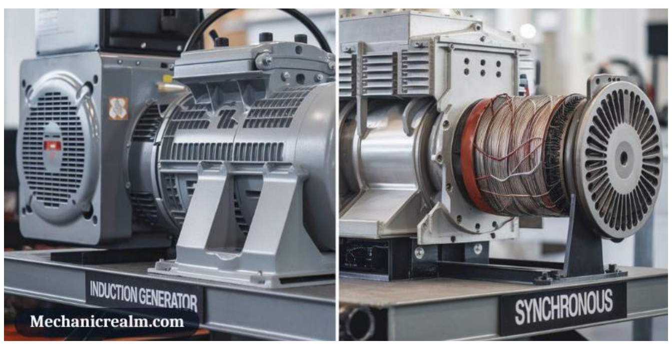
Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας

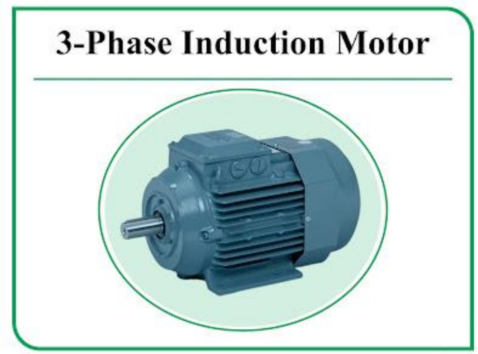
6. Ηλεκτρομηχανική μετατροπή ενέργειας

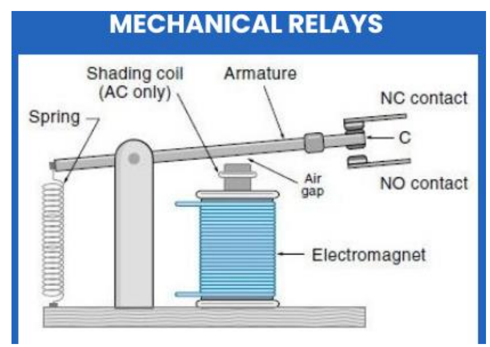
Βασίλης Νικολαΐδης
Επίκουρος Καθηγητής

Συστήματα ηλεκτρομηχανικής μετατροπής ενέργειας

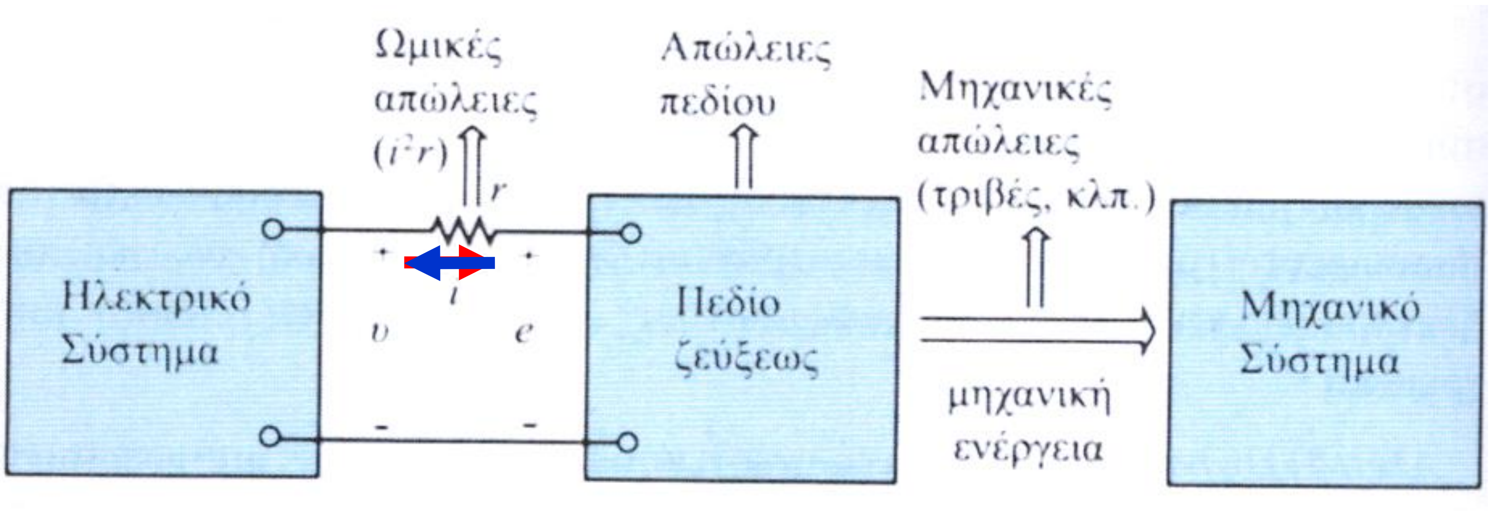
- Συστήματα στα οποία η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε μηχανική ή αντίστροφα.
- Απαιτείται η διαμεσολάβηση μαγνητικού πεδίου ζεύξης.







Ροή ενέργειας



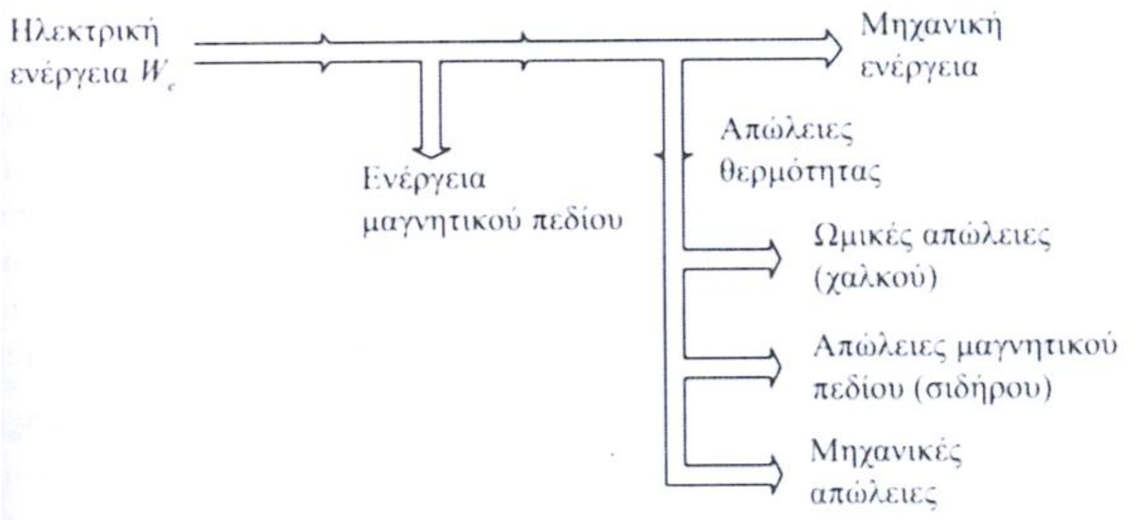
Ηλεκτρική ενέργεια E_e → Μηχανική ενέργεια E_m

Κινητήρας

Ηλεκτρική ενέργεια E_e ← Μηχανική ενέργεια E_m

Γεννήτρια

Αρχή διατήρησης ενέργειας



$$\boxed{dE_e = dE_\pi + dE_m + dE_{\alpha\pi}}$$

Εναλλακτική έκφραση στοιχειωδών ενεργειών

$$dE_e = dE_\pi + dE_m + dE_{\alpha\pi}$$

όπου

$$\boxed{dE_{\alpha\pi} = dE_{e,\alpha\pi} + dE_{\pi,\alpha\pi} + dE_{m,\alpha\pi}}$$

$$\left(dE_e - dE_{e,\alpha\pi}\right) = \underbrace{\left(dE_\pi + dE_{\pi,\alpha\pi}\right)}_{\text{Ενέργεια πεδίου με απώλειες}} + \underbrace{\left(dE_m + dE_{m,\alpha\pi}\right)}_{\text{Εσωτερική μηχανική ενέργεια}}$$

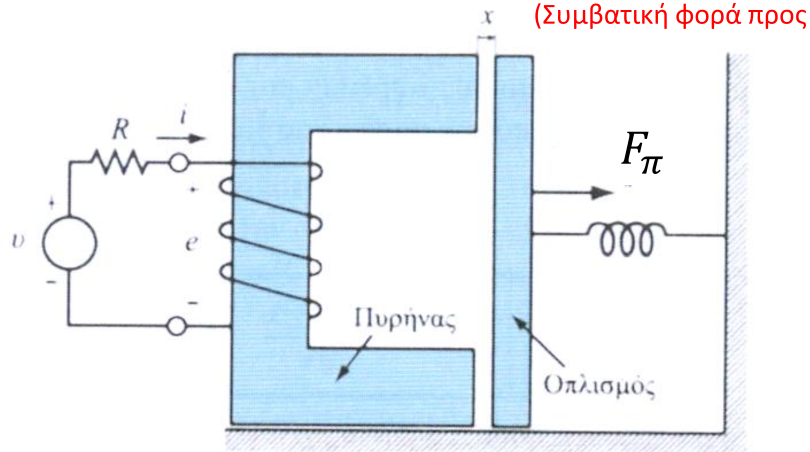
$$\boxed{dW_e = dW_\pi + dW_m}$$

Μέρος της εισερχόμενης καθαρής ηλεκτρικής ενέργειας μετατρέπεται σε μηχανικό έργο και το υπόλοιπο συσσωρεύεται ως ενέργεια μαγνητικού πεδίου.

Ανάπτυξη δύναμης F_π (1)

Σύστημα Η/Μ μετατροπής με:

- Μία διέγερση (τύλιγμα)
- Ένας βαθμό ελευθερίας



- Στιγμιαία ηλεκτρική ισχύς: $p_e = ei = i\frac{d\lambda}{dt}$

- Στοιχειώδης καθαρή ηλεκτρική ενέργεια: $dW_e = p_e dt = i d\lambda$

- Στοιχειώδης εσωτερική μηχανική ενέργεια: $dW_m = F_\pi dx$

$$\boxed{dW_\pi = i d\lambda - F_\pi dx}$$

Ανάπτυξη δύναμης F_π (2)

- Έκφραση στοιχειώδους ενέργειας μαγνητικού πεδίου ως συνάρτηση της πεπλεγμένης ροής και της στιγμιαίας θέσης του οπλισμού:

$$W_\pi = W_\pi(\lambda, x)$$

$$dW_\pi = \frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial x} dx$$

$$dW_\pi = i d\lambda - F_\pi dx$$

$$\boxed{i = \frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial \lambda}}$$

$$\boxed{F_\pi = -\frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial x}}$$

- Δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο
- Προς την κατεύθυνση ελάττωσης της W_π
- Προς την κατεύθυνση μείωσης της $\mathcal{R}$
- Προς την κατεύθυνση μείωσης του διακένου

Ανάπτυξη ροπής T_π

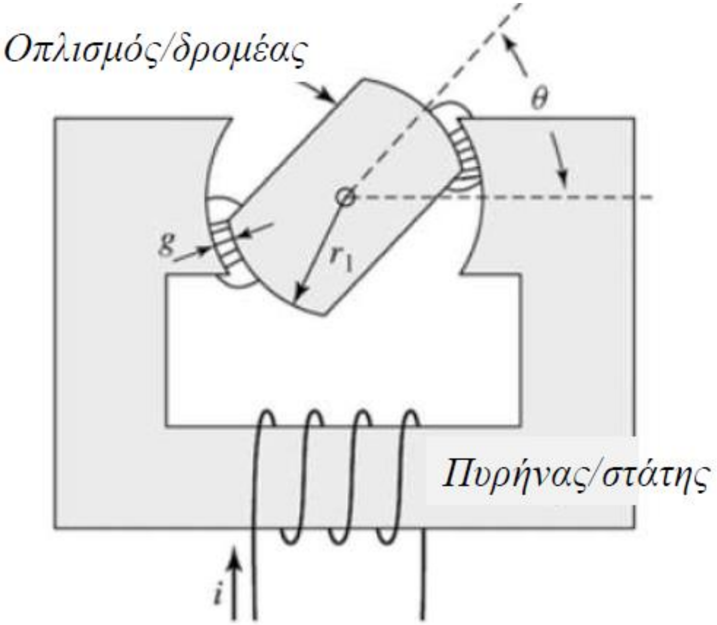
- Στοιχειώδης μηχανική ενέργεια σε στρεφόμενο μέλος συστήματος Η/Μ μετατροπής:

$$dW_m = T_\pi d\theta$$

όπου T_π η ηλεκτρομαγνητική ροπή και θ η στιγμιαία γωνιακή θέση του κινητού μέλους.

- Αναπτυσσόμενη ηλεκτρομαγνητική ροπή:

$$T_\pi = -\frac{\partial W_\pi(\lambda, \theta)}{\partial \theta}$$



Ενέργεια και συνενέργεια

- Προτιμότερη η έκφραση στοιχειώδους ενέργειας μαγνητικού πεδίου ως συνάρτηση του ρεύματος και της στιγμιαίας θέσης του οπλισμού:

$W'_\pi = W'_\pi(i, x)$ ή $W'_\pi(i, \theta)$ Συνενέργεια

- Η συνενέργεια ορίζεται ως εξής:

$$W'_\pi + W_\pi = i\lambda \longrightarrow W'_\pi = i\lambda - W_\pi$$

- Η συνενέργεια δεν έχει φυσική σημασία, αλλά είναι χρήσιμη στους υπολογισμούς

Υπολογισμός δύναμης/ροπής με χρήση της συνενέργειας

$$W'_\pi = i\lambda - W_\pi$$

$$\left.\begin{aligned} dW'_\pi &= i d\lambda + \lambda di - dW_\pi \\ dW_\pi &= i d\lambda - F_\pi dx \end{aligned}\right\} \longrightarrow dW'_\pi = \lambda di + F_\pi dx$$

$$dW'_\pi = \frac{\partial W'_\pi(i,x)}{\partial i} di + \frac{\partial W'_\pi(i,x)}{\partial x} dx$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\partial W'_\pi(i,x)}{\partial i}} \qquad \boxed{F_\pi = \frac{\partial W'_\pi(i,x)}{\partial x}}$$

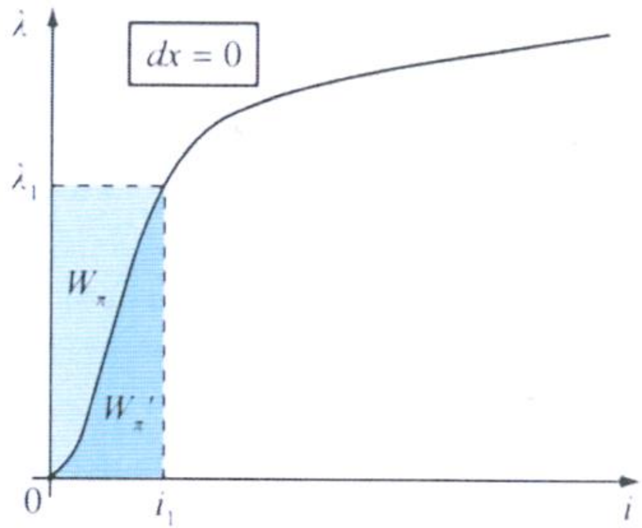
Ομοίως, για στρεφόμενο οπλισμό:

$$\boxed{T_\pi = \frac{\partial W'_\pi(i,\theta)}{\partial \theta}}$$

Υπολογισμός ενέργειας και συνενέργειας

$$dW_\pi = id\lambda - F_\pi dx \longrightarrow W_\pi(\lambda_1, \mathrm{x}) = \int_0^{\lambda_1} i(\lambda, x)\, d\lambda \qquad (dx = 0)$$

$$dW'_\pi = \lambda di + F_\pi dx \longrightarrow W_\pi{}'(i_1, \mathrm{x}) = \int_0^{i_1} \lambda(i, x)\, di \qquad (dx = 0)$$



Περίπτωση γραμμικού μαγνητικού πεδίου

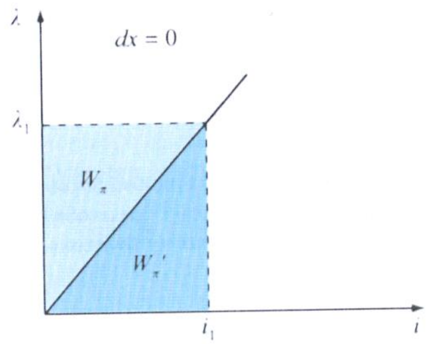
- Το μαγνητικό κύκλωμα χαρακτηρίζεται από γραμμική καμπύλη μαγνήτισης

- Η πεπλεγμένη ροή δίνεται από τη σχέση: $\lambda = L(x)i$ ή $\lambda = L(\theta)i$

- Η ενέργεια ίση με τη συνενέργεια: $$W_\pi = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L(x)} = \frac{1}{2}L(x)i^2 = \frac{1}{2}\mathcal{R}(x)\varphi^2 = W_\pi'$$

- Αναπτυσσόμενη δύναμη ή ροπή: $$F_\pi = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L(x)^2}\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2}\varphi^2\frac{d\mathcal{R}}{dx}$$

$$T_\pi = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{d\theta} = \frac{1}{2}\varphi^2\frac{d\mathcal{R}}{d\theta}$$



Γενικές παρατηρήσεις

- Με σταθερή μαγνητική ροή, η αναπτυσσόμενη δύναμη (ή ροπή) έχει την τάση να ελαττώσει την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο.
- Με σταθερό ρεύμα, η αναπτυσσόμενη δύναμη (ή ροπή) έχει την τάση να αυξήσει τη συνενέργεια του μαγνητικού πεδίου.
- Η αναπτυσσόμενη δύναμη (ή ροπή) έχει την τάση να ελαττώσει τη μαγνητική αντίσταση και συνεπώς να αυξήσει την αυτεπαγωγή του τυλίγματος διέγερσης.

Εξίσωση τάσης

- Στη γενική περίπτωση ενός συστήματος Η/Μ μετατροπής, ισχύει: $\lambda = \lambda(i, x)$

- Νόμος Faraday: $e = \frac{d\lambda}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial i}\frac{di}{dt}}_{\text{Τάση Μ/Σ}} + \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{dx}{dt}}_{\text{Τάση ταχύτητας}}$

- Σε γραμμικά υλικά: $\lambda = L(x)i$

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{d\lambda}{dx}\frac{dx}{dt}$$

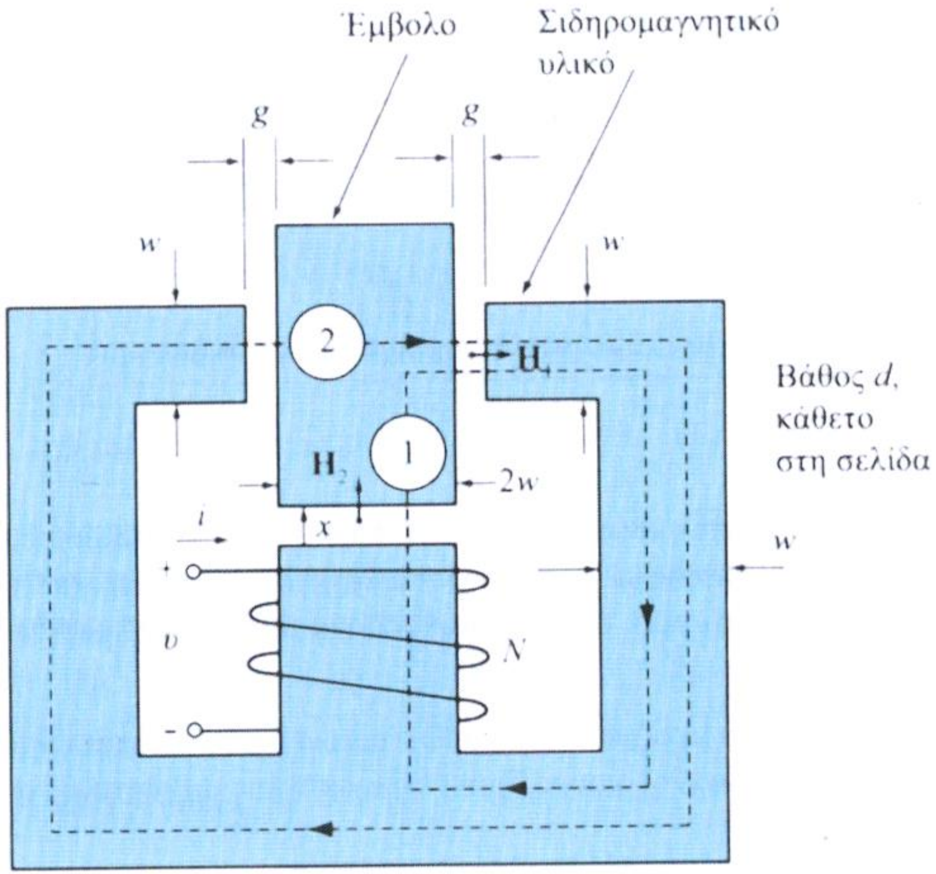
Παράδειγμα 1: Ηλεκτρονόμος (1)

Ζητούμενα:

1) $\lambda = \lambda(i, x)$

2) v για δεδομένα i,x

3) F_{π}



Παράδειγμα 1: Ηλεκτρονόμος (2)

Νόμος Gauss:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_x = \varphi_g + \varphi_g$$

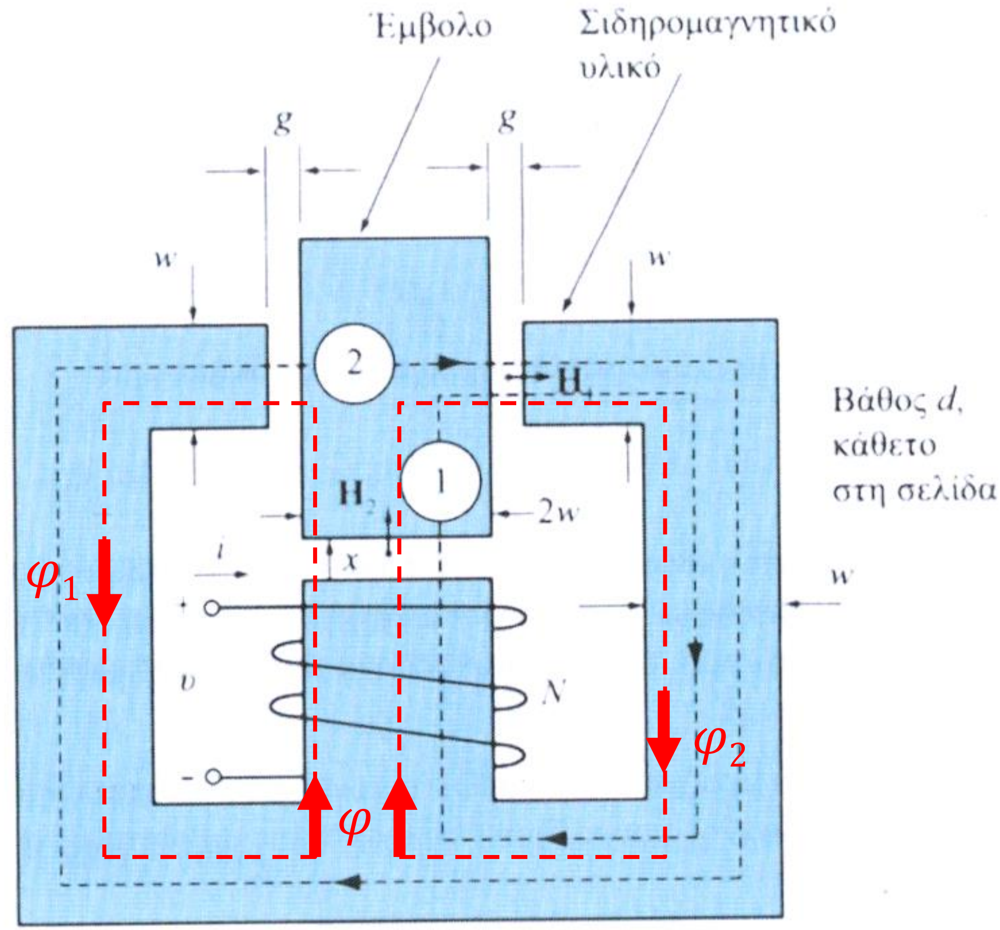
$$\mu_0 H_2 (2w) d = \mu_0 H_1 w d + \mu_0 H_1 w d$$

$$H_1 = H_2 = H$$

Νόμος διαρρεύματος 1 :

$$H_1 g + H_2 x = Ni$$

$$H = \frac{Ni}{g + x}$$



Παράδειγμα 1: Ηλεκτρονόμος (3)

Μαγνητική ροή στο μεσαίο σκέλος:

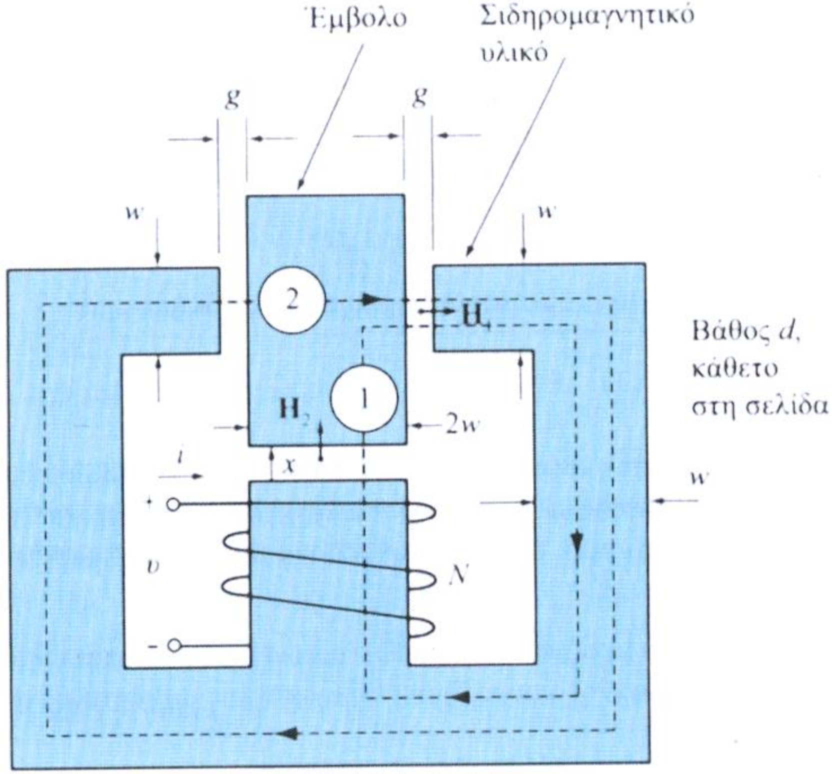
$$\varphi = \mu_0 H(2w)d = \frac{2wd\mu_0 Ni}{g+x}$$

Πεπλεγμένη ροή:

$$\lambda = N\varphi = \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{g+x} = \lambda(i,x)$$

Αυτεπαγωγή:

$$L(x) = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g+x}$$



Παράδειγμα 1: Ηλεκτρονόμος (4)

Νόμος Faraday:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial i}\frac{di}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

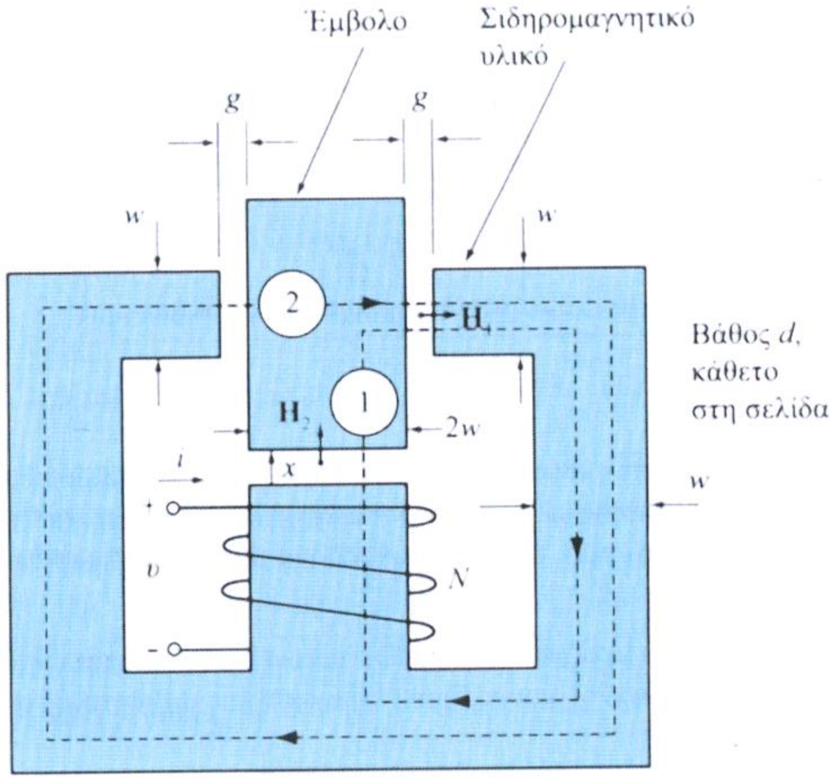
$$e = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g+x}\frac{di}{dt} - \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{(g+x)^2}\frac{dx}{dt}$$

Τάση ακροδεκτών:

$$v = e + ir$$

Αναπτυσσόμενη δύναμη:

$$F_\pi = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dx} = -\frac{wd\mu_0 N^2 i^2}{(g+x)^2}$$



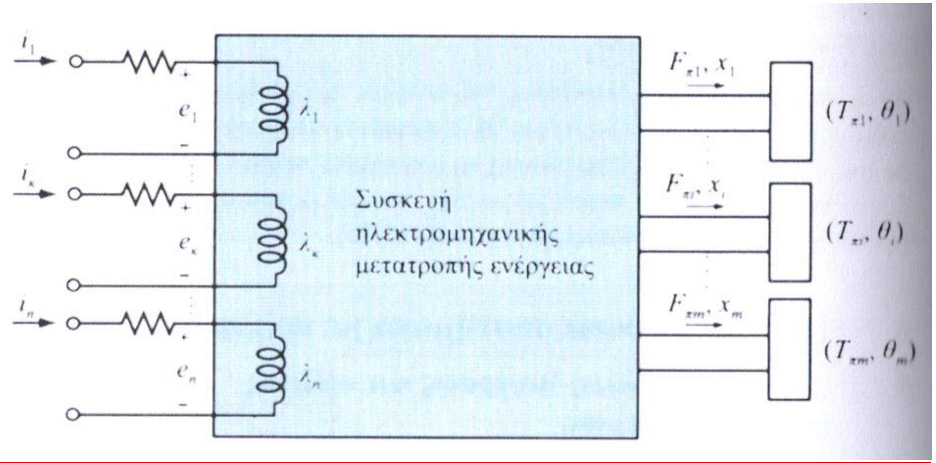
Η/Μ σύστημα με *n* διεγέρσεις και *m* βαθμούς ελευθερίας (1)

- Πεπλεγμένη ροή τυλίγματος *κ*:

$$\lambda_\kappa = \lambda_\kappa(i_1, \dots, i_n, x_1, \dots, x_n)$$

- ΗΕΔ στο τύλιγμα *κ*:

$$e_\kappa = \frac{d\lambda_\kappa}{dt} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt}}_{\text{Τάσεις Μ/Σ}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}}_{\text{Τάσεις ταχύτητας}}$$



Η/Μ σύστημα με *n* διεγέρσεις και *m* βαθμούς ελευθερίας (2)

- Στοιχειώδης καθαρή ηλεκτρική ενέργεια:

$$dW_e = \sum_{\kappa=1}^{n} i_\kappa \, d\lambda_\kappa$$

- Συνολικά παραγόμενη στοιχειώδης μηχανική ενέργεια:

$$dW_m = \sum_{i=1}^{m} F_{\pi i} \, dx_i$$

- Συνολικά παραγόμενη στοιχειώδης μηχανική ενέργεια:

$$dW_\pi = dW_e - dW_m = \sum_{\kappa=1}^{n} i_\kappa \, d\lambda_\kappa - \sum_{i=1}^{m} F_{\pi i} \, dx_i$$

$$\boxed{F_{\pi i} = -\frac{\partial W_\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_m)}{\partial x_i}}$$

$$\boxed{T_{\pi i} = -\frac{\partial W_\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_i}}$$

Η/Μ σύστημα με *n* διεγέρσεις και *m* βαθμούς ελευθερίας (3)

- Συνενέργεια:

$$W'_\pi = \sum_{\kappa=1}^{n} i_\kappa \, \lambda_\kappa - W_\pi$$

- Στοιχειώδης μεταβολή συνενέργειας:

$$dW'_\pi = \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa \, di_\kappa + \sum_{i=1}^{m} F_{\pi i} \, dx_i$$

- Ηλεκτρομαγνητική δύναμη ή ροπή:

$$\boxed{F_{\pi i} = \frac{\partial W'_\pi(i_1, \ldots, i_n, x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_i}}$$

$$\boxed{T_{\pi i} = \frac{\partial W'_\pi(i_1, \ldots, i_n, \theta_1, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_i}}$$

Γραμμικό Η/Μ σύστημα με 2 διεγέρσεις και 1 βαθμό ελευθερίας

- Πεπλεγμένη ροή στα δύο τυλίγματα:

$$\lambda_1 = L_{11}(x)i_1 + L_{12}(x)i_2$$

$$\lambda_2 = L_{12}(x)i_1 + L_{22}(x)i_2$$

- Συνενέργεια:

Αρχικά $i_1 = i_2 = 0$

$$W_\pi = W'_\pi = 0$$

$$F_\pi = 0$$

$$x = 0$$

$$(dx = 0)$$

$$dW'_\pi = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2$$

$$dW'_\pi = L_{11}(x)i_1 di_1 + L_{12}(x)i_2 di_1 + L_{12}(x)i_1 di_2 + L_{22}(x)i_2 di_2$$

$i_2 = 0,\ di_2 = 0$

$i_1 = 0,\ di_1 = 0$

$$W'_\pi(i_1, i_2, x) = \int_0^{i_1} L_{11}(x)i\,di + \int_0^{i_2} [L_{12}(x)i_1 + L_{22}(x)i]di$$

$$\boxed{W'_\pi = \frac{1}{2}L_{11}(x)i_1^2 + L_{12}(x)i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_{22}(x)i_2^2 = W_\pi}$$

Γραμμικό Η/Μ σύστημα με 2 διεγέρσεις και 1 βαθμό ελευθερίας

- Δύναμη:

$$F_{\pi i} = \frac{\partial W'_{\pi}(i_1, i_2, x_1)}{\partial x_1}$$

$$W'_{\pi} = \frac{1}{2}L_{11}(x)i_1^2 + L_{12}(x)i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_{22}(x)i_2^2 = W_{\pi}$$

$$\boxed{F_{\pi} = \frac{1}{2}i_1^2\frac{dL_{11}}{dx} + i_1 i_2\frac{dL_{12}}{dx} + \frac{1}{2}i_2^2\frac{dL_{22}}{dx}}$$

- Ροπή:

$$\boxed{T_{\pi} = \frac{1}{2}i_1^2\frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 i_2\frac{dL_{12}}{d\theta} + \frac{1}{2}i_2^2\frac{dL_{22}}{d\theta}}$$

Μηχανή δύο τυλιγμάτων (1)

Θεωρούμε τη συσκευή ηλεκτρομηχανικής μετατροπής ενέργειας του Σχήματος 6.13. Η συσκευή είναι κυλινδρική με αξονικό μήκος ℓ κάθετο στη σελίδα. Ο εξωτερικός κοίλος κύλινδρος ονομάζεται *στάτης* και είναι ακίνητος, ενώ ο εσωτερικός συμπαγής κύλινδρος ονομάζεται *δρομέας* και μπορεί να κινηθεί σχηματίζοντας ως προς το στάτη μεταβλητή γωνία $\theta(t)$. Υποθέτουμε ότι οι αυτεπαγωγές των τυλιγμάτων στάτη και δρομέα είναι σταθερές (ανεξάρτητες της γωνίας θ)

$$L_{ss}(\theta) = L_s$$

$$L_{rr}(\theta) = L_r,$$

ενώ η αλληλεπαγωγή τους δίνεται από την ημιτονοειδή σχέση

$$L_{sr} = M\cos\theta.$$

Πράγματι, παρατηρούμε στο Σχήμα 6.13 ότι για $\theta = 0$ οι άξονες και οι φορές περιέλιξης των δύο τυλιγμάτων συμπίπτουν, οπότε έχουμε τη μέγιστη θετική αλληλεπαγωγή. Αντίθετα, για $\theta = 90°$, οι άξονες των τυλιγμάτων είναι κάθετοι και έχουμε μηδενική αλληλεπαγωγή, ενώ όταν $\theta = 180°$ η αλληλεπαγωγή έχει αρνητικό μέγιστο.

Υποθέτουμε ότι τα ρεύματα και η μηχανική κίνηση είναι της μορφής

$$i_s = \sqrt{2}\, I_s \sin\omega_s t$$

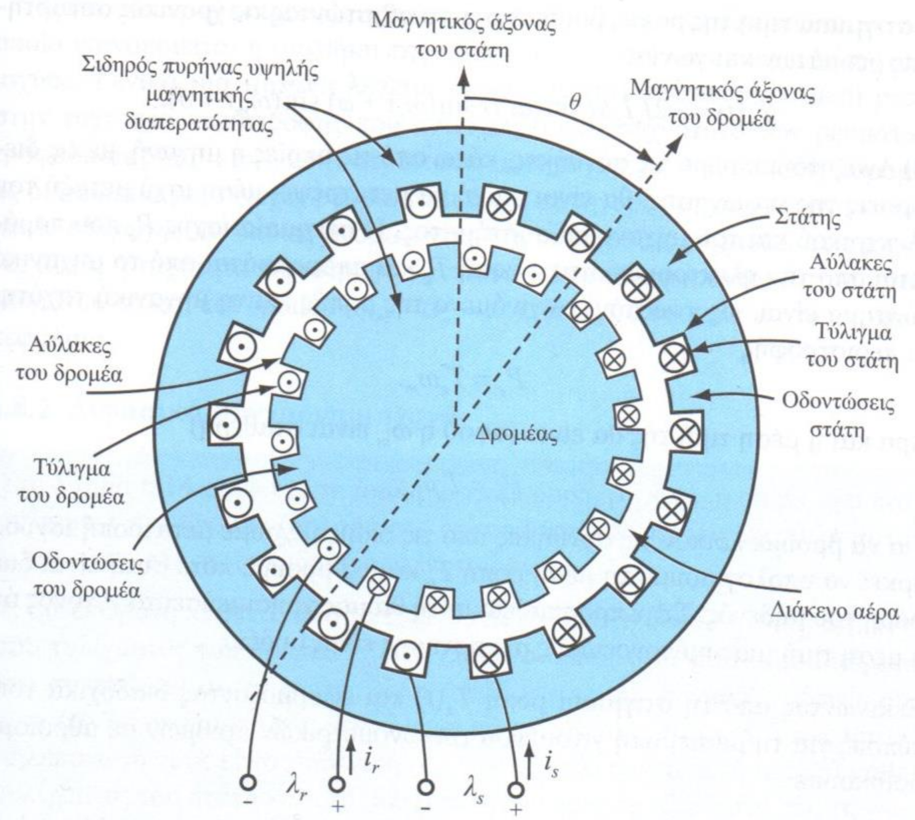
$$i_r = \sqrt{2}\, I_r \sin(\omega_r t + \varphi)$$

$$\theta = \omega_m t + \delta,$$

όπου $I_s, I_r, \omega_s, \omega_r, \delta$ είναι σταθερές. Θεωρούμε δηλαδή ότι τα ρεύματα στάτη και δρομέα είναι ημιτονοειδή με διαφορά φάσης φ, στην αρχή του χρόνου, ενώ ο δρομέας περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα και η αρχική τιμή της γωνίας είναι δ. Να υπολογιστούν:

(α) Η στιγμιαία ηλεκτρομαγνητική ροπή που ασκείται στο δρομέα.

(β) Κάτω από ποιες συνθήκες το ηλεκτρομηχανικό σύστημα του σχήματος μπορεί να μετατρέψει μέση ισχύ μεταξύ του ηλεκτρικού και του μηχανικού συστήματος.



Μηχανή δύο τυλιγμάτων (2)

Λύση (α):

$$T_\pi = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_{ss}}{d\theta} + i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_{rr}}{d\theta}$$

$$\downarrow \quad \left(\frac{dL_{ss}}{d\theta} = \frac{dL_{rr}}{d\theta} = 0\right)$$

$$T_\pi = i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta} = -M i_s i_r \sin\theta$$

$$\downarrow \quad \begin{bmatrix} i_s = \sqrt{2} I_s \sin(\omega_s t) \\ i_r = \sqrt{2} I_r \sin(\omega_r t + \varphi) \\ \theta = \omega_m t + \delta \end{bmatrix}$$

$$T_\pi(t) = -2 I_s I_r M \sin(\omega_s t) \sin(\omega_r t + \varphi) \sin(\omega_m t + \delta)$$

Μηχανή δύο τυλιγμάτων (3)

Λύση (β):

$P_e = T_\pi \, \omega_m$ (στιγμιαία ηλεκτρική ισχύς)

$P_\mu = T_\mu \, \omega_m$ (μέση τιμή για ω_m σταθερή)

$$T_\pi(t) = -2I_s I_r M \sin(\omega_s t)\sin(\omega_r t + \varphi)\sin(\omega_m t + \delta)$$

(ταυτότητα: γινόμενα σε αθροίσματα)

$$T_\pi(t) = -\frac{1}{2} I_s I_r M\{\sin[(\omega_s - \omega_r + \omega_m)t + \delta - \varphi] + \sin[(-\omega_s + \omega_r + \omega_m)t + \delta + \varphi] - \sin[(\omega_s + \omega_r + \omega_m)t + \delta + \varphi] - \sin[(-\omega_s - \omega_r + \omega_m)t + \delta - \varphi]\}$$

(ένας από τους συντελεστές του *t* στα ορίσματα ίσος με 0)

$$\omega_m = \pm\, \omega_s \pm \omega_r$$

Μηχανή δύο τυλιγμάτων (4)

Λύση (β):

Αν $\omega_m = \omega_s - \omega_r$

$$P_\mu = -\frac{1}{2} I_s I_r M \omega_m \sin(\delta + \varphi)$$

Αν $\omega_m = \omega_s + \omega_r$

$$P_\mu = -\frac{1}{2} I_s I_r M \omega_m \sin(\delta - \varphi)$$

Διφασική σύγχρονη μηχανή (1)

Στο Σχήμα 6.14 φαίνεται σε τομή μία κυλινδρική μηχανή, η οποία έχει ένα τύλιγμα f στο δρομέα (δηλαδή στο στρεφόμενο μέλος) και δύο τυλίγματα a και b στο στάτη (δηλαδή στο ακίνητο μέλος).

Η αυτεπαγωγή καθενός από τα τυλίγματα του στάτη είναι $L_{aa} = L_{bb} = L$ και του τυλίγματος του δρομέα L_{ff}. Το διάκενο αέρος θεωρείται ομοιόμορφο και συνεπώς οι αυτεπαγωγές είναι ανεξάρτητες της γωνιακής θέσης του δρομέα. Τα τυλίγματα του στάτη είναι κάθετα μεταξύ τους, συνεπώς η αλληλεπαγωγή τους είναι μηδενική ($L_{ab} = 0$). Η αλληλεπαγωγή μεταξύ κάθε τυλίγματος του στάτη και του τυλίγματος του δρομέα εξαρτάται από τη γωνιακή θέση θ του δρομέα και μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ημιτονοειδής

$$L_{af} = M\cos\theta \qquad L_{bf} = M\sin\theta,$$

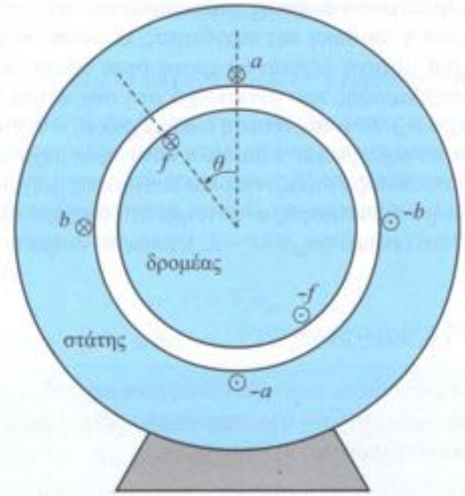
όπου M είναι η μέγιστη τιμή της αλληλεπαγωγής. Η ωμική αντίσταση κάθε τυλίγματος του στάτη είναι r_a. Ζητούνται:

(α) Να βρεθεί μια γενική έκφραση για τη ροπή συναρτήσει της γωνίας θ, των συντελεστών L, L_{ff}, M και των στιγμιαίων ρευμάτων i_a, i_b και i_f.

(β) Υποθέστε ότι ο δρομέας είναι ακίνητος και συνεχή ρεύματα $i_a = I$, $i_b = I$, $i_f = I_f$ διαρρέουν τα τυλίγματα κατά τις φορές που φαίνονται στο σχήμα. Αν ο δρομέας επιτραπεί να κινηθεί, θα στρέφεται συνέχεια ή θα τείνει να σταματήσει; Αν συμβεί το δεύτερο, σε ποια τιμή του θ θα ισορροπήσει;

(γ) Το τύλιγμα του δρομέα θεωρείται ότι διαρρέεται από συνεχές ρεύμα I_f και τα τυλίγματα του στάτη από εναλλασσόμενα διφασικά ρεύματα

$$i_a = \sqrt{2}\, I\cos\omega t$$
$$i_b = \sqrt{2}\, I\sin\omega t.$$



Σχήμα 6.14: Διφασική σύγχρονη μηχανή

Ο δρομέας περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ίση με την κυκλική συχνότητα των ρευμάτων του στάτη, έτσι ώστε η θέση του να δίνεται από τη σχέση $\theta = \omega t + \delta_{sr}$, όπου δ_{sr} είναι μια γωνία που περιγράφει τη θέση του δρομέα σε σχέση με τον άξονα της φάσης a, όταν το ρεύμα στη φάση αυτή έχει μέγιστο. Να βρεθεί έκφραση για τη μέση ροπή, όταν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες. Τι είδους μηχανή έχουμε και γιατί;

(δ) Με τις προϋποθέσεις της ερώτησης (γ), να βρεθεί μια έκφραση για τις στιγμιαίες τάσεις ακροδεκτών των φάσεων a και b του στάτη.

Διφασική σύγχρονη μηχανή (2)

Λύση (α):

$$W'_{\pi} = W_{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}L_{aa}(x)i_a^2 + \frac{1}{2}L_{bb}(x)i_b^2 + \frac{1}{2}L_{ff}(x)i_f^2 + L_{ab}(x)i_a i_b + L_{af}(x)i_a i_f + L_{bf}(x)i_b i_f$$

$$(L_{ab} = 0, \frac{dL_{aa}}{d\theta}, \frac{dL_{bb}}{d\theta}, \frac{dL_{ff}}{d\theta})$$

$$T_{\pi}(t) = i_a i_f \frac{dL_{af}}{d\theta} + i_b i_f \frac{dL_{bf}}{d\theta}$$

$$(L_{af} = M\cos\theta,\ L_{bf} = M\sin\theta)$$

$$T_{\pi}(t) = M i_f (i_b \cos\theta - i_a \sin\theta)$$ (στιγμιαία ροπή για στρεφόμενο ή ακίνητο δρομέα)

Διφασική σύγχρονη μηχανή (3)

Λύση (β):

Για συνεχή ρεύματα $i_a = i_b = I, if = If$:

$$T_\pi = II_f M(\cos\theta - \sin\theta)$$

Θέσεις ισορροπίας δρομέα ($T_\pi = 0$):

$$\cos\theta - \sin\theta = 0 \ \rightarrow \tan\theta = 1 \rightarrow \theta = 45^{o} \ \kappa\alpha\iota \ 225^{o}$$

Ευστάθεια σημείων ισορροπίας δρομέα:

$$\frac{dT_\pi}{d\theta} = -II_f M(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta = 45^{o}} \ \rightarrow \dfrac{dT_\pi}{d\theta} = -II_f M\sqrt{2} < 0 & \text{(ευσταθής θέση)} \\ \theta = 225^{o} \ \rightarrow \dfrac{dT_\pi}{d\theta} = II_f M\sqrt{2} > 0 & \text{(ασταθής θέση)} \end{cases}$$

Διφασική σύγχρονη μηχανή (4)

Λύση (γ):

Για ρεύματα $i_a = \sqrt{2}I\cos\omega t, i_b = \sqrt{2}I\sin\omega t, i_f = I_f$:

$$T_\pi(t) = M\sqrt{2}II_f[\sin\omega t \cdot \cos(\omega t + \delta_{sr}) - \cos\omega t \cdot \sin(\omega t + \delta_{sr})]$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$T_\pi(t) = -M\sqrt{2}II_f\sin\delta_{sr}$$

- Χρονικά σταθερή ροπή
- Εξαρτάται μόνο από τη δ_{sr} για t = 0

Διφασική σύγχρονη μηχανή (5)

Λύση (δ):

$$v_a = i_a r_a + \frac{d}{dt}(L_{aa} i_a + L_{af} i_f)$$

$$v_b = i_b r_a + \frac{d}{dt}(L_{bb} i_b + L_{bf} i_f)$$

Με αντικατάσταση ρευμάτων
και αλληλεπαγωγών

$$v_a = \sqrt{2} I r_a \cos\omega t - \sqrt{2} I \omega L \sin\omega t - I_f \omega M \sin(\omega t + \delta_{sr})$$

$$v_b = \sqrt{2} I r_a \sin\omega t + \sqrt{2} I \omega L \cos\omega t + I_f \omega M \cos(\omega t + \delta_{sr})$$