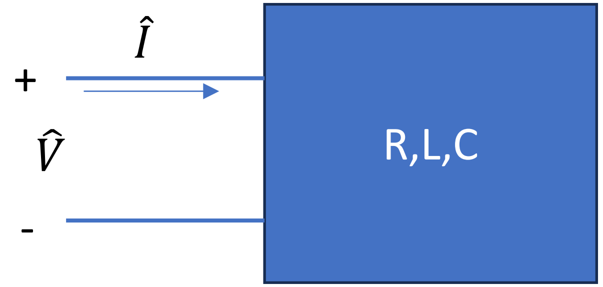


Σύνθετες αντιστάσεις παθητικών στοιχείων

Σύνθετη αντίσταση

- Η σύνθετη αντίσταση ενός γραμμικού παθητικού δικτύου που αποτελείται από ωμικές αντιστάσεις, πηνία και πυκνωτές ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = R + jX \quad (2.9)$$



- $\hat{V}$: μιγαδική τάση στα άκρα του στοιχείου
- $\hat{I}$: ρεύμα που διαρρέει το στοιχείο
- R: πραγματικό μέρος σύνθετης αντίστασης, ισοδύναμη ωμική αντίσταση
- X: φανταστικό μέρος σύνθεσης αντίστασης, επαγωγική αντίδραση

Νόμος του Ohm για αυτεπαγωγές

- Νόμος του Ohm για πηνίο με αυτεπαγωγή L:

$$v = L\frac{di}{dt} \quad (2.10)$$

- Αν το ρεύμα είναι ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$\mathrm{i}(t) = \mathrm{Re}\left\langle \sqrt{2}e^{j\omega t}\hat{I}\right\rangle \quad (2.11)$$

- Από τις 2.10 και 2.11 προκύπτει
- $v = L\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left\langle \sqrt{2}e^{j\omega t}\hat{I}\right\rangle = \mathrm{Re}\left\langle \sqrt{2}e^{j\omega t}j\omega tL\hat{I}\right\rangle$
- Οπότε τελικά:

$$\widehat{\mathrm{V}} = j\omega L\hat{I} \quad (2.12)$$

Σύνθετη αντίσταση αυτεπαγωγής

- Από την (2.12) έχουμε ότι η σύνθετη αντίσταση ενός πηνίου είναι:

$$\boldsymbol{Z}_L = j\omega\mathrm{L} \quad (2.13)$$

- Άρα ένα ιδανικό πηνίο (αυτεπαγωγή) έχει
  - μηδενική ωμική αντίσταση
  - επαγωγική αντίδραση ίση με ωL

Νόμος του Ohm για ωμικές αντιστάσεις

- Νόμος του Ohm για ωμική αντίσταση R:

$$v = Ri \quad (2.14)$$

- Αντικαθιστώντας το ρεύμα από την εξίσωση (2.11):
- $v = R\mathrm{Re}\left\langle\sqrt{2}e^{j\omega t}\hat{I}\right\rangle = \mathrm{Re}\left\langle\sqrt{2}e^{j\omega t}R\hat{I}\right\rangle$
- Οπότε τελικά:

$$\widehat{\mathrm{V}} = R\hat{I} \quad (2.15)$$

Σύνθετη αντίσταση ωμικής αντίστασης

- Από την (2.15):

$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}} = R \ (2.16)$$

- Άρα μία ιδανική αντίσταση έχει
  - ωμική αντίσταση R
  - επαγωγική αντίδραση ίση με μηδέν

Νόμος του Ohm για πυκνωτές

- Νόμος του Ohm για πυκνωτή C:

$$\text{i}= C\,\frac{dv}{dt} \quad (2.17)$$

- Αν τάση είναι ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$v(t) = \text{Re}\left\langle \sqrt{2} e^{j\omega t} \hat{V} \right\rangle \quad (2.18)$$

- Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση έχουμε:
- $\text{i}= C\,\frac{d}{dt}\,\text{Re}\left\langle \sqrt{2} e^{j\omega t} \hat{V} \right\rangle = \text{Re}\left\langle \sqrt{2} e^{j\omega t} j\omega C \hat{V} \right\rangle$
- Οπότε τελικά:

$$\hat{I} = \text{j}\omega\text{C}\hat{V} \quad (2.19)$$

Σύνθετη αντίσταση πυκνωτή

- Από την (2.19):

$$\boldsymbol{Z}_C = \frac{1}{j\omega \mathrm{C}} = -j\,\frac{1}{\omega \mathrm{C}} \,(2.20)$$

- Άρα ένας ιδανικός πυκνωτής έχει
  - μηδενική ωμική αντίσταση
  - αρνητική επαγωγική αντίδραση ίση με - $\frac{1}{\omega \mathrm{C}}$

Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

- Η σύνθετη (ή μιγαδική) αγωγιμότητα ενός δικτύου είναι το αντίστροφο της σύνθετης που ορίστηκε στη (2.9):

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{V}} = \text{G+jB} \quad (2.21)$$

- G: πραγματικό μέρος (ωμική αγωγιμότητα)
- B: φανταστικό μέρος (χωρητική αγωγιμότητα)

Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

- Αντικαθιστώντας στη (2.21) από την ($\boldsymbol{Z} = \frac{\widehat{V}}{\hat{I}}$=R+jX 2.9):

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\text{R+jX}} = \frac{R}{R^2+X^2}\text{-j}\ \frac{X}{R^2+X^2}\ (2.22)$$

- Άρα η ωμική αγωγιμότητα είναι:

$$\text{G=Re}(\mathbf{Y})\text{=}\frac{R}{R^2+X^2}\ (2.23)$$

- Και η χωρητική αγωγιμότητα είναι:

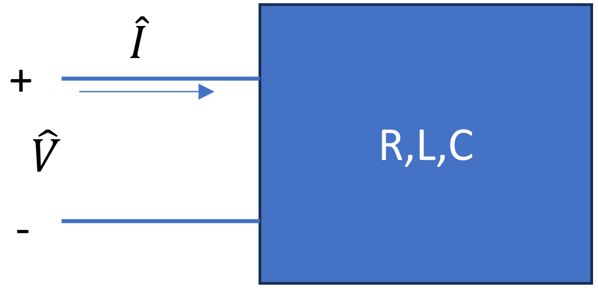
$$\text{B=Im}(\mathbf{Y})\text{= -}\ \frac{X}{R^2+X^2}\ (2.24)$$

- Από την (2.24), παρατηρούμε ότι μια αυτεπαγωγή έχει αρνητική χωρητική αγωγιμότητα (B < 0)

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{x_1 + j y_1}{x_2 + j y_2} = \frac{(x_1 + j y_1)\cdot(x_2 - j y_2)}{(x_2 + j y_2)\cdot(x_2 - j y_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ενεργός και άεργος ισχύς

Μιγαδική ισχύς



- Έστω ένα γραμμικό παθητικό δίκτυο, δηλαδή ένα ηλεκτρικό φορτίο που αποτελείται από αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία
- Το φορτίο τροφοδοτείται από τάση $\hat{V}$ και ρεύμα $\hat{I}$
- Η μιγαδική ισχύς που απορροφάται από το δίκτυο ορίζεται ως:

$$S=P+jQ=\hat{V}\hat{I}^* \quad (2.25)$$

- Από την προηγούμενη σχέση, βλέπουμε ότι η μιγαδική ισχύς έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος

Χρήσιμες Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $\cos(a+b) = cosa \cdot cosb - sina \cdot sinb$
- $\sin(a+b) = sina \cdot cosb - sinb \cdot cosa$
- $cosa \cdot cosb = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $cosa - cosb = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

Μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές τιμές

Μοίρες	Rad	cos	sin
30	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}/2$	0.5
45	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\frac{\pi}{3}$	0.5	$\sqrt{3}/2$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	-0.5	$\sqrt{3}/2$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}/2$	0.5
180	π	-1	0