Προβλήματα Φυσικής
(Μηχανικής)
για Φοιτητές Θετικών Επιστημών και Πολυτεχνικών Σχολών

Θεόδωρος Η. Αλεξόπουλος, Καθηγητής ΕΜΠ
Γεώργιος Δ. Τσιπολίτης, Καθηγητής ΕΜΠ
Εργαστήριο Πειραματικής Φυσικής Υψηλών Ενεργειών
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ XXXXXXXXXX
ΑΘΗΝΑ 2016

Προβλήματα Φυσικής
(Μηχανικής)
1η έκδοση

Συγγραφείς:

Θεόδωρος Η. Αλεξόπουλος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Γεώργιος Δ. Τσιπολίτης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Έργαστήριο Πειραματικής Φυσικής Υψηλών Ενεργειών & Οργανολογίας
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Το βιβλίο στοιχειοθετήθηκε και σελιδοποιήθηκε σε LaTeX
Στοιχειοθεσία-Σελιδοποίηση, σχεδιασμός σχημάτων: Σωτήρης Φραγκίσκος, Φυσικός Εφαρμογών Ε.Μ.Π.
Κριτική ανάγνωση:
Γεώργιος Ιακωβίδης, Φυσικός Εφαρμογών ΕΜΠ, Διδάκτωρ Ε.Μ.Π., Ερευνητής, BNL - USA
Παναγιώτης Γκουντούμης, Ηλεκτρονικός ΕΚΠΑ, Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.
Ευστάθιος Καρέντζος, Φυσικός ΑΠΘ, Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.
Αιμίλιος Κουλούρης, Φυσικός Εφαρμογών ΕΜΠ, Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.
Στέφανος Λεοντσίνης, Φυσικός Εφαρμογών ΕΜΠ, Διδάκτωρ Ε.Μ.Π., Μεταδιδακτορικός Ερευνητής, University of Colorado - Boulder, USA
Παράσχος Μοσχοβάκος, Ηλεκτρολόγος Μηχανικός, Ε.Μ.Π., Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.
Κωνσταντίνος Ντέκας, Φυσικός Εφαρμογών ΕΜΠ, Διδάκτωρ Ε.Μ.Π., Μεταδιδακτορικός Ερευνητής, University of California - Irvine, USA

Παρατηρήσεις για το σύγγραμμα:
email: theoalex@central.ntua.gr, yorgos@central.ntua.gr

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Αυτό το βιβλίο περιέχει μια σειρά ασκήσεων Φυσικής Ι (Μηχανικής) για να χρησιμοποιηθεί από τους φοιτητές του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου ως βοήθημα στο εισαγωγικό μάθημα φυσικής. Η ύλη επεκτείνεται από τα διανύσματα, διανυσματικό διαφορικό λογισμό, νόμοι του Νεύτωνα, συστήματα αναφοράς, διατήρηση ενέργειας/ ορμής/ στροφορμής, αρμονικό ταλαντωτή, δυναμική στερεών σωμάτων, μετασχηματισμό Lorentz και τις σχέσεις των Frenet-Serret. Επίσης στο παράρτημα δίνονται διάφορες χρήσιμες σχέσεις όπως γνωστά ολοκληρώματα, διανυσματικές σχέσεις, τριγωνομετρικές σχέσεις, περιγραφή του πολικού/κυλινδρικού/σφαιρικού συστήματος καθώς και ενα εισαγωγικό εδάφιο για τη μερική παράγωγο και τις μιγαδικές μεταβλητές.
Η διαλογή των ασκήσεων έχει γίνει από διάφορες σειρές μαθημάτων Φυσικής Ελληνικών Πανεπιστημίων και Πανεπιστημίων του εξωτερικού όπου έχουμε διδάξει στο παρελθόν. Πολλές από αυτές τις ασκήσεις ετοιμάστηκαν και δόθηκαν για εξάσκηση των φοιτητών της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (ΣΗΜΜΥ), της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών (ΣΕΜΦΕ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΕΜΠ) και του προγράμματος σπουδών Φυσικές Επιστήμες (ΦΥΕ) του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ). Μετά από προτροπή αρκετών συναδέλφων μας αποφασίσαμε να παρουσιάσουμε αυτή τη συλλογή των ασκήσεων υπό μορφή βιβλίου. Θα θέλαμε να τονίσουμε ότι το βιβλίο αυτό δεν αντικαθιστά το κύριο βιβλίο του μαθήματος αλλά απλά προσφέρει μια συλλογή από περισότερες από 400 λυμένες και 300 άλυτες ασκήσεις και προβλήματα που θα μπορέσουν να βοηθήσουν το σπουδαστή στην κατανόηση της ύλης της Φυσικής Ι (Μηχανικής). Οι ασκήσεις καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα δυσκολίας. Αρκετά από τα προβλήματα έχουν εξαχθεί και έχουν τροποποιηθεί από διάφορα ερευνητικά άρθρα σε περιοδικά, όπως τα American Journal of Physics, European Journal of Physics, the Physics Letter, Mathematical Physics κ.λ.π.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε πολλούς συναδέλφους του Τομέα Φυσικής της ΣΕΜΦΕ και της θεματικής ενότητας Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (ΦΥΕ14) του ΕΑΠ που βοήθησαν άμεσα ή έμμεσα στη δημιουργία αυτού του βιβλίου. Ευχαριστούμε ιδιαίτερα τους φοιτητές μας της ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ και ΦΥΕ του ΕΑΠ για την υπόδειξη πολλών τυπογραφικών λαθών.

Θα δεχτούμε με ευχαρίστηση και ευγνωμοσύνη τις διορθώσεις και υποδείξεις σας.

Θεόδωρος Η. Αλεξόπουλος & Γεώργιος Δ. Τσιπολίτης
theoalex@central.ntua.gr yorgos@central.ntua.gr
Αθήνα 2006

1

Διανύσματα & Διαφορικός Λογισμός

Πρόβλημα 1.1 Είναι δυνατόν το άθροισμα δύο διανυσμάτων διαφορετικού μέτρου να δώσει συνισταμένη μηδέν; Τριών διανυσμάτων;

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι μηδέν, δηλαδή $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$. Τότε

$$\boldsymbol{x}_1 = -\boldsymbol{x}_2 \Rightarrow |\boldsymbol{x}_1| = |\boldsymbol{x}_2|$$

Επομένως *επιβάλλεται* τα μέτρα των δύο διανυσμάτων να είναι ίσα. Το άθροισμα τριών διανυσμάτων μπορεί να είναι μηδέν, όπως φαίνεται στο παράδειγμα $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$, όπου $(x,0,y) + (-x,z,0) + (0,-z,-y) = 0$ με $\boldsymbol{x}_1 = (x,0,y),\ \boldsymbol{x}_2 = (-x,z,0),\ \boldsymbol{x}_3 = (0,-z,-y)$. Τα μέτρα αυτών των τριών διανυσμάτων είναι διαφορετικά

$$\sqrt{x^2+y^2} \neq \sqrt{x^2+z^2} \neq \sqrt{z^2+y^2}$$

για μη μηδενικά διανύσματα.

Πρόβλημα 1.2 Πότε (α) το εσωτερικό, (β) το εξωτερικό και (γ) ταυτόχρονα το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν;

Λύση:

(α)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0\\ \Rightarrow |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = 0\\ \Rightarrow |\boldsymbol{a}| = 0 \quad \text{ή} \quad |\boldsymbol{b}| = 0 \quad \text{ή} \quad \cos\theta_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = 0\end{gathered}$$

Επομένως το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν όταν ένα ή και τα δύο από τα μέτρα των διανυσμάτων είναι μηδέν ή η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι 90^o.

(β)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0\\ \Rightarrow |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = 0\\ \Rightarrow |\boldsymbol{a}| = 0 \quad \text{ή} \quad |\boldsymbol{b}| = 0 \text{ ή} \quad \sin\theta_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = 0\end{gathered}$$

Επομένως το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν όταν ένα ή και τα δύο από τα μέτρα των διανυσμάτων είναι μηδέν ή η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι 0^o.

(γ) Θα πρέπει ένα ή και τα δύο μέτρα των διανυσμάτων να είναι μηδέν: $|\boldsymbol{a}| = 0$ ή $|\boldsymbol{b}| = 0$.

Πρόβλημα 1.3 Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο, με φορτίο q, κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο, μαγνητικής επαγωγής $\boldsymbol{B}$, ασκείται πάνω του δύναμη $\boldsymbol{F}$. Η δύναμη, η μαγνητική επαγωγή και η ταχύτητα συνδέονται με τη σχέση: $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Για να υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή ενός άγνωστου ομογενούς πεδίου, εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα. Εκτοξεύουμε φορτισμένα σωματίδια, γνωστού φορτίου με σταθερή ταχύτητα και μετρούμε τη δύναμη που ασκείται πάνω τους από το μαγνητικό πεδίο. Τρία τέτοια πειράματα καταλήγουν στα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{Όταν } \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{x}} \text{ τότε } \frac{\boldsymbol{F}}{q} = 2\hat{\boldsymbol{z}} - 4\hat{\boldsymbol{y}} \tag{1.1}$$

$$\text{Όταν } \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{y}} \text{ τότε } \frac{\boldsymbol{F}}{q} = 4\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.2}$$

$$\text{Όταν } \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{z}} \text{ τότε } \frac{\boldsymbol{F}}{q} = \hat{\boldsymbol{y}} - 2\hat{\boldsymbol{x}} \tag{1.3}$$

Χρησιμοποιήστε τα παραπάνω αποτελέσματα για να βρείτε το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής $\boldsymbol{B}$.

Λύση:

Θεωρούμε τη γενική μορφή της μαγνητικής επαγωγής, $\boldsymbol{B} = B_1\hat{\boldsymbol{x}} + B_2\hat{\boldsymbol{y}} + B_3\hat{\boldsymbol{z}}$. Από τη σχέση (1.3), έχουμε

$$\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{z}}B_2 - \hat{\boldsymbol{y}}B_3 = 2\hat{\boldsymbol{z}} - 4\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\Rightarrow B_2 = 2, \quad B_3 = 4$$

Ομοίως από τη σχέση (1.3), έχουμε

$$\hat{\boldsymbol{y}} \times \boldsymbol{B} = -\hat{\boldsymbol{z}}B_1 + \hat{\boldsymbol{x}}B_3 = 4\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Rightarrow \quad B_1 = 1, \quad B_3 = 4$$

Επομένως, $\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} + 4\hat{\boldsymbol{z}}$, και η σχέση (1.3) επαληθεύεται με απ' ευθείας αντικατάσταση της μαγνητικής επαγωγής $\boldsymbol{B}$.

Πρόβλημα 1.4 Τρία σημεία P_1, P_2, P_3 ορίζονται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ με διανύσματα $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ αντίστοιχα. Στο σύστημα αυτό ισχύει $\lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 + \lambda_3\boldsymbol{r}_3 = 0$. Αν η σχέση αυτή ισχύει και αναφορικά προς τυχούσα άλλη αρχή $Ox'y'z'$ των αξόνων, να δείξετε ότι $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Λύση:

Αν το διάνυσμα που ενώνει τα δύο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων είναι $\boldsymbol{n}$, τότε $\boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{n}$, και $\boldsymbol{r}_3' = \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{n}$, όπου $\boldsymbol{r}_1', \ \boldsymbol{r}_2', \ \boldsymbol{r}_3'$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων P_1, P_2, P_3 στο σύστημα O′. Εφ' όσον

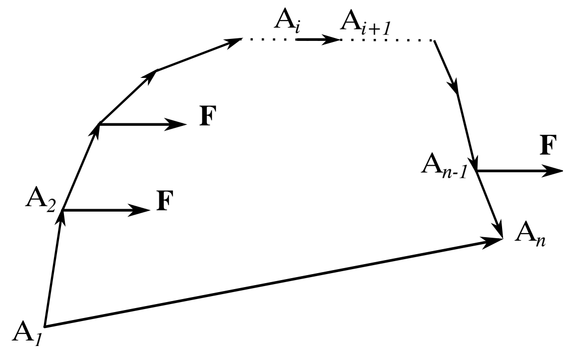
$$\begin{aligned} \lambda_1\boldsymbol{r}_1' + \lambda_2\boldsymbol{r}_2' + \lambda_3\boldsymbol{r}_3' &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\boldsymbol{n} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.5 Μια σταθερή δύναμη $\boldsymbol{F}$ μετακινεί ένα σωματίδιο από το σημείο A_1 στο σημείο A_n ακολουθώντας τεθλασμένη γραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Δείξτε ότι το έργο που παράγει η δύναμη είναι ανεξάρτητο της μορφής που έχει η τεθλασμένη γραμμή και ισούται με $W = \boldsymbol{F} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_n})$.

Λύση:

Το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη $\boldsymbol{F}$, W, ισούται με το άθροισμα των επιμέρους έργων

$$W = W_{\mathrm{A}_1\to\mathrm{A}_2} + W_{\mathrm{A}_2\to\mathrm{A}_3} + \ldots + W_{\mathrm{A}_i\to\mathrm{A}_{i+1}} + \ldots + W_{\mathrm{A}_{n-1}\to\mathrm{A}_n}$$



Σχήμα 1.1

Το επιμέρους έργο $W_{\mathrm{A}_i \to \mathrm{A}_{i+1}}$ είναι το έργο που παράγει η δύναμη κατά την ευθύγραμμη μετατόπιση του σωματιδίου από το σημείο A_i στο σημείο A_{i+1} και ισούται με

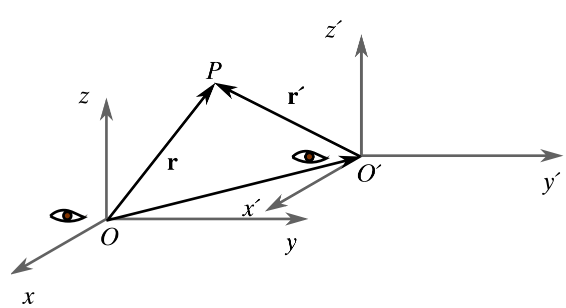
$$W_{\mathrm{A}_i \to \mathrm{A}_{i+1}} = \boldsymbol{F} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}})$$

Επομένως το συνολικό έργο, W, μπορεί να γραφτεί ως

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} W_{\mathrm{A}_i \to \mathrm{A}_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{F} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}) = \boldsymbol{F} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}) = \boldsymbol{F} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_n})$$

Πρόβλημα 1.6 Ένας παρατηρητής Α καταγράφει τη θέση σωματιδίου P, χρησιμοποιώντας σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $Oxyz$ με κέντρο τον εαυτό του, ως $(1,1,1)$. Ένας άλλος παρατηρητής Β καταγράφει τη θέση του ιδίου σωματιδίου P, χρησιμοποιώντας άλλο σύστημα συντεταγμένων $Ox'y'z'$ ως $(2,3,4)$. Αν οι άξονες των δύο καρτεσιανών συστημάτων είναι παράλληλοι, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2, να βρεθεί η θέση του παρατηρητή Β στο σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή Α.

Λύση:



Σχήμα 1.2

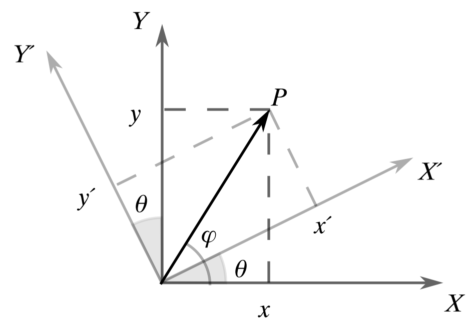
Από το σχήμα 1.2 έχουμε: $\boldsymbol{r} = (1,1,1)$ και $\boldsymbol{r}' = (2,3,4)$. Τα διανύσματα θέσης $\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}'$ σχετίζονται με το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (-1,-2,-3)$$

Πρόβλημα 1.7 Δυο συστήματα συντεταγμένων Oxy και $Ox'y'$ έχουν κοινή αρχή O. Το σύστημα $Ox'y'$ είναι στραμμένο κατά γωνία θ ως προς το σύστημα Oxy. Το διάνυσμα στο σύστημα Oxy έχει συντεταγμένες $\boldsymbol{r} = (x,y)^t$, όπου ο δείκτης t δηλώνει το ανάστροφο διάνυσμα. Να εκφράσετε τις συντεταγμένες $\boldsymbol{r}' = (x',y')^t$ του ιδίου διανύσματος στο σύστημα $Ox'y'$ συναρτήσει των x, y, θ. Στη συνέχεια να βρείτε τα στοιχεία του 2×2 πίνακα $\boldsymbol{A}$, για τον οποίο ισχύει

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$$

και να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος είναι αναλλοίωτη ποσότητα.



Σχήμα 1.3

Λύση:

Από το σχήμα 1.3 βλέπουμε ότι ισχύει

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi \tag{1.4}$$

όπου $r = |\boldsymbol{r}|$. Επίσης

$$x' = r\cos(\phi-\theta) = r\cos\phi\cos\theta + r\sin\phi\sin\theta = x\cos\theta + y\sin\theta$$

και

$$y' = r\sin(\phi-\theta) = r\sin\phi\cos\theta - r\cos\phi\sin\theta = y\cos\theta - x\sin\theta$$

όπου οι εξισώσεις (1) έχουν χρησιμοποιηθεί. Άρα ο πίνακας A δίδεται ως ακολούθως

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{όπου} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Το μέτρο του διανύσματος

$$\begin{aligned} \left|\boldsymbol{r}'\right| &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (y\cos\theta - x\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{x^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + y^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)} = \sqrt{x^2+y^2} \\ &= |\boldsymbol{r}| \end{aligned}$$

Επομένως το μέτρο ενός διανύσματος είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα μεταξύ των δύο συστημάτων.

Πρόβλημα 1.8 Θεωρήστε δύο διανύσματα $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ που εκφράζονται σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\boldsymbol{r}_1 = (r_1, \theta_1, \phi_1) \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{r}_2 = (r_2, \theta_2, \phi_2)$$

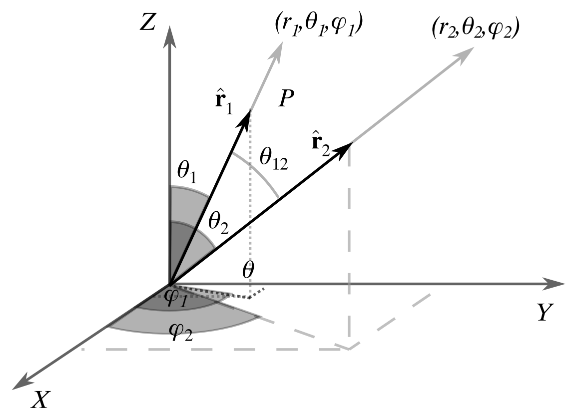
Να αποδείξετε ότι η γωνία μεταξύ των δύο αυτών διανυσμάτων υπακούει στη σχέση

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2$$

Λύση:

Τα μοναδιαία διανύσματα των διανυσμάτων $\boldsymbol{r}_1$ και $\boldsymbol{r}_2$ μπορούν να αναλυθούν με τη βοήθεια του σχήματος 1.4 ως ακολούθως

$$\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \sin\theta_1\cos\phi_1\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta_1\sin\phi_1\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_1\hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 1.4

και

$$\hat{\boldsymbol{r}}_2 = \sin\theta_2\cos\phi_2\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta_2\sin\phi_2\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_2\hat{\boldsymbol{z}}$$

Η γωνία θ_{12} μεταξύ των δύο διανυσμάτων βρίσκεται από το εσωτερικό γινόμενο των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\cos\theta_{12} = \hat{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_2 = \sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2 + \sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2$$

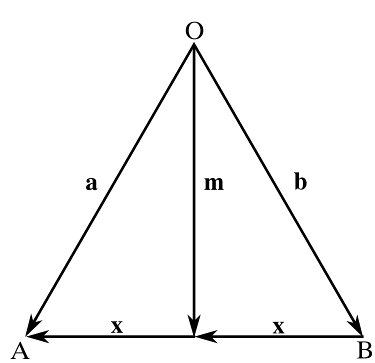
ή

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{1.5}$$

Παρατηρούμε ότι $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$, άρα η σχέση (1) γράφεται

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2$$

Πρόβλημα 1.9 Να αποδείξετε ότι η διάμεσος στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κάθετη στη βάση του τριγώνου.



Σχήμα 1.5

Λύση:

Από το σχήμα 1.5 για το ισοσκελές τρίγωνο OAB έχουμε: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}$, όπου $a = |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = b$ και $\boldsymbol{m}$ είναι η διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου.
Επομένως, η διάμεσος $\boldsymbol{m}$ είναι

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$$

Το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της διαμέσου $\boldsymbol{m}$ και της βάσης $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ δίνει

$$\boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = 0$$

Λόγω των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου, $a = b$. Άρα $\boldsymbol{m} \perp (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

Πρόβλημα 1.10 Με τη βοήθεια διανυσμάτων, να αποδείξετε ότι η γωνία που «βλέπει» στη διάμετρο ενός ημικυκλίου είναι ορθή γωνία.

Λύση:

Από το σχήμα 1.6, οι πλευρές $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$, όπου $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|$ είναι η ακτίνα του κύκλου. Το εσωτερικό γινόμενο των δύο πλευρών του τριγώνου, δίνει

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - a^2 + c^2 - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = c^2 - a^2 = 0$$

Επομένως τα δύο αυτά διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}$.

Πρόβλημα 1.11 Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

(α) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \leq |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2$ (ανισότητα του Cauchy),

(β) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

(γ) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|$

Λύση:

(α) Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$, τότε

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = a^2 b^2 \cos^2\theta \leq a^2 b^2$$

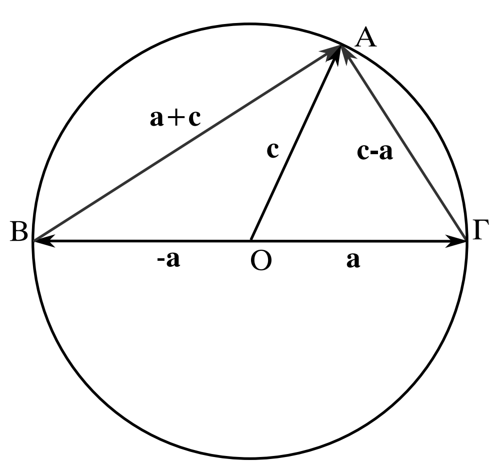
διότι η συνάρτηση $|\cos\theta| \leq 1$.

(β) Ομοίως

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = a^2 + b^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$$

όπου $|\boldsymbol{a}| = a$ και $|\boldsymbol{b}| = b$.



Σχήμα 1.6

(γ) Θεωρούμε δύο νέα διανύσματα, $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$, που δίνονται από τις σχέσεις: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$. Από την ανισότητα του Cauchy θα έχουμε

$$|\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}| \Rightarrow |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \geq |\boldsymbol{y}| - |\boldsymbol{x}|$$

ή ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως: $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|$.

Πρόβλημα 1.12 Γνωρίζοντας ότι

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$$

να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ (επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου)

(β) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

(γ) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \big[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d})\big]\, \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))\boldsymbol{d}$

(δ) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$

(ε) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$

Λύση:

(α) Θεωρούμε ένα νέο διάνυσμα

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

Το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\boldsymbol{u}$ με ένα άλλο τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ θα μας δώσει

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \big[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\big] - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b}$. Άρα η ποσότητα $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ γράφεται ως

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$$

επομένως $\boldsymbol{u} = 0$, ή το $\boldsymbol{u}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\boldsymbol{v}$. Το διάνυσμα $\boldsymbol{v}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, άρα το διάνυσμα $\boldsymbol{u}$ πρέπει να είναι μηδέν ώστε το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.
Για $\boldsymbol{u} = 0$ έχουμε

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

(β) Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, το διάνυσμα $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$. Ομοίως το διάνυσμα $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, άρα το διάνυσμα $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ θα βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$, δηλαδή μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}$$

όπου οι συντελεστές x, y θα πρέπει να προσδιορισθούν με κάποιο τρόπο.
Το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{a}$ με $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ δίνει

$$\boldsymbol{a} \cdot \big[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\big] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 0$$

$$\Rightarrow x(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + y(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}} = -\frac{y}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \lambda$$

όπου λ ορίζουμε τους ίσους λόγους. Επομένως έχουμε

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \lambda \big[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\big] \tag{1.6}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, η σχέση (1) μας δίνει

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \lambda \left[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c}\right]$$

και αν αυτή η σχέση πολλαπλασιαστεί εσωτερικά με το $\boldsymbol{c}$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{c} \cdot \left[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\right] = \lambda \left[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) - a^2 c^2\right]$$

ή

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \lambda \left[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})^2 - a^2 c^2\right] = \lambda a^2 c^2 (\cos^2\theta - 1)$$

$$\Rightarrow -a^2 c^2 \sin^2\theta = \lambda a^2 c^2 (-\sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

άρα ισχύει

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$$

Στη γενική περίπτωση όπου $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$, θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{b}$ με $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε

$$\boldsymbol{b} \cdot \left[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\right] = \lambda \left[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\right]$$

ή

$$(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \lambda \left[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\right] \tag{1.7}$$

Το πρώτο μέλος της σχέσης (1) δίνει

$$(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} = b^2 \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \tag{1.8}$$

διότι ισχύει η διανυσματική ταυτότητα

$$-(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = \left[(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - |\boldsymbol{b}|^2 \boldsymbol{a}\right]$$

Από τις σχέσεις (1) και (1) έχουμε $\lambda = 1$.

(γ) Αν θεωρήσουμε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$$

και εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β)

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$$

θα έχουμε

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \left[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d}\right] \boldsymbol{c} - \left[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}\right] \boldsymbol{d} = \left[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d})\right] \boldsymbol{c} - \left[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\right] \boldsymbol{d}$$

(δ) Αν θεωρήσουμε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$$

και εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β),

$$\boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$$

θα έχουμε

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \cdot \left[(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\right]$$

άρα

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$$

(ε) Γνωρίζουμε ότι

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

και

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

Προσθέτοντας τις τρεις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

εφ' όσον το εσωτερικό γινόμενο υπακούει στην αντιμεταθετική ιδιότητα.

Πρόβλημα 1.13 Να υπολογίσετε ή να αποδείξετε τις ακόλουθες σχέσεις:

(α)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$$

(β)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\right]$$

(γ)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

(δ)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}$$

(ε)

$$\hat{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

Λύση:

(α)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) + \boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2 + \boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = |\dot{\boldsymbol{r}}|^2 + \boldsymbol{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}$$

(β) Από τη διανυσματική ταυτότητα $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}\right]$$

ή

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t} = \\
&= \left[\boldsymbol{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{c} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} - \left(\boldsymbol{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{c} - \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{b}\right)\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

(γ)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

όπου το $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = 0$

(δ)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(1/r)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}$$

(ε) Με τη βοήθεια του αποτελέσματος της ερώτησης (γ) θα έχουμε

$$\hat{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \times \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}/r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \times \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}\right] = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

όπου
$$\frac{\boldsymbol{r}}{r} \times \boldsymbol{r} = 0$$

Πρόβλημα 1.14

(α) Αν $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cos(\omega t) + \boldsymbol{b}\sin(\omega t)$, όπου $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \omega$ είναι σταθερές ποσότητες, να δείξετε ότι ισχύει

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \omega\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

και επιπλέον να δείξετε ότι το $\boldsymbol{r}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0$$

(β) Αν $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\mathrm{e}^{\omega t} + \boldsymbol{b}\mathrm{e}^{-\omega t}$ να δείξετε ότι
$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2\boldsymbol{r} = 0$$

(γ) Αν
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} \qquad \text{και} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b}$$

να δείξετε ότι
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

Λύση:

(α) Για $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cos(\omega t) + \boldsymbol{b}\sin(\omega t)$ η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{a}\omega\sin(\omega t) + \boldsymbol{b}\omega\cos(\omega t)$$

Άρα

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \omega(\boldsymbol{a}\cos(\omega t) + \boldsymbol{b}\sin(\omega t)) \times (-\boldsymbol{a}\sin(\omega t) + \boldsymbol{b}\cos(\omega t)) \\ &= \omega\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = \omega\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\end{aligned}$$

εφ' όσον το $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 0$ και $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. Η δεύτερη παράγωγος του $\boldsymbol{r}$ είναι

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2(-\boldsymbol{a}\cos(\omega t) - \boldsymbol{b}\sin(\omega t)) = -\omega^2\boldsymbol{r}$$

(β) Για $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\mathrm{e}^{\omega t} + \boldsymbol{b}\mathrm{e}^{-\omega t}$ η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}\omega\mathrm{e}^{\omega t} - \boldsymbol{b}\omega\mathrm{e}^{-\omega t}$$

και η δεύτερη παράγωγος έχει

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{a}\omega^2\mathrm{e}^{\omega t} + \boldsymbol{b}\omega^2\mathrm{e}^{-\omega t} = \omega^2(\boldsymbol{a}\mathrm{e}^{\omega t} + \boldsymbol{b}\mathrm{e}^{-\omega t}) = \omega^2\boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \omega^2\boldsymbol{r} = 0$$

(γ) Από την ιδιότητα της παραγώγου του εξωτερικού γινομένου θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \\
&= (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}) \\
&= -\big[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{a}\big] + \big[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{b}\big] = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.15 Να δείξετε ότι η ταχύτητα, $\boldsymbol{v}$, και η επιτάχυνση, $\boldsymbol{a}$, ενός σωματιδίου εκφράζονται

(α) σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου $\boldsymbol{r} = (\rho, \phi, z)$, και

$$\dot\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \dot\phi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \quad \dot z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot\rho = \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ddot z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

με τη μορφή

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot z\hat{\boldsymbol{z}} \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \ddot z\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

(β) σε σφαιρικές συντεταγμένες, όπου $\boldsymbol{r} = (r, \theta, \phi)$ και

$$\dot r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \quad \dot\phi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ddot\theta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ddot\phi = \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}$$

με τη μορφή

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot r\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta + r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (2r\dot\theta\dot\phi + 2\dot r\dot\phi\sin\theta + r\ddot\phi\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}
\end{aligned}$$

Λύση:

(α) Ένα σημείο στον τριδιάστατο χώρο χαρακτηρίζεται από τρεις κυλινδρικές συντεταγμένεσ: (ρ, ϕ, z). Οι αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) συνδέονται με τις κυλινδρικές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi, \qquad z = z$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ κατά μήκος του ρ εκφράζεται μέσω των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ ως

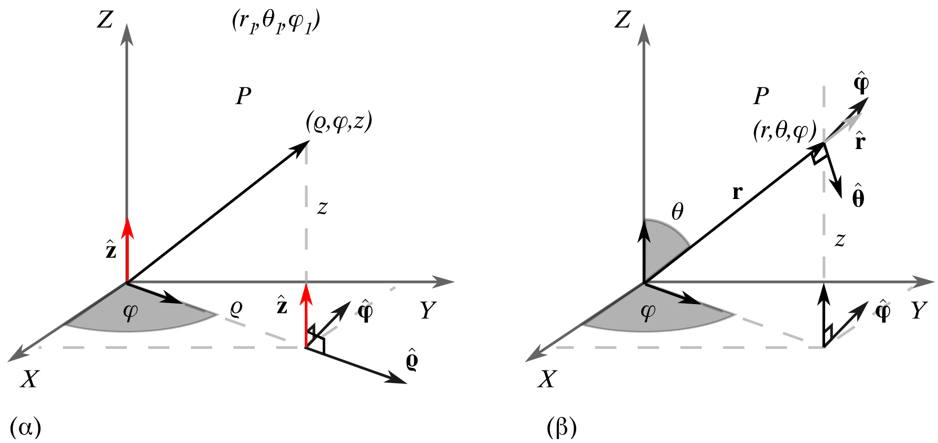
$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\phi$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ είναι κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ και έχει περιστραφεί κατά 90° γύρω από τον άξονα z, δηλαδή $\phi \to \phi + 90^\circ$. Άρα το $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ γράφεται ως

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi$$

και στη διεύθυνση του z έχουμε

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 1.7

Οι πρώτες παράγωγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων έχουν

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \dot{\phi}(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\phi) = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.9}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = \dot{\phi}(-\hat{\boldsymbol{x}}\cos\phi - \hat{\boldsymbol{y}}\sin\phi) = -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{1.10}$$

και

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = 0 \tag{1.11}$$

Το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες θα γραφτεί ως

$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7. Άρα η ταχύτητα, $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \dot{\boldsymbol{r}}$ θα είναι

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} + \dot{z}\hat{\boldsymbol{z}} + z\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Ομοίως, η επιτάχυνση, $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$ εκφράζεται ως

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\rho}\dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \rho\ddot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \rho\dot{\phi}\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}} + \dot{z}\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1), (1) και (1) η επιτάχυνση δίνει

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\phi}) = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}$$

άρα η επιτάχυνση γράφεται ως

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

(β) Ένα σημείο στον τρισδιάστατο χώρο χαρακτηρίζεται από τρεις σφαιρικές συντεταγμένεσ: (r, θ, ϕ). Οι αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) συνδέονται με τις κυλινδρικές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$$

όπως φαίνεται από το σχήμα 1.7.

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{r}}$ κατά μήκος του διανύσματος $\boldsymbol{r}$ εκφράζεται μέσω των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ ως

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta \cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta \sin\phi + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{r}}$ και έχει περιστραφεί κατά 90^o γύρω από ένα άξονα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ και τον άξονα z, δηλαδή $\theta \to \theta + 90^o$. Άρα το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ γράφεται ως

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta \cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta \sin\phi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ είναι κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ (όπως και στις κυλινδρικές συντεταγμένες) και έχει περιστραφεί κατά 90^o γύρω από τον άξονα z, δηλαδή $\phi \to \phi + 90^o$. Άρα το $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ γράφεται ως

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\phi$$

Η πρώτη παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}$ έχει

$$\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta} \cos\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{x}} - \dot{\phi} \sin\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{x}} + \dot{\theta} \cos\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{y}} + \dot{\phi} \sin\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{y}} - \dot{\theta} \sin\theta \hat{\boldsymbol{z}}$$

ή

$$\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = (\dot{\theta} \cos\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{x}} + \dot{\theta} \cos\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{y}} - \dot{\theta} \sin\theta \hat{\boldsymbol{z}}) + \dot{\phi} \sin\theta (\cos\phi \hat{\boldsymbol{y}} - \sin\phi \hat{\boldsymbol{x}})$$

Παρατηρούμε ότι το $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}}$ μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ ως

$$\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi} \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.12}$$

Για το $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ έχουμε

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta} \sin\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{x}} - \dot{\phi} \cos\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{x}} - \dot{\theta} \sin\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{y}} + \dot{\phi} \cos\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{y}} - \dot{\theta} \cos\theta \hat{\boldsymbol{z}}$$

ή

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = (-\dot{\theta} \sin\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{x}} - \dot{\theta} \sin\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{y}} - \dot{\theta} \cos\theta \hat{\boldsymbol{z}}) + \dot{\phi} \cos\theta (-\sin\phi \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi \hat{\boldsymbol{y}})$$

Τελικά για το $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ θα έχουμε

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi} \cos\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.13}$$

Το $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}}$ θα είναι

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\cos\phi \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{x}} - \sin\phi \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{y}} = -\dot{\phi} (\cos\phi \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi \hat{\boldsymbol{y}})$$

Από τις εκφράσεις των $\hat{\boldsymbol{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, παρατηρούμε ότι

$$\sin\theta \hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\phi \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi \hat{\boldsymbol{y}}$$

Άρα

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\dot{\phi} (\sin\theta \hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{1.14}$$

Το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$ στις σφαιρικές συντεταγμένες θα γραφτεί ως

$$\boldsymbol{r} = r \hat{\boldsymbol{r}}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7. Άρα η ταχύτητα, $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \dot{\boldsymbol{r}}$ θα είναι

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r} \hat{\boldsymbol{r}} + r \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}$$

και από τη σχέση (1) έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r} \hat{\boldsymbol{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\phi} \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1), (1) και (1) η επιτάχυνση δίνει

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r} \hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r} \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + \dot{r} \dot{\phi} \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} + r \ddot{\phi} \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} + r \dot{\phi} \cos\theta \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} + r \dot{\phi} \sin\theta \dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}}$$

ή μετά από ανακατανομή των διαφόρων όρων, θα έχουμε

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (2r\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + r\ddot{\phi} \sin\theta) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Πρόβλημα 1.16

(α) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο $\boldsymbol{r}_1 = (-1, 0, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\boldsymbol{N} = (1, 1, 0)$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση επιπέδου που περνά από τα σημεία $\boldsymbol{r}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (1, 1, 1)$ και $\boldsymbol{r}_3 = (0, 0, 2)$.

Λύση:

(α) Αν ένα τυχαίο σημείο $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ και ένα συγκεκριμένο σημείο $\boldsymbol{r}_1 = -\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}}$ ανήκουν στο επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο διάνυσμα $\boldsymbol{N}$ θα πρέπει το διάνυσμα της διαφοράς $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ να ανήκει στο επίπεδο που θα είναι κάθετο στο $\boldsymbol{N}$. Άρα θα ισχύει

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{N} = 0$$
$$\Rightarrow \big[(x+1)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + (z-1)\hat{\boldsymbol{z}}\big] \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}) = 0$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$x + y + 1 = 0$$
$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = N^2 \tag{1.15}$$

Το ίδιο θα ισχύει για το σημείο $\boldsymbol{r}_1$ που ανήκει στο επίπεδο

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{N} = N^2 \tag{1.16}$$

Επομένως, αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις (1) και (1) μεταξύ τους θα έχουμε

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{N} = 0 \quad \Rightarrow \big[(x+1)\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + (z-1)\hat{\boldsymbol{z}}\big] \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}) = 0$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$x + y + 1 = 0$$

(β) Θεωρούμε τρία νέα διανύσματα $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$ και $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$, όπου $\boldsymbol{r}$ είναι ένα διάνυσμα που ορίζει ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου. Για να είναι τα τρία αυτά διανύσματα συνεπίπεδα θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \cdot \big[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\big] = 0$$

ή

$$\big[(x-1)\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}\big] \cdot \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-1) - y + z = 0$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$2x - y + z = 2$$

Πρόβλημα 1.17 Αν $\boldsymbol{X}$ είναι ένα άγνωστο διάνυσμα που ικανοποιεί τις σχέσεις $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \Phi$, όπου $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ και Φ είναι γνωστά μεγέθη, να βρείτε το $\boldsymbol{X}$ ως συνάρτηση των γνωστών μεγεθών.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι για τρία τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}'$ ισχύει η ταυτότητα

$$\boldsymbol{A}' \times (\boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{C}') = (\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{C}')\boldsymbol{B}' - (\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}')\boldsymbol{C}'$$

Αν θεωρήσουμε ότι $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C}' = \boldsymbol{X}$ η παραπάνω ταυτότητα θα γραφτεί ως ακολούθως

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) \Rightarrow \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\Phi - \boldsymbol{X}A^2$$

Άρα το ζητούμενο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ είναι

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{A}\Phi - \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}{A^2}$$

Πρόβλημα 1.18 Η ταχύτητα απομάκρυνσης ενός Γαλαξία δίνεται από την εξίσωση του Hubble $v = Hr$ όπου r είναι η απόσταση του Γαλαξία, H είναι η σταθερά του Hubble. Αν $v(t=0) = v_0$, βρείτε την ταχύτητα $v(t)$.

Λύση:

Από την εξίσωση του Hubble έχουμε

$$v = Hr$$

με αρχική συνθήκη

$$v(t=0) = v_0 \Rightarrow r_0 = \frac{v_0}{H}$$

Επιπλέον έχουμε

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = Hr \Rightarrow \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \int_0^t H\mathrm{d}t \Rightarrow \ln r - \ln r_0 = Ht$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = Ht \Rightarrow \frac{r}{r_0} = \mathrm{e}^{Ht} \Rightarrow r(t) = r_0\mathrm{e}^{Ht}$$

άρα η ταχύτητα είναι

$$v(t) = Hr = \underbrace{Hr_0}_{v_0}\mathrm{e}^{Ht} = v_0\mathrm{e}^{Ht}$$

Πρόβλημα 1.19 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι $\boldsymbol{r} = bt\hat{\boldsymbol{x}} - ct^2\hat{\boldsymbol{y}}$, όπου t είναι ο χρόνος και b, c σταθερές. Να βρεθούν:

(α) Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

(β) Η ταχύτητα του σωματιδίου $\boldsymbol{v}$ και η επιτάχυνση καθώς και τα μέτρα τους.

(γ) Η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{v}$, ως συνάρτηση του χρόνου.

(δ) Η ολική απόσταση που διανύει το σωματίδιο στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t = 0$ και $t = b/2c$.

Λύση:

(α, β) Δίνεται το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου

$$\boldsymbol{r} = bt\hat{\boldsymbol{x}} - ct^2\hat{\boldsymbol{y}}$$

Η ταχύτητά του είναι

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = b\hat{\boldsymbol{x}} - 2ct\hat{\boldsymbol{y}}$$

και η επιτάχυνσή του

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = -2c\hat{\boldsymbol{y}}$$

Έχουμε

$$x = bt \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{b} \quad \text{και} \quad y = -ct^2$$

και η εξίσωση κίνησης είναι

$$y = -\frac{c}{b^2}x^2$$

το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|\dot{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}$$

το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}| = 2c$$

(γ) Σχηματίζουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για να υπολογίσουμε τη μεταξύ τους γωνία

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = va\cos\phi$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 4c^2 t = \left(\sqrt{b^2+4c^2t^2}\right) 2c\cos\phi \\
&\Rightarrow \cos\phi = \frac{2ct}{\sqrt{b^2+4c^2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{[b/(2ct)]^2+1}} \\
&\Rightarrow \cos^2\phi = \frac{1}{[b/(2ct)]^2+1} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\phi} - 1 = \left(\frac{b}{2ct}\right)^2 \\
&\Rightarrow \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \left(\frac{b}{2ct}\right)^2 \\
&\Rightarrow \tan\phi = \frac{b}{2ct} \\
&\Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{b}{2ct}\right)
\end{aligned}
$$

(δ)

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \quad \Rightarrow \int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^{b/2c} v\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow s = \int_0^{b/2c} \sqrt{b^2+4c^2t^2}\mathrm{d}t = b\int_0^{b/2c} \sqrt{1+\frac{4c^2t^2}{b^2}}\mathrm{d}t \tag{1.17}$$

αν θεωρήσουμε ότι

$$2ct/b = z \quad \Rightarrow t = bz/2c \Rightarrow \mathrm{d}t = (b/2c)\mathrm{d}z$$

επομένως αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε

$$s = \frac{b^2}{2c}\int_0^1 \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z \Rightarrow s = \frac{b^2}{4c}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

Πρόβλημα 1.20 Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος

$$x = 3a\sin(\omega t),\ y = 4a\sin(\omega t),\ z = 5a\cos(\omega t)$$

όπου t είναι ο χρόνος και ω, a είναι θετικές.

(α) Να βρεθούν τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης σαν συνάρτηση του χρόνου.

(β) Να αποδείξετε ότι η τροχιά της μάζας είναι επίπεδη.

Λύση:

(α) Μας δίνεται

$$x = 3a\sin(\omega t), \quad y = 4a\sin(\omega t), \quad z = 5a\cos(\omega t)$$

Επομένως το διάνυσμα θέσης είναι

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} = 3a\sin\omega t\hat{\boldsymbol{x}} + 4a\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} + 5a\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Η ταχύτητα είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 3a\omega\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + 4a\omega\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} - 5a\omega\sin\omega t\hat{\boldsymbol{z}}$$

Η επιτάχυνση είναι

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -3a\omega^2\sin\omega t\hat{\boldsymbol{x}} - 4a\omega^2\sin\omega t\hat{\boldsymbol{y}} - 5a\omega^2\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\omega^2 \left(3a \sin(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{x}} + 4a \sin(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{y}} + 5a \cos(\omega t)\, \hat{\boldsymbol{z}}\right) \\
&= -\omega^2 \boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

(β) Για να αποδείξουμε ότι η τροχιά της μάζας είναι πάνω σε επίπεδο αρκεί να αποδείξουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο ενός τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{r}$ με την ταχύτητα του σώματος είναι ένα σταθερό διάνυσμα.
Έστω

$$\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

Τότε έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

Χρησιμοποιούμε $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$ και $\boldsymbol{F} = m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = -m\omega^2 \boldsymbol{r}$ και βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{z}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \frac{1}{m}(-m\omega^2 \boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{z}} = \text{σταθερό διάνυσμα}$$

Πρόβλημα 1.21 Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

(α)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})\right] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

(β)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] = \boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^3}\right)$$

όπου $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{C}$ είναι τρία μη μηδενικά διανύσματα.

Λύση:

(α) Από την ιδιότητα της παραγώγου του εσωτερικού γινομένου

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})\right] &= \boldsymbol{A} \cdot \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \\
&= \boldsymbol{A} \cdot \left[\boldsymbol{B} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{C}\right] + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \\
&= \boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{B} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t}\right) + \boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{C}\right) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})
\end{aligned}
$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχει χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$.

(β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right) - \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2} \cdot \left(\boldsymbol{A} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right) + \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^3} \cdot \left(\boldsymbol{A} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.18}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right)=\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right)=0$$

και

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)=0$$

επομένως η σχέση (1) θα έχει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]=\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^3}\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)=\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^3}\right)$$

Πρόβλημα 1.22 Να δείξετε ότι το $\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, ($\boldsymbol{r}$ είναι διανυσματική συνάρτηση του χρόνου) αν το $\boldsymbol{r}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{r}f(r)$$

όπου η $f(r)$ είναι συνάρτηση του μέτρου $r=|\boldsymbol{r}|$.

Λύση:

Από το πρόβλημα (1.13γ) θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}f(r)=0$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{C}$$

όπου $\boldsymbol{C}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

Πρόβλημα 1.23 Να αποδείξετε τη διανυσματική σχέση

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0$$

Λύση:

Από την άσκηση (1.12δ) έχουμε

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$$

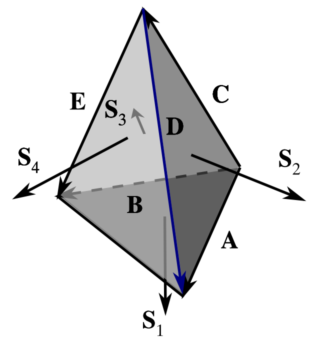
$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

Προσθέτοντας τις τρεις παραπάνω σχέσεις, έχουμε

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0$$

Πρόβλημα 1.24 Θεωρήστε ένα τετράεδρο Τ. Ορίζουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{S}_i$ που είναι κάθετα στις τέσσερις επιφάνειες του τετραέδρου και με μέτρα ίσα με τα εμβαδά αυτών των πλευρών. Να αποδείξετε ότι

$$\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_3+\boldsymbol{S}_4=0$$



Σχήμα 1.8

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μας δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα δύο αυτά διανύσματα. Επομένως τα κάθετα διανύσματα μπορούν να εκφραστούν σαν το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που ορίζονται από τις πλευρές των εδρών του τετραέδρου. Έτσι έχουμε

$$\boldsymbol{S}_1 = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{2}, \qquad \boldsymbol{S}_2 = -\frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}}{2} = \frac{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}}{2}$$
$$\boldsymbol{S}_3 = \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}{2}, \qquad \boldsymbol{S}_4 = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{D}}{2}$$

όπου

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$$

Άρα μπορούμε να εκφράσουμε το $\boldsymbol{S}_4$ ως εξής

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_4 = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{D}}{2} &= \frac{(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})}{2}\\ &= \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}}{2} - \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}{2} - \frac{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}}{2} + \frac{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}}{2} = -\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{S}_3\\ &\Rightarrow \quad \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4 = 0\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.25 Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}$ ενός επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{x}$$

Αν $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha} \neq 1$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ ως συνάρτηση των $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$.

Λύση:

Πολλαπλασιάζουμε (εσωτερικό γινόμενο) τη σχέση $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{x}$ με το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{aligned}\big[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}\big]\cdot\boldsymbol{\alpha} &= (\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\alpha}\\ \Rightarrow (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}\\ \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha} - 1) &= \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}\\ \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x} &= \frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha} - 1}\end{aligned}$$

διότι $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha} \neq 1$.

Αντικαθιστώντας το $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}$ στην αρχική σχέση $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{x}$ θα έχουμε

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}-1}\right)\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{x}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}-1}\right)\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}$$

Πρόβλημα 1.26 Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$. Να αποδείξετε ότι

(α) Ο φορέας του διανύσματος $\boldsymbol{u} = \beta\boldsymbol{\alpha} + \alpha\boldsymbol{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, όπου $\alpha = |\boldsymbol{\alpha}|$ και $\beta = |\boldsymbol{\beta}|$,

(β) Ο φορέας του διανύσματος $\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{\alpha} - \alpha\boldsymbol{\beta}$ διχοτομεί τη παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ (σχήμα 1.9).

Λύση:

(α) Θα πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{u}$ μία φορά με το $\boldsymbol{\beta}$ και μία με το $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\beta}|\alpha^2 + |\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{u}|\cos\theta_2 = |\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{u}|}(1+\cos\theta)$$

Ομοίως

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} + |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|^2$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{u}|\cos\theta_1 = |\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta + |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|^2$$

$$\Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{|\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{u}|}(1+\cos\theta)$$

Άρα από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\cos\theta_2 = \cos\theta_1$$

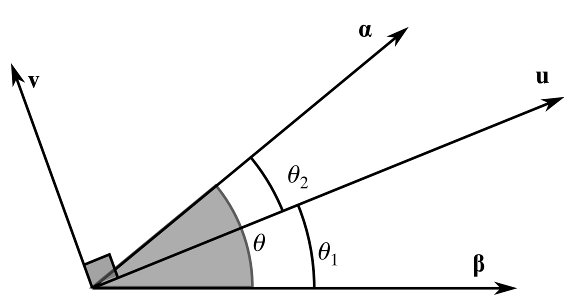
$$\Rightarrow \theta_2 = \theta_1$$

Επομένως ο φορέας του διανύσματος $\boldsymbol{u} = \beta\boldsymbol{\alpha} + \alpha\boldsymbol{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

(β) Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\boldsymbol{u}$ από το προηγούμενο σκέλος και του διανύσματος $\boldsymbol{v}$ έχουμε

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{\beta}|^2|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2|\boldsymbol{\alpha}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$$



Σχήμα 1.9

Πρόβλημα 1.27

(α) Να αποδείξετε τη διανυσματική ταυτότητα

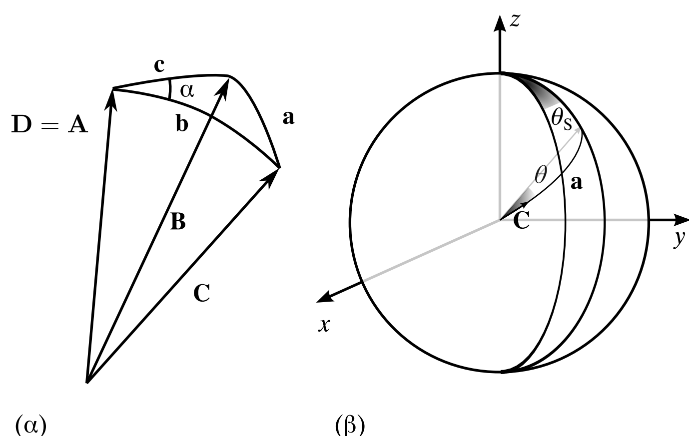
$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \tag{1.19}$$

και να αποδείξετε το νόμο του συνημιτόνου στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}$

$$\cos\alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin \alpha$$

όπου τα $\alpha,\ b,\ c$ ορίζονται στο σχήμα 1.10 (*Ο νόμος του συνημιτόνου στη σφαιρική τριγωνομετρία ως μια ειδική περίπτωση μιας διανυσματικής ταυτότητας*).

(β) Ας υποθέσουμε ότι ο άξονας των z είναι κατά μήκος του διανύσματος $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}$. και οι γωνίες των διανυσμάτων $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $\theta,\ \phi$ και $\theta_s,\ \phi_s$, αντίστοιχα. Βρείτε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων: $c,\ b,\ \alpha$ και $\theta,\ \phi,\ \theta_s,\ \phi_s$.



Σχήμα 1.10

Λύση:

(α) Από τις διανυσματικές ταυτότητες

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$$

και

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

Η σχέση (1.27) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{A} \cdot \left[\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})\right] = \boldsymbol{A} \cdot \left[\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\right] \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$ η παραπάνω σχέση ανάγεται στη σχέση

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) - |\boldsymbol{A}|^2(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|(\cos b \cos c - \cos\alpha)$$

Επιπλέον

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) = -|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}| \sin c \sin b \cos\alpha$$

και επομένως

$$\cos\alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin \alpha$$

(β) Από το σχήμα 1.10 είναι φανερό ότι

$$c = \theta_s, \qquad b = \theta, \qquad \alpha = \phi_s - \phi$$

Πρόβλημα 1.28 Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = (6, -4)$ και $\boldsymbol{\beta} = (-2, 2)$. Να αναλύσετε το $\boldsymbol{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\boldsymbol{\alpha}$.

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{\beta} = \lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}$, όπου $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{a}$. Το εσωτερικό γινόμενο των $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\beta} = \lambda \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\beta} = \lambda |\boldsymbol{a}|^2$$

$$\Rightarrow 6\,(-2) + (-4)\,2 = 52\,\lambda$$

$$\Rightarrow -20 = 52\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{5}{13}$$

Επομένως

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{5}{13}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}$$

και

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\beta} + \frac{5}{13}\boldsymbol{a} = (-2, 2) + \frac{5}{13}(6, -4) = \left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right)$$

Τελικά

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{5}{13}\boldsymbol{a} + \left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right)$$

Πρόβλημα 1.29 Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

(α) Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει

$$\lambda^2 \boldsymbol{\alpha}^2 + 2\lambda\mu(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) + \mu^2 \boldsymbol{\beta}^2 \geq 0$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(β) Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\alpha} + |\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

Λύση:

(α) Η σχέση

$$\lambda^2 \boldsymbol{a}^2 + 2\lambda\mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\beta}) + \mu^2 \boldsymbol{\beta}^2 \geq 0$$

γράφεται ισοδύναμα ως

$$(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{\beta})^2 \geq 0$$

που είναι προφανές ότι ισχύει. Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ ή, ισοδύναμα, $\lambda \boldsymbol{a} = -\mu \boldsymbol{\beta}$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\boldsymbol{a} = (-\mu/\lambda)\boldsymbol{\beta}$, οπότε $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{\beta}$, που δεν ισχύει γιατί τα διανύσματα είναι μη συγγραμμικά.
Επομένως $\lambda = 0$, οπότε $\mu \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ και άρα $\mu = 0$.
Άρα η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\lambda = \mu = 0$.

(β) Αν ω είναι η γωνία των $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{\beta}$ και το $\boldsymbol{u}$ σχηματίζει με το $\boldsymbol{a}$ γωνία ϕ_1 και με το $\boldsymbol{\beta}$ γωνία ϕ_2, τότε έχουμε

$$\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{\beta}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\beta})$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{u}| \cos \phi_1 = |\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{\beta}| \cos \omega$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{u}|\cos\phi_1 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{\beta}|(1+\cos\omega)$$

$$\cos\phi_1 = \frac{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{u}|}(1+\cos\omega) \tag{1.20}$$

Ομοίως έχουμε

$$\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{\beta}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\beta}|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\beta}) + |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{\beta}|^2$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{u}|\cos\phi_2 = |\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{\beta}|\cos\omega + |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{\beta}|^2$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{u}|\cos\phi_2 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{\beta}|(1+\cos\omega)$$

$$\cos\phi_2 = \frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{u}|}(1+\cos\omega) \tag{1.21}$$

Από τις σχέσεις (1) και (1) έπεται $\cos\phi_1 = \cos\phi_2$, άρα $\phi_1 = \phi_2$.

Πρόβλημα 1.30

(α) Υπολογίστε το μήκος των διαγωνίων και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{y}}$ και $\boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$.

(β) Αν

$$\boldsymbol{a} = a_1\hat{\boldsymbol{x}} + a_2\hat{\boldsymbol{y}} + a_3\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\hat{\boldsymbol{x}} + b_2\hat{\boldsymbol{y}} + b_3\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{c} = c_1\hat{\boldsymbol{x}} + c_2\hat{\boldsymbol{y}} + c_3\hat{\boldsymbol{z}}$$

να δείξετε ότι

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

Σχεδιάστε ποιοτικά το διάνυσμα $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

Λύση:

(α)

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}$$

άρα το μήκος της διαγωνίου είναι

$$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}}$$

άρα το μήκος της διαγωνίου είναι

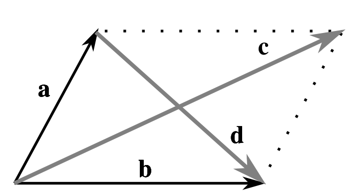
$$|\boldsymbol{d}| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Το εμβαδόν είναι

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{6}$$

(β)

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (a_1\hat{\boldsymbol{x}} + a_2\hat{\boldsymbol{y}} + a_3\hat{\boldsymbol{z}}) \times \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Σχήμα 1.11

$$
\begin{aligned}
&= (a_1\hat{\boldsymbol{x}} + a_2\hat{\boldsymbol{y}} + a_3\hat{\boldsymbol{z}}) \times \left[(b_2c_3 - b_3c_2)\hat{\boldsymbol{x}} + (b_3c_1 - b_1c_3)\hat{\boldsymbol{y}} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{\boldsymbol{z}}\right] \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & (b_3c_1 - b_1c_3) & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix} \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \hat{\boldsymbol{y}}b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \hat{\boldsymbol{z}}b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\
&- \hat{\boldsymbol{x}}c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \hat{\boldsymbol{y}}c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \hat{\boldsymbol{z}}c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= \boldsymbol{b}(a \cdot c) - \boldsymbol{c}(a \cdot b)
\end{aligned}
$$

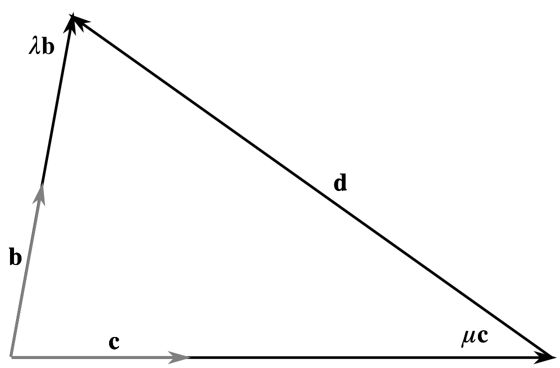
Θέτουμε

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = \lambda \qquad \text{και} \qquad (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \mu$$

Άρα

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \lambda \boldsymbol{b} - \mu \boldsymbol{c}$$

όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί.



Σχήμα 1.12

Πρόβλημα 1.31 Δίνονται τα σημεία P$(3, 1, -2)$ και Q$(-1, 3, 4)$ (σχήμα 1.13).

(α) Προσδιορίστε το διάνυσμα PQ και υπολογίστε το μέτρο του.

(β) Αν O είναι η αρχή των αξόνων, προσδιορίστε τα μέσα των πλευρών του τριγώνου OPQ.

(γ) Προσδιορίστε τα διανύσματα των διαμέσων του τριγώνου.

(δ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

Λύση:

(α)

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -4\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} + 6\hat{\boldsymbol{z}}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{56}$$

(β)

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \quad B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$$

και επειδή

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$$

(γ)

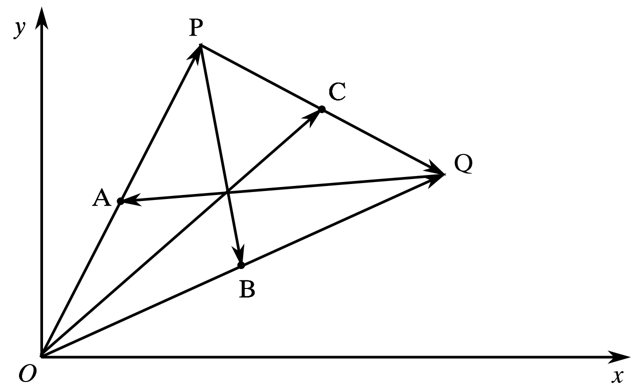
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(προηγούμενο ερώτημα)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) - (3, 1 - 2) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 4\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) - (-1, 3, 4) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, -5\right)$$

(δ)

$$\text{Εμβαδόν } = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}} \times \overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 5\sqrt{3}$$



Σχήμα 1.13

Πρόβλημα 1.32 Βρείτε τη γωνία μεταξύ της διαγωνίου ενός κύβου και της διεύθυνσης της διαγωνίου μιας από τις έδρες του.

Λύση:

Έστω ότι η κάτω έδρα του κύβου έχει κορυφές

$$\mathrm{A} = (0,0,0), \quad \mathrm{B} = (1,0,0), \quad \mathrm{C} = (1,1,0), \quad \mathrm{D} = (0,1,0)$$

και η πάνω έδρα

$$\mathrm{E} = (0,0,1), \quad \mathrm{F} = (1,0,1), \quad \mathrm{G} = (1,1,1), \quad \mathrm{H} = (0,1,1)$$

Τότε η διαγώνιος του κύβου είναι η AG και η διαγώνιος μιας έδρας είναι η AC. Η γωνία μεταξύ τους είναι

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right| \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,1,0)}{\left|(1,1,1)\right| \left|(1,1,0)\right|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Άρα

$$\theta = \arccos(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \approx 35^o$$

Πρόβλημα 1.33 Ποιες είναι οι προϋποθέσεις ώστε να ισχύουν οι παρακάτω διανυσματικές σχέσεις

(α) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, με $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}|$

(β) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$

(γ) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \perp (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$

(δ) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ και $|\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 = |\boldsymbol{C}|^2$

Λύση:

(α) Δίνεται ότι $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ και ότι $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|$. Αυτό ισχύει μόνο όταν τα διανύσματα $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα.

(β) Δίνεται ότι $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}$, πράγμα που ισχύει μόνο όταν το διάνυσμα $\boldsymbol{B}$ είναι ίσο προς το μηδενικό διάνυσμα.

(γ) Η σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ όταν αυτά είναι κάθετα μεταξύ τους είναι

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$$

Αναπτύσσοντας το εσωτερικό γινόμενο προκύπτει

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\\&=AA\cos 0^o-BB\cos 0^o=A^2-B^2=0\end{aligned}$$

και τελικά

$$A=B$$

(δ) Αφού για τα διανύσματα $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ισχύει ότι

$$|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2=|\boldsymbol{C}|^2$$

συμπεραίνεται ότι ικανοποιείται το Πυθαγόρειο Θεώρημα και επομένως τα διανύσματα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Πρόβλημα 1.34 Δίνονται τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\alpha}=3\hat{\boldsymbol{x}}+4\hat{\boldsymbol{y}}+2\hat{\boldsymbol{z}},\qquad \boldsymbol{b}=\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}},\qquad \boldsymbol{c}=6\hat{\boldsymbol{z}}$$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα. Θεωρήστε ως βάση του παραλληλεπιπέδου το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$. Επίσης να υπολογιστεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου.

Λύση:

Το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπιπέδου είναι ίσο προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$. Αυτό είναι ίσο προς

- *μέθοδος (α)*

$$\begin{aligned}E=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\left|\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}&\hat{\boldsymbol{y}}&\hat{\boldsymbol{z}}\\3&4&2\\1&1&1\end{bmatrix}\right|&=\big|(4-2)\hat{\boldsymbol{x}}-(3-2)\hat{\boldsymbol{y}}+(3-4)\hat{\boldsymbol{z}}\big|=\big|2\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}-\hat{\boldsymbol{z}}\big|\\&=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}=2.45\end{aligned}$$

- *μέθοδος (β)*

$$E=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$. Η γωνία αυτή είναι ίση προς

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(3\hat{\boldsymbol{x}}+4\hat{\boldsymbol{y}}+2\hat{\boldsymbol{y}})\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}})}{|3\hat{\boldsymbol{x}}+3\hat{\boldsymbol{y}}+2\hat{\boldsymbol{z}}||\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}}=\frac{9}{\sqrt{(9+16+4)}\sqrt{3}}=0,965$$

$$\theta=\arccos(0,965)=15,23^o$$

Επομένως

$$E=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=|3\hat{\boldsymbol{x}}+4\hat{\boldsymbol{y}}+2\hat{\boldsymbol{z}}|\cdot|\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}|\sin 15,23^o=\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}\cdot 0,263=2,45$$

Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι ίσος προς

- *μέθοδος (α)*

$$V = \left|\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\right| = \left|(6\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \left[(3\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}) \times (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}})\right]\right| = \left|(6\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \left|(6\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot \left[(4-2)\hat{\boldsymbol{x}} + (2-3)\hat{\boldsymbol{y}} + (3-4)\hat{\boldsymbol{z}}\right]\right| = \left|(6\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (2\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{z}})\right| = |-6| = 6$$

- *μέθοδος (β)*

$$V = \left|\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\right| = \left|\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right| = \left|6 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right| = 6|(3-4)| = |-6| = 6$$

Πρόβλημα 1.35 Εάν ισχύουν οι ισότητες

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{1.23}$$

να αποδείξετε ότι ισχύει

(α)

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

(β)

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$$

(γ)

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \left[(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})\right] = \left[\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})\right]^2$$

(δ) Μπορεί η ισότητα (1.35) να γραφεί χωρίς παρενθέσεις;

Λύση:

(α) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.35) έχουμε

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})$$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

(β)

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{K} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})$$

όπου έχουμε θέσει $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}$. Όμως

$$\boldsymbol{K} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{D} = \left[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}\right] \cdot \boldsymbol{D} \qquad \text{(με βάση την (1.35))}$$

$$= -\left[\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\right] \cdot \boldsymbol{D} = -\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})\right] \cdot \boldsymbol{D} \qquad \text{(με βάση την (1.35))}$$

$$= \big[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\big]\cdot\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

(γ)

$$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

όπου έχουμε θέσει $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{K}$. Όμως

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}) \qquad \text{(από τη (1.35))}\\ &= \boldsymbol{C}\left[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}\right] - \boldsymbol{A}\left[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{C}\right] = \boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right] - \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]\\ &= \boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right] + \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\right] = \boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right] + \boldsymbol{A}\left[(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B}\right] = \boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) &= \left[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\right]\left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]\\ &= \left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]\left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right] = \left[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]^2\end{aligned}$$

(δ) Μπορεί, γιατί σε αυτή την περίπτωση δε θα μπορούσαμε να τη δούμε ως $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$, αφού το $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ είναι βαθμωτό μέγεθος (αριθμός) και δε θα έχει νόημα το εξωτερικό του γινόμενο με το διάνυσμα $\boldsymbol{C}$.

Πρόβλημα 1.36 Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης

$$\boldsymbol{F}_1 = at\hat{\boldsymbol{x}}, \qquad a = \text{σταθερά}, \quad t \geq 0$$

και υποθέτουμε ότι ξεκινάει με μηδενική αρχική ταχύτητα από την αρχή των αξόνων. Την στιγμή $t = t_A$ προστίθεται μια δύναμη $\boldsymbol{F}_2$ έτσι ώστε η συνισταμένη δύναμη να έχει διεύθυνση σταθερού μέτρου πάνω στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{y}}$ και μέτρο το μισό της $\boldsymbol{F}_1$ τη χρονική στιγμή t_A. Προσδιορίστε την $\boldsymbol{F}_2$, και βρείτε τη θέση του σωματιδίου $\boldsymbol{r}(t)$ για $t > t_A$.

Λύση:

Η ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{o\lambda} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \alpha t\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{F}_2\\ \Rightarrow F_{o\lambda}\hat{\boldsymbol{y}} &= \alpha t\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{F}_2\\ \Rightarrow \boldsymbol{F}_2 &= F_{o\lambda}\hat{\boldsymbol{y}} - \alpha t\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

Το μέτρο της $\boldsymbol{F}_{o\lambda}$ είναι

$$F_{o\lambda} = \frac{F_1 t_A}{2} = \frac{\alpha t_A}{2}$$

Άρα

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{\alpha t_A}{2}\hat{\boldsymbol{y}} - \alpha t\hat{\boldsymbol{x}}$$

Από τον πρώτο νόμο του Newton έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{o\lambda} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\alpha t_A}{2}\hat{\boldsymbol{y}}\\ \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{και} \quad m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\alpha t_A}{2}\end{aligned}$$

Άρα ολοκληρώνοντας στο χρονικό διάστημα από t_A μέχρι t βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης του σώματος είναι

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_A) + \frac{\alpha t_A}{2m}\frac{(t-t_A)^2}{2}\hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{v}(t_A)(t-t_A) \tag{1.24}$$

Από την κίνηση του σώματος πριν από τη χρονική στιγμή t_A μπορούμε να βρούμε τα $\boldsymbol{r}(t_A)$ και $\boldsymbol{v}(t_A)$. Έχουμε

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = at\hat{\boldsymbol{x}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{at^2}{2m}\hat{\boldsymbol{x}}$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{at^3}{6m}\hat{\boldsymbol{x}}$$

άρα για τη χρονική στιγμή $t = t_A$ έχουμε

$$\boldsymbol{r}(t_A) = \frac{at_A^3}{6m}\hat{\boldsymbol{x}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v}(t_A) = \frac{at_A^2}{2m}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{at_A^3}{6m} + \frac{at_A^2(t-t_A)}{2m}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\alpha t_A}{2m}\frac{(t-t_A)^2}{2}\hat{\boldsymbol{y}}$$

Πρόβλημα 1.37

Στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein, η μετατόπιση x ενός σώματος μάζας m_0 πάνω στο οποίο δρα μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ δίδεται από τη σχέση

$$x(t) = \frac{m_0c^2}{F}\left[\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2} - 1\right],$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός.
(α) Να δείξετε ότι η ταχύτητα $\upsilon(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$\upsilon(t) = c\frac{\frac{F}{m_0c}t}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}}$$

(β) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος στο όριο $t \to \infty$.
Παρατήρηση: Στο όριο $t \to \infty$ η δύναμη F έχει επιδράσει στο σώμα για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Εξαρτάται σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα που βρήκατε στο ερώτημα (β) από τη μάζα m_0 του σώματος; Από τη δύναμη F; Ποια είναι κατά τη γνώμη σας η φυσική σημασία του αποτελέσματος αυτού;

Λύση:

(α)
Η ταχύτητα του σώματος θα είναι

$$\upsilon(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{m_0c^2}{F}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_oc}\right)^2 t^2} - 1\right] = \frac{m_0c^2}{F}\frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2\right]$$

$$= \frac{m_0c^2}{F}\frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}}\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 2t = c\frac{\frac{F}{m_0c}t}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}}$$

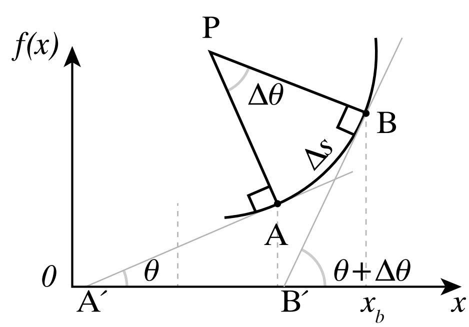
(β)
Η ταχύτητα του σώματος στο όριο $t \to \infty$ θα είναι

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = c \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{F}{m_0 c} t}{\sqrt{\left(\dfrac{F}{m_0 c}\right)^2 t^2 \left(\dfrac{1}{\left(\dfrac{F}{m_0 c}\right)^2 t^2} + 1\right)}}$$

$$= c \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{F}{m_0 c} t}{\dfrac{F}{m_0 c} t \sqrt{1 + \left(\dfrac{m_0 c}{F}\right)^2 \dfrac{1}{t^2}}} = c \frac{1}{\sqrt{1+0}} = c$$

Η ταχύτητα v τείνει ασυμπτωτικά στη μέγιστη δυνατή ταχύτητα του φωτός c. Μια δύναμη F δε μπορεί να επιταχύνει το σωμάτιο πιο γρήγορα από την ταχύτητα του φωτός c.

Πρόβλημα 1.38 Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$, όπου οι εφαπτόμενες στα σημεία Α και Β φέρουν κλίσεις $\tan\theta$ και $\tan(\theta + \Delta\theta)$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.14. Προφανώς θα έχουμε



Σχήμα 1.14

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_A} = \tan\theta, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_B} = \tan(\theta + \Delta\theta)$$

Για μικρές γωνίες $\Delta\theta$, οι κάθετες ευθείες PA και PB στις εφαπτόμενες ΑΆ και ΒΒ́ θα συναντιώνται στο σημείο P, το οποίο θα είναι το κέντρο ενός κύκλου, με το τόξο 6.0πτ$\widehat{\mathrm{AB}}$ να ανήκει στον κύκλο. Η ακτίνα του κύκλου αυτού θα είναι τα ευθύγραμμα τμήματα PA και PB. Αυτή η ακτίνα, PA $=$ PB $= \rho$, θα ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Α ή Β, στο όριο Α $\to$ Β, δηλαδή στην περίπτωση που $\Delta\theta \to 0$. Το αντίστροφο του ρ, $1/\rho$, θα ονομάζεται καμπυλότητα της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Α.
Να δείξετε ότι η ακτίνα καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{\left[1 + (f')^2\right]^{3/2}}{f''}$$

Να υπολογίσετε την ακτίνα καμπυλότητας της έλληψης.

Λύση:

Το μήκος τόξου $\Delta s =$ 6.0πτ$\widehat{\mathrm{AB}}$ για μικρές γωνίες $\Delta\theta$ θα είναι

$$\Delta s = \rho \Delta\theta$$

και στο όριο $\Delta\theta \to 0$, η σχέση αυτή ορίζει την ακτίνα καμπυλότητας

$$\rho = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \tag{1.25}$$

Το απειροστό μήκος τόξου $\mathrm{d}s$ θα είναι

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{1.26}$$

αφού $y = f(x)$. Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \tag{1.27}$$

Επίσης, από την κλίση της συνάρτησης

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \equiv f'(x)$$

αφού λάβουμε την παράγωγο ως προς x θα έχουμε

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f''$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1 + \tan^2\theta}{f''} = \frac{1 + (f')^2}{f''} \tag{1.28}$$

αφού $1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. Εισάγοντας τις σχέσεις (1) και (1) στη σχέση (1) έπεται

$$\rho = \frac{\left[1 + (f')^2\right]^{3/2}}{f''} \tag{1.29}$$

Μια έλλειψη περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.30}$$

η ακτίνα καμπυλότητας στο τυχαίο σημείο (x, y) θα είναι (από τη σχέση (1))

$$\rho = \frac{\left[1 + (f')^2\right]^{3/2}}{f''} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}} \tag{1.31}$$

όπου η πρώτη παράγωγος $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ θα βρεθεί από τη σχέση (1), παραγωγίζοντάς την ως προς x

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \tag{1.32}$$

Παραγωγίζοντάς την για μία ακόμη φορά θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - xy'}{y^2} \overset{(1)}{=} -\frac{b^4}{a^2 y^2}\Bigg(\underbrace{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}}_{1}\Bigg) = -\frac{b^2}{a^2 y^3} \tag{1.33}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (1) και (1), έπεται για το μέτρο της ακτίνας καμπυλότητας

$$|\rho| = \left|\frac{\left[1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right]^{3/2}}{\frac{-b^4}{a^2 y^3}}\right| = \frac{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{3/2}}{ab^4} \tag{1.34}$$

Αν $b = a$ (περίπτωση του κύκλου), τότε η σχέση (1) θα μας δώσει

$$|\rho| = \frac{a^3\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}{a^5}$$

αλλά αφού

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

τότε $|\rho| = a$, όπως θα αναμενόταν στην περίπτωση του κύκλου.

Πρόβλημα 1.39 Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τιμή $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους ως προς $x,\ y,\ z$.

Λύση:

Η μερική παράγωγος της $f(x, y, z)$ ως προς x είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}_{2x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Με όμοιο τρόπο οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Πρόβλημα 1.40 Έστω μια διδιάστατη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τιμή

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{για } (x, y) \neq (0, 0) \\[2ex] 0 & \text{για } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση:

Η μερική παράγωγος ως προς x θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y - y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \quad \text{για } (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$$

Για $(x, y) = (0, 0)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(\Delta x, 0\right) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

Με όμοιο τρόπο

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(0, \Delta y\right) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

Πρόβλημα 1.41 Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Λύση:

Αν η g είναι συνάρτηση δύο διαστάσεων, δηλαδή $f = f\left(g(x,y)\right)$ τότε οι μερικές παράγωγοι θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial y} \tag{1.35}$$

όπως φαίνεται στο Παρτημα 11.11 στη σελίδα 544 από τις σχέσεις (11.11.2).
Έστω $g(x,y) = y/x$, τότε $f(x,y) = \arctan\left(g(x)\right)$. Επομένως, με τη βοήθεια των σχέσεων (1) έπεται

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}\left(\arctan(g)\right)}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{1+g^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}\left(\arctan(g)\right)}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

αφού

$$\left(\arctan(g)\right)' = \frac{1}{1+g^2}$$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει το θεώρημα του Schwartz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Πρόβλημα 1.42 Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (x+xy)\mathrm{d}s$$

όπου η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι $y = x$ από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$ και $\mathrm{B}(1,1)$.

Λύση:

Από τη σχέση του μήκους της καμπύλης έχουμε

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1+1}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\mathrm{d}x$$

και επομένως το ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_C (x+xy)\mathrm{d}s = \int_0^1 \left(x+x^2\right)\sqrt{2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\left[\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\mathrm{d}x\right] = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

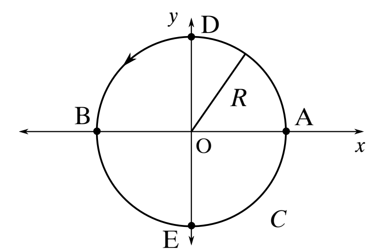
Πρόβλημα 1.43 Να υπολογιστεί το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C y\mathrm{d}x \tag{1.36}$$

όπου η κλειστή καμπύλη C περιγράφεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$.

Λύση:

Επειδή η συνάρτηση που περιγράφει την καμπύλη ολοκλήρωσης C δεν είναι μονότιμη, διότι $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, θα πρέπει να διαμερίσουμε τη C σε δύο καμπύλες, την $C_1 \equiv$ ADB (ADB το θετικό ημικύκλιο του κύκλου C), η οποία περιγράφεται από την $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ και την $C_2 \equiv$ BEA (BEA το αρνητικό ημικύκλιο του κύκλου C), για την οποία ισχύει $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Συνεπώς, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα είναι



$$\oint y\mathrm{d}x = \int\limits_{C_1} y\mathrm{d}x + \int\limits_{C_2} y\mathrm{d}x = \int\limits_{R}^{-R} \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x + \int\limits_{-R}^{R} \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = -\int\limits_{-R}^{R} \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{\text{άρτια}}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-R}^{R} \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{\text{άρτια}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x - 2\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = -4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x \tag{1.37}$$

Αν αλλάξουμε τη μεταβλητή $x = R\cos\theta$, τότε το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης (1) θα είναι

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = -R^2\int_{\pi/2}^0 \underbrace{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}_{\sin\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta = -R^2\int_{\pi/2}^0 \sin^2\theta\mathrm{d}\theta = -R^2\int_{\pi/2}^0 \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{R^2}{2}\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{R^2}{4}\left(\sin 0 - \sin\pi\right) = \frac{R^2}{4}$$

Συνεπώς, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της (1) είναι

$$\oint_C y\mathrm{d}x = -R^2\pi = -\left(\text{εμβαδόν κύκλου ακτίνας } R\right)$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει το αντίστοιχο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C x\mathrm{d}y = R^2\pi = \left(\text{εμβαδόν κύκλου ακτίνας } R\right)$$

όπου θα δείξουμε παρακάτω, τα κλειστά επικαμπύλια ολοκληρώματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό εμβαδών κλειστών επιφανειών από τις σχέσεις

$$\oint_C x\mathrm{d}y = -\oint_C y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = A$$

όπου A είναι το εμβαδόν που περικλείει η κλειστή καμπύλη C. Αυτό το αποτέλεσμα είναι εμφανές σ' αυτό το παράδειγμα του υπολογισμού του κλειστού επικαμπύλιου ολοκληρώματος (1.43).

Πρόβλημα 1.44 Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\boldsymbol{F} = 2xye^z\hat{\boldsymbol{x}} + x^2e^z\hat{\boldsymbol{y}} + x^2ye^z\hat{\boldsymbol{z}}$$

Να βρείτε τη βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(x, y, z)$από την οποία προέρχεται το διανυσματικό πεδίο μέσω της σχέσης

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^x P(x, y, z)\mathrm{d}x + \int_0^y Q(x, y, z)\mathrm{d}y + \int_0^z R\left(x, y, z\right)\mathrm{d}z \tag{1.38}$$

Λύση:

Ο στροβιλισμός του είναι

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xye^z & x^2e^z & x^2ye^z\end{vmatrix}$$
$$=\hat{\boldsymbol{x}}\left(x^2e^z-x^2e^z\right)-\hat{\boldsymbol{y}}\left(2xye^z-2xye^z\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\left(2xe^z-2xe^z\right)=\mathbf{0}$$

Επομένως, το πεδίο $\boldsymbol{F}$ είναι διατηρητικό και η βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ από τη σχέση (1.44) είναι

$$\Phi(x,y,z)=\int_0^x 2xye^z\mathrm{d}x+\int_0^y 0\cdot e^z\mathrm{d}y+\int_0^z 0\cdot 0\cdot e^z\mathrm{d}z=x^2ye^z$$

Πρόβλημα 1.45

Να δείξετε ότι το μήκος, L, και το εμβαδόν, S, που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη C στο καρτεσιανό επίπεδο δίναονται από τις σχέσεις

$$S=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-y(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t \qquad \text{και} \qquad L=\int_0^1\left[\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t$$

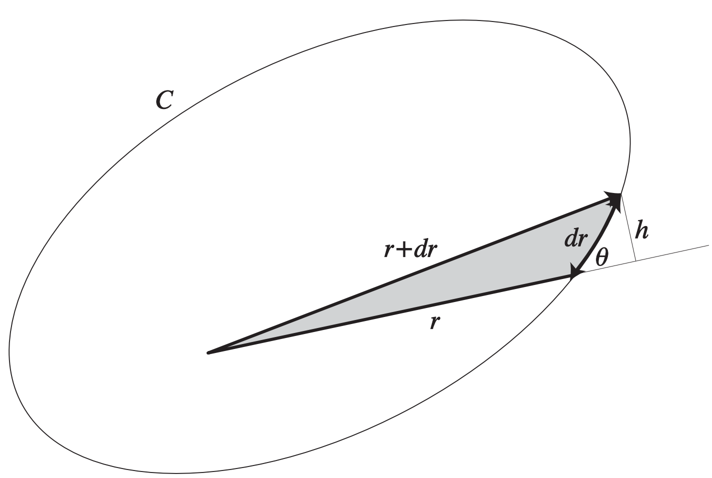
Λύση:

Έστω C είναι μια κλειστή καμπύλη στο καρτεσιανό επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.15. Έστω S είναι το εμβαδόν της καμπύλης. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν $\mathrm{d}S$, το οποίο προκύπτει από τη σάρωση του διανύσματος $\boldsymbol{r}$ κατά τη μετατόπισή του κατά $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, θα είναι

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}rh=\frac{1}{2}r\underbrace{\mathrm{d}r\sin\theta}_{h}=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{dr}\right| \tag{1.39}$$

δηλαδή θεωρούμε το εμβαδόν ενός τριγώνου με μια πλευρά μήκους r και ύψους h. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες το $\boldsymbol{r}=x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}\ \Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}}$ και επομένως η ποσότητα $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{dr}$ θα είναι

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{dr}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ x & y & 0\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0\end{vmatrix}=(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 1.15: *Μια κλειστή καμπύλη C. Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια δημιουργείται από τη μετακίνηση του διανύσματος $\boldsymbol{r}$ κατά $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.*

δηλαδή η σχέση (1) ανάγεται στη μορφή

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{dr}\right| = \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$

$$\Rightarrow S = \oint_C \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\oint_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\oint_C \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\right)\mathrm{d}x \tag{1.40}$$

Το μήκος, L, της καμπύλης θα είναι $\oint_C \mathrm{d}s$, όπου $\mathrm{d}s$ είναι το απειροελάχιστο μήκος της καμπύλης, το οποίο με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος θα ισούται με $\mathrm{d}s = \left[(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right]^{1/2}$, και επομένως το μήκος της καμπύλης θα είναι

$$L = \oint_C \mathrm{d}s = \oint_C \left[(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right]^{1/2} = \oint_C \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x \tag{1.41}$$

Έστω ότι θεωρούμε την παραμετρική έκφραση της καμπύλης C, δηλαδή υπάρχει μια πραγματική παράμετρος $t \in [0,1]$ έτσι ώστε $x(t),\ y(t)$ είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της καμπύλης C, και εφόσον είναι μια κλειστή καμπύλη, θα ισχύει $x(0) = x(1)$ και $y(0) = y(1)$. Σε αυτή την περίπτωση, το εμβαδόν (1) και το μήκος (1) της καμπύλης ανάγονται στις ακόλουθες εκφράσεις

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - y(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t \qquad \text{και} \qquad L = \int_0^1 \left[\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t$$

Πρόβλημα 1.46 Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \left[\underbrace{y(2xy-1)}_{P(x,y)}\mathrm{d}x + \underbrace{x(2xy+1)}_{Q(x,y)}\mathrm{d}y\right]$$

όπου η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = r^2$, ακτίνας r.

Λύση:

Το θεώρημα του Green στο επίπεδο xy εκφράζεται ως ακολούθως

$$\oint_C \left[P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.42}$$

Το πρώτο μέλος του θεωρήματος του Green είναι (αν $\boldsymbol{F} = P(x,y)\hat{\boldsymbol{x}} + Q(x,y)\hat{\boldsymbol{y}}$)

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

και επομένως η σχέση (1) είναι

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.43}$$

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ή

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Συνεπώς, η σχέση (1) θα είναι

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_D (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.44}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ είναι το διάνυσμα της επιφάνειας. Έχουμε ήδη αναλύσει ότι μια επιφάνεια είναι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που ορίζουν την επιφάνεια, και επομένως το εξωτερικό γινόμενο θα έχει κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια. Επομένως, το θεώρημα του Green, σχέση (1), θα λάβει τη μορφή

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_D (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

που είναι το θεώρημα του Stokes. Άρα το θεώρημα του Green στο επίπεδο αποτελεί μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Stokes.
Από το θεώρημα του Green, (1), έπεται

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \left[y\,(2xy-1)\,\mathrm{d}x + x\,(2xy+1)\,\mathrm{d}y\right] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial\left(x(2xy+1)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(y(2xy-1)\right)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left[(4xy+1)-(4xy-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2A = 2\pi r^2 \end{aligned}$$

όπου D είναι το εμβαδόν της περιοχής D που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$, δηλαδή

$$A = \pi r^2$$

Πρόβλημα 1.47 Να δείξετε ότι για ένα σωληνοειδές πεδίο $\boldsymbol{F}$, (δηλαδή όταν έχουμε $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = 0$), ισχύει

$$\int_S \left(\nabla^2 \boldsymbol{F}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint_C (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Λύση:

Η έκφραση του θεωρήματος Stokes για οποιαδήποτε επιφάνεια S η οποία περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C έχει ως ακολούθως

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}S \tag{1.45}$$

Από τη διανυσματική ταυτότητα $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$ έπεται

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})$$

Για $\boldsymbol{F}$ σωληνοειδές, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = 0$, θα έχουμε

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})$$

$$\Rightarrow \int_S \left(\nabla^2 \boldsymbol{F}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.46}$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stokes, σχέση (1)

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.47}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (1) έπεται

$$\oint \left(\nabla^2 \boldsymbol{F}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint_C (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Πρόβλημα 1.48 Έστω $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{a}$ ένα διανυσματικό πεδίο, όπου $\boldsymbol{a}$ ένα σταθερό διάνυσμα. Να δείξετε ότι

$$\oint_C f\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_S \boldsymbol{\nabla} f \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Λύση:

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Stokes, σχέση (1), έπεται

$$\begin{aligned}
\oint_C f\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_S \underbrace{\overbrace{(\boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}^{\text{τριπλό γινόμενο}}}_{\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\nabla} f)\cdot\boldsymbol{a}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \oint_C f\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{a} \cdot \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla} f \\
\Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \left[\oint_C f\mathrm{d}r - \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla} f\right] &= 0 \\
\Rightarrow \oint_C f\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla} f &= -\int_S \boldsymbol{\nabla} f \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (1.48)
\end{aligned}$$

αφού η $\boldsymbol{a}$ έχει τυχαία κατεύθυνση.

Πρόβλημα 1.49 Έστω $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A}(x, y, z)$, όπου $\boldsymbol{a}$ σταθερό διάνυσμα. Να δείξετε ότι

$$\oint_C \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{A}$$

Λύση:

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stokes έπεται

$$\begin{aligned}
\oint_C (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_S \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
\boldsymbol{a} \cdot \oint_C \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_S \left[\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{A}\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \boldsymbol{a} \cdot \int_S (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{a} \cdot \int_S \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) \\
&= \boldsymbol{a} \cdot \int_S \left[(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S})\right] \\
&= \boldsymbol{a} \cdot \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

για $\boldsymbol{a}$ με τυχαία κατεύθυνση, και επομένως

$$\Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \left[\oint_C \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{A}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \oint_C \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \boldsymbol{A}$$

Πρόβλημα 1.50 Να δείξετε ότι για $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$, ισχύει η ταυτότητα

$$\oint_S \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{1}{2}\oint r^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Λύση:

Αν $f = \frac{1}{2}r^2$, θα έχουμε

$$\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}r^2\right) = r\boldsymbol{\nabla} r = r\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}$$

και επομένως εφαρμόζοντας στη σχέση (1) τη συνάρτηση $f = r^2/2$ έπεται

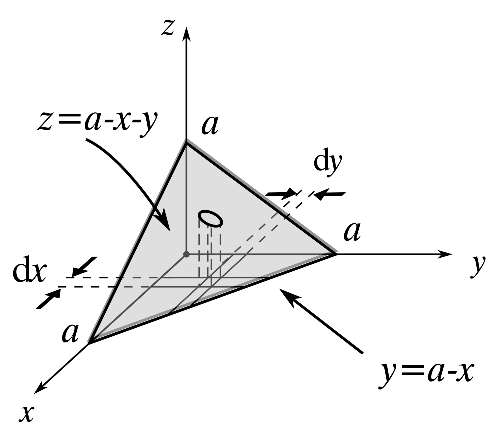
$$\oint_C \frac{r^2}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_S \boldsymbol{\nabla} f \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Πρόβλημα 1.51 Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

όπου η περιοχή ολοκλήρωσης, V, περικλείεται από τα επίπεδα $x + y + z = a > 0$, $x = 0$, $y = 0$ και $z = 0$.

Λύση:



Σχήμα 1.16

Η περιοχή ολοκλήρωσης V ορίζεται από τα $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a - x$ και $0 \leq z \leq a - x - y$. Επομένως, το τριπλό ολοκλήρωμα θα είναι

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{x=0}^{x=a}\left[\int\limits_{y=0}^{y=a-x}\left\{\int\limits_{z=0}^{z=a-x-y}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{x=a}\left[\int\limits_{y=0}^{y=a-x}\left[x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=a-x-y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} \left[\int_{y=0}^{y=a-x} \left[x^2(a-x-y) + y^2(a-x-y) + \frac{(a-x-y)^3}{3} \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} \left[\int_{y=0}^{y=a-x} \left[x^2(a-x) - x^2 y + y^2(a-x) - y^3 + \frac{(a-x-y)^3}{3} \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} \left[x^2(a-x)y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{3}(a-x) - \frac{y^4}{4} - \frac{(a-x-y)^4}{12} \right]_{y=0}^{y=a-x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} \left[x^2(a-x)^2 - \frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{3} - \frac{(a-x)^4}{4} + \frac{(a-x)^4}{6} \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x=0}^{x=a} \left[\frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{12} \right] \mathrm{d}x = \frac{a^5}{20}$$

Πρόβλημα 1.52 Ας αναφέρουμε δυο λόγια για το θεώρημα του Gauss ή Απόκλισης.
Έστω V μια τριδιάστατη περιοχή του χώρου, η οποία περικλείεται από μια επιφάνεια S. Αν μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{A}(x, y, z)$, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στην περιοχή V και πάνω στην επιφάνεια S, τότε η εξερχόμενη ροή του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ μέσα από την επιφάνεια S ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης $\boldsymbol{\nabla A}$ υπολογιζόμενη σ' όλο το χώρο V, δηλαδή

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{1.49}$$

όπου η $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ έχει κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια S και προς τα έξω. Είναι το αντίστοιχο θεώρημα του Green στις τρεις διαστάσεις. Το θεώρημα του Gauss (1.52) ισχύει για περιοχές V οι οποίες είναι συμπαγείς, δηλαδή δεν περιέχει κενές περιοχές. Για παράδειγμα, ένα κουλούρι Θεσσαλονίκης αν βρεθεί σε κάποιο διανυσματικό πεδίο, δε θα ικανοποιεί το θεώρημα Gauss!
Θεωρήστε μια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$. Έστω $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$, τότε

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{r}}{R}\mathrm{d}S = \frac{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}}{R}\mathrm{d}S$$

Θα έχουμε για την απόκλιση $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R}\mathrm{d}S = R\mathrm{d}S$$

πάνω στη σφαίρα. Με την εφαρμογή του θεωρήματος Gauss, σχέση (1.52), θα έχουμε

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \Rightarrow RS = 3V$$

$$\Rightarrow S = \frac{3V}{R}$$

Για τον όγκο σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, έπεται $S = r\pi R^2$.

Πρόβλημα 1.53 Έστω ότι έχουμε δύο διανυσματικά πεδία $\boldsymbol{A}_1$ και $\boldsymbol{A}_2$ της μορφής $\boldsymbol{A}_1 = u\boldsymbol{\nabla} v$ και $\boldsymbol{A}_2 = v\boldsymbol{\nabla} u$, όπου οι συναρτήσεις $v = v(x, y, z)$ και $u = u(x, y, z)$ είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Να δείξετε ότι

$$\int_V \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u \right) \mathrm{d}V = \int_S (u\boldsymbol{\nabla} v - v\boldsymbol{\nabla} u) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Λύση:

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Gauss, σχέση (1.52), για τις συναρτήσεις $\boldsymbol{A}_1$ και $\boldsymbol{A}_2$. Θα λάβουμε

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(u\boldsymbol{\nabla}v)\,\mathrm{d}V = \int_V \Big(u\nabla^2 v + \boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v\Big)\,\mathrm{d}V = \int_S u\boldsymbol{\nabla}v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.50}$$

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(v\boldsymbol{\nabla}u)\,\mathrm{d}V = \int_V \Big(v\nabla^2 v + \boldsymbol{\nabla}v\cdot\boldsymbol{\nabla}u\Big)\,\mathrm{d}V = \int_S v\boldsymbol{\nabla}u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.51}$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (1) θα έχουμε

$$\int_V \big[\boldsymbol{\nabla}\cdot(u\boldsymbol{\nabla}v) - \boldsymbol{\nabla}\cdot(v\boldsymbol{\nabla}u)\big]\,\mathrm{d}V = \int_V \Big(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\Big)\,\mathrm{d}V = \int_S (u\boldsymbol{\nabla}v - v\boldsymbol{\nabla}u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Πρόβλημα 1.54 Έστω οι συναρτήσεις $v = F_1(x,y,z)\sin(k_1 t)$ και $u = F_2(x,y,z)\sin(k_2 t)$ είναι λύσεις της εξίσωσης κύματος

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{1.52}$$

σε μια περιοχή V, όπου $k_1 \neq k_2$, c είναι θετικές σταθερές. Αν κάθε λύση ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$\alpha\Psi + \beta\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0$$

στην επιφάνεια S, $\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{n}}S$, όπου α και β είναι συναρτήσεις που ορίζονται στην επιφάνεια S και δε μηδενίζονται συγχρόνως. Να δείξετε ότι ισχύει

$$\int_V F_1 F_2 \mathrm{d}V = 0$$

Λύση:

Αφού v και u είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης, τότε αν εισάγουμε τις συναρτήσεις στη σχέση (1.54), θα έχουμε

$$\nabla^2 F_1 = -\left(\frac{k_1}{c}\right)^2 F_1, \qquad \nabla^2 F_2 = -\left(\frac{k_2}{c}\right)^2 F_2 \tag{1.53}$$

Από το θεώρημα του Green, σχέση (1), θα λάβουμε

$$\begin{aligned}\int_V \Big(F_1\nabla^2 F_2 - F_2\nabla^2 F_1\Big)\,\mathrm{d}V &\overset{(1)}{=} \int_V \left[F_1\left(-\frac{k_1}{c}\right)^2 F_2 - F_2\left(-\frac{k_2}{c}\right)^2 F_1\right]\mathrm{d}V \\ &= \int_S (F_1\boldsymbol{\nabla}F_2 - F_2\boldsymbol{\nabla}F_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(F_1\frac{\partial F_2}{\partial n} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1.54}$$

όπου

$$\boldsymbol{\nabla}F_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\partial F_1}{\partial n} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{\nabla}F_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\partial F_2}{\partial n}$$

Οι συναρτήσεις u και v πάνω στην επιφάνεια S θα ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη (1.54), δηλαδή

$$\alpha F_1 + \beta\frac{\partial F_1}{\partial n} = 0, \qquad \alpha F_2 + \beta\frac{\partial F_2}{\partial n} = 0$$

Αν λύσουμε την πρώτη σχέση ως προς α και την αντικαταστήσουμε στη δεύτερη, θα λάβουμε

$$F_1\frac{\partial F_2}{\partial n} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial n} = 0 \tag{1.55}$$

Εισάγοντας τη σχέση (1) στη σχέση (1), θα λάβουμε

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right)\int_V F_2 F_1 \mathrm{d}V = 0 \Rightarrow \int_V F_1 F_2 \mathrm{d}V = 0$$

αφού $k_1 \neq k_2$. Αυτή η συνθήκη μάς δηλώνει ότι οι συναρτήσεις F_1 και F_2 είναι ορθογώνιες. Το ολοκλήρωμα $\int_V F_1 F_2 \mathrm{d}V$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των συναρτήσεων.

Πρόβλημα 1.55 Έστω ότι η ταχύτητα $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ ενός σωματιδίου είναι συνάρτηση της θέσης $\boldsymbol{r}$ και του χρόνου t και εκφράζεται ως η βαθμίδα μιας συνάρτησης $\phi(\boldsymbol{r}, t)$, δηλαδή $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi$. Να δείξετε ότι η επιτάχυνση του $\boldsymbol{a}$ είναι επίσης η βαθμίδα μιας συνάρτησης $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$, την οποία και να προσδιορίσετε.

Λύση:

Η επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$ του σωματιδίου είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v_x}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{v_y}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}_{v_z}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \underbrace{\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{v} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

Αν εφαρμόσουμε τη διανυσματική ταυτότητα

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$$

για $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}$ θα λάβουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(v^2) &= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) \\
\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{v}^2\right) &= 2\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) \\
\Rightarrow (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) - \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

Αφού $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi$, ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους της σχέσης (1) θα είναι

$$\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\times\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi)}_{0} = \boldsymbol{0}$$

Επομένως η σχέση (1) είναι

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right)$$

και αν την αντικαταστήσουμε στη σχέση (1) θα λάβουμε για την επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\phi)}_{\boldsymbol{\nabla}(\partial\phi/\partial t)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) = \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}\right]$$

Ορίζουμε τη νέα συνάρτηση

$$\Psi = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}$$

και επομένως η επιτάχυνση έχει τη μορφή $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla}\Psi$.

Πρόβλημα 1.56 Για ένα σταθερό διάνυσμα $\boldsymbol{a}$ να δείξετε ότι ισχύει

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{a}$$

Λύση:

Έστω $\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\hat{\boldsymbol{z}}$, τότε

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(za_y - ya_z\right) - \hat{\boldsymbol{y}}(za_x - xa_z) + \hat{\boldsymbol{z}}(ya_x - xa_y)$$

και

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ za_y - ya_z & -za_x + xa_z & ya_x - xa_y \end{vmatrix} \\ &= \hat{\boldsymbol{x}}\left[\frac{\partial}{\partial y}(ya_x - xa_y) - \frac{\partial}{\partial z}\left(xa_z - za_x\right)\right] - \hat{\boldsymbol{y}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(ya_x - xa_y) - \frac{\partial}{\partial z}(za_y - ya_z)\right] \\ &+ \hat{\boldsymbol{z}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xa_z - za_x) - \frac{\partial}{\partial y}(za_y - ya_z)\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{x}}(a_x + a_x) - \hat{\boldsymbol{y}}(-a_y - a_y) + \hat{\boldsymbol{z}}(a_z + a_z) = 2\left(\hat{\boldsymbol{x}}a_x + \hat{\boldsymbol{y}}a_y + \hat{\boldsymbol{z}}a_y\right) \\ &= 2\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.57 Να δείξετε ότι ισχύει

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = \iint_S \left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\nabla}\right)\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}S$$

όπου $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$.

Λύση:

Από το θεώρημα του Stokes

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}S = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \tag{1.58}$$

Αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D}$, όπου $\boldsymbol{D}$ είναι σταθερό διάνυσμα, τότε η (1) θα είναι

$$\begin{aligned}&\oint_C (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \left[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})\right]\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \\ \Rightarrow &\int_C \boldsymbol{D}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}) = \iint_C \left[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{D}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})\right]\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \\ \Rightarrow &\boldsymbol{D}\cdot\int_C \mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = \iint_C \boldsymbol{D}\cdot\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)\right]\mathrm{d}S - \iint_S \boldsymbol{D}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{n}}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})\right]\mathrm{d}S = \iint_C \boldsymbol{D}\cdot\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right) - \hat{\boldsymbol{n}}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})\right]\mathrm{d}S \\ &= \boldsymbol{D}\cdot\iint_S \left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\nabla}\right)\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{D}\left[\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} - \iint_S \left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\nabla}\right)\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}S\right] = 0 \tag{1.59}$$

αφού $\boldsymbol{D}$ είναι ένα σταθερό αλλά αυθαίρετο διάνυσμα. Συνεπώς, το άλλο διάνυσμα της σχέσης (1) θα πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} = \iint\limits_S \left(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\nabla}\right) \times \boldsymbol{B}\mathrm{d}S$$

Πρόβλημα 1.58 Να δείξετε ότι ισχύει

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\Psi_1 \times \boldsymbol{\nabla}\Psi_2) = 0$$

Λύση:

Από τη διανυσματική ταυτότητα

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A}$$

αν θεωρήσουμε $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\Psi_1$ και $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\Psi_2$, τότε έπεται

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\Psi_1 \times \boldsymbol{\nabla}\Psi_2) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\Psi_1) \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi_2 - (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\Psi_2) \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi_1 \tag{1.60}$$

αλλά $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\Psi_1 = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\Psi_2 = 0$, επομένως η σχέση (1) θα μας δώσει

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\Psi_1 \times \boldsymbol{\nabla}\Psi_2) = 0$$

Πρόβλημα 1.59 Να δείξετε ότι ισχύει

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\nabla^2 \boldsymbol{A}) = \nabla^2 (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

Λύση:

Ισχύει η διανυσματική ταυτότητα

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} && (1.61)\\
\Rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\\
\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right) &= \boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right]\\
&= \cancelto{0}{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\\
\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right) &= -\boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right]\\
&= -\Big[\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right) - \nabla^2 (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\Big] && (1.62)
\end{aligned}$$

όπου εφαρμόσαμε τη σχέση (1) όπου $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$. Η σχέση $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$ είναι μηδέν με απλή εφαρμογή του βαθμωτού τριπλού γινομένου. Συνεπώς, η σχέση (1) θα μας δώσει

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\nabla^2 \boldsymbol{A}\right) = \nabla^2 (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

Πρόβλημα 1.60 Να δείξετε ότι ισχύει

$$\oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2 \int_S \hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$$

Λύση:

Από το θεώρημα του Stokes, θεωρώντας ένα διάνυσμα $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$ (όπου $\boldsymbol{B}$ σταθερό), θα έχουμε

$$\oint_C (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \tag{1.63}$$

αλλά

$$\oint_C (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{B} \cdot \oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.64}$$

Δείξαμε ότι ισχύει $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{B}$ για ένα σταθερό διάνυσμα $\boldsymbol{B}$, επομένως το δεξί μέρος της σχέσης (1) θα μας δώσει

$$\iint_S \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = \iint_S 2\boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = 2\boldsymbol{B} \cdot \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \tag{1.65}$$

Από τις σχέσεις (1) και (1) λαμβάνουμε

$$\boldsymbol{B} \cdot \oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{B} \cdot \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} \cdot \left[\oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} - 2 \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \right] = 0$$

αφού $\boldsymbol{B}$ είναι ένα αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα, θα πρέπει να έχουμε

$$\Rightarrow \oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2 \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \tag{1.66}$$

Αν θεωρήσουμε μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A, η οποία περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C, τότε η σχέση (1) θα μας δώσει

$$\left| \oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right| = 2 \left| \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \right| = 2A$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \left| \oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right|$$

Πρόβλημα 1.61 Να βρεθούν οι λύσεις της μορφής $\boldsymbol{E}(r, t)$ της κυματικής εξίσωσης

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

Λύση:

Αφού το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ εξαρτάται μόνο από το r και το χρόνο t, από τη λαπλασιανή στις σφαιρικές-πολικές συντεταγμένες θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τον πρώτο όρο, δηλαδή

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r} \right)$$

Επομένως, η κυματική εξίσωση θα είναι

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\boldsymbol{E})=0
\end{aligned}\tag{1.67}$$

Ο πρώτος όρος της (1) αναλύεται ως

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}\right)&=\frac{1}{r}\left[2r\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}+r^2\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r^2}\right]=2\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}+r\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial r^2}=\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}+\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}+r\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial r^2}}_{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)}\\
&=\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\boldsymbol{E}+r\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\boldsymbol{E})\right)\\
&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{E})
\end{aligned}\tag{1.68}$$

Άρα, η εξίσωση (1) με τη βοήθεια της (1) θα λάβει τη μορφή

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{E})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\boldsymbol{E})=0\tag{1.69}$$

Έστω ότι κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητών, από $(r,t)\to(u,v)$, όπου $u=r+ct$ και $v=r-ct$, τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}&=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}\tag{1.70}$$

αφού

$$\frac{\partial u}{\partial r}=1,\quad \frac{\partial v}{\partial r}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=c,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-c$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) στην εξίσωση (1) θα λάβουμε

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2(r\boldsymbol{E})-\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)^2(r\boldsymbol{E})=0\\
\Rightarrow\ &\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)^2\right](r\boldsymbol{E})=0\\
\Rightarrow\ &\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}+\cancel{\frac{\partial}{\partial v}}+\frac{\partial}{\partial u}-\cancel{\frac{\partial}{\partial v}}\right)\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial u}}+\frac{\partial}{\partial v}-\cancel{\frac{\partial}{\partial u}}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\right](r\boldsymbol{E})=0\\
\Rightarrow\ &4\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)(r\boldsymbol{E})=0
\end{aligned}\tag{1.71}$$

Αν πρώτα ολοκληρώσουμε ως προς u, θα λάβουμε μια σταθερή συνάρτηση ως προς u αλλά θα εξαρτάται μόνο από το v, δηλαδή από την εξίσωση (1) έπεται

$$\frac{\partial}{\partial v}(r\boldsymbol{E})=\boldsymbol{g}(v)\Rightarrow r\boldsymbol{E}=\int\boldsymbol{g}(v)\mathrm{d}v+\boldsymbol{F}(u)\tag{1.72}$$

Έστω ότι ονομάζουμε το $\int\boldsymbol{g}(v)\mathrm{d}v=\boldsymbol{G}(v)$, τότε η λύση (1) θα είναι

$$\boldsymbol{E}(r,t)=\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{F}(r+ct)+\boldsymbol{G}(r-ct)\right]\tag{1.73}$$

όπου $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{G}$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις. Αυτή η λύση (1) αποτελεί τη λύση του D' Alembert της κυματικής εξίσωσης.

Δέλτα του Kronecker και τανυστής των Levi-Civita

Ορίζουμε το σύμβολο δ_{ij}, δέλτα του Kronecker, ως ακολούθως

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j, \\ \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases}$$

ενώ ο αντισυμμετρικός τανυστής των Levi-Civita ορίζεται ως

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{για άρτιες αντιμεταθέσεις των } \ i, j, k \\ \\ -1 & \text{για περιττές αντιμεταθέσεις των } \ i, j, k \\ \\ \ \ 0 & \text{για όλες τις άλλες περιπτώσεις} \end{cases}$$

Ως άρτιες αντιμεταθέσεις θεωρούμε ένα κυκλικό συνδυασμό των ijk, δηλαδή το 123, 231, 312, όπου, όπως παρατηρείτε, ξεκινάμε με το συνδυασμό 123 και αντικαθιστούμε κάθε στοιχείο με τον επόμενο αριθμό, και επομένως λαμβάνουμε το συνδυασμό 231. Όμοια εργαζόμενοι στο επόμενο βήμα λαμβάνουμε το συνδιασμό 312. Οι περιττές αντιμεταθέσεις είναι 213, 321 και 132. Το $\varepsilon_{ijk} = 0$ αν δύο ή τρεις δείκτες είναι ίδιοι, δηλαδή $\varepsilon_{112} = \varepsilon_{221} = \varepsilon_{133} = \ldots = 0$. Τα σύμβολα των Kronecker και Levi-Civita είναι χρήσιμα για τη συντομογραφία διαφόρων μαθηματικών σχέσεων. Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{A} = A_1\hat{\boldsymbol{x}} + A_2\hat{\boldsymbol{y}} + A_3\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{B} = B_1\hat{\boldsymbol{x}} + B_2\hat{\boldsymbol{y}} + B_3\hat{\boldsymbol{z}}$ είναι

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_iB_j\delta_{ij} \tag{1.74}$$

όπου υπάρχουν 9 όροι στο άθροισμα, εκ των οποίων οι 3 μας δίνουν ποσότητα διάφορη του μηδενός.
Το εξωτερικό γινόμενο των δύο αυτών διανυσμάτων είναι

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(A_2B_3 - A_3B_2\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(A_3B_1 - A_1B_3\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(A_1B_2 - A_2B_1\right)$$

Η πρώτη συνιστώσα $A_2B_3 - A_3B_2$ γράφεται ως ακολούθως

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_{\hat{\boldsymbol{x}}} = \sum_{\hat{J}_+1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}A_jB_k$$

όπου υπάρχουν 9 όροι στο διπλό αυτό άθροισμα, εκ των οποίων μόνο οι δύο είναι διάφοροι του μηδενός.
Επίσης, θα μπορούσαμε να γράψουμε το εξωτερικό γινόμενο θεωρώντας τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού χώρου ως $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \equiv \hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2 \equiv \hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_3 \equiv \hat{\boldsymbol{z}}$, και επομένως θα έχουμε

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}A_jB_k\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

Ένα άλλο παράδειγμα στο οποίο θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ε_{ijk} είναι η γραφή της ορίζουσας ενός πίνακα

$$\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}C_{1i}C_{2j}C_{3k}$$

Ίσως να παρατηρήσατε ότι στα αθροίσματα (1) οι δείκτες που «τρέχουν» το άθροισμα εμφανίζονται δύο φορές. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να «ξεχνάμε» το σύμβολο του αθροίσματος, διότι θα γνωρίζουμε ότι κάθε φορά που εμφανίζεται ένας δείκτης δύο φορές, τότε υπονοείται άθροιση

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_i B_j \delta_{ij} \to A_i B_j \delta_{ij} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \to \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

Αυτός ο συμβολισμός οφείλεται στον Einstein και ονομάζεται *κανόνας του αθροίσματος του Einstein*.
Επίσης, όταν έχουμε το σύμβολο του Kronecker δ_{ij} και ένας δείκτης (ας πούμε ο i) εμφανίζεται σε κάποιο άλλο μέγεθος A_i, απλά θα αντικαθιστούμε το δείκτη i με το j στο μέγεθος. Για παράδειγμα

$$\delta_{ij} A_i = A_j, \qquad A_{ij}\delta_{ik} = A_{kj}$$

Το μεικτό τριπλό γινόμενο $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ τριών διανυσμάτων θα είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= A_i \underbrace{(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_i}_{\varepsilon_{ijk}B_jC_k} = \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \varepsilon_{kij}C_kA_iB_j = C_k\varepsilon_{kij}A_iB_j = C_k(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_k \\ &= \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

Παρατηρήστε την ευκολία της απόδειξης του μεικτού τριπλού γινομένου με αυτό το συμβολισμό.

Ιδιότητες

- Το γινόμενο δύο συμβόλων Levi-Civita μπορεί να αναλυθεί με τη βοήθεια του συμβόλου δέλτα του Kronecker ως ακολούθως

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kl}$$

Για $i = l$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \underbrace{\delta_{ii}}_{3}\left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ko} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} \\ &= 3\left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) + \delta_{km}\delta_{jn} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jn}\delta_{kn} - \delta_{kn}\delta_{jm} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \qquad (1.75)\end{aligned}$$

Για $i = l$ και $j = m$ έπεται

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \underbrace{\delta_{jj}}_{3}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}$$

Για $i = l$, $j = m$, και $k = n$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\underbrace{\delta_{kk}}_{3} = 6$$

Η σχέση του αντισυμμετρικού τανυστή των Levi-Civita με το σύμβολο Kronecker εκφράζεται μέσω μιας ορίζουσας (για τις τρεις διαστάσεις)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix} = \delta_{il}\left(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\right) - \delta_{im}\left(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}\right) + \delta_{in}\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\end{aligned}$$

- Το σύμβολο των Levi-Civita έχει 27 στοιχεία, εκ των οποίων τα $3\times(6+1) = 21$ είναι μηδέν. Τα τρία στοιχεία είναι $+1$ ενώ τα άλλα τρία είναι -1.

Πρόβλημα 1.62 Ας υπολογίσουμε το τριπλό εξωτερικό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$. Επίσης θα δείξουμε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

Λύση:

Η συνιστώσα m του διανύσματος αυτού θα είναι

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\big)_m &= \varepsilon_{mni}A_n(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_i=\varepsilon_{mni}A_n\varepsilon_{ijk}B_jC_k=\varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk}A_nB_jC_k\\ &= \varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}A_nB_jC_k\end{aligned}$$

όπου κάναμε μια κυκλική μετάθεση στο $\varepsilon_{mni}=\varepsilon_{imn}$

$$\begin{aligned} &\overset{(1)}{=}\big(\delta_{mj}\delta_{nk}-\delta_{mk}\delta_{nj}\big)A_nB_jC_k=\delta_{mj}\delta_{nk}A_nB_jC_k-\delta_{mk}\delta_{nj}A_nB_jC_k\\ &=A_kB_mC_k-A_jB_jC_j=B_m\underbrace{A_kC_k}_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}}-\underbrace{C_kA_jB_j}_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}}\\ &=\big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\big)_m-\big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\big)_m\\ \Rightarrow\ &\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

Το ανάδελτα $\boldsymbol{\nabla}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\boldsymbol{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3},\qquad \text{όπου } x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z$$

Θα γράφουμε ως $\partial_i\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ την $i-$συνιστώσα του διανύσματος $\boldsymbol{\nabla}$. Σε αυτή την περίπτωση, η $i-$συνιστώσα της έκφρασης $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$ μπορεί να αναλυθεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\big)_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_k=\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_lA_m\\ &\overset{(1)}{=}\Big(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\Big)\partial_j\partial_lA_m=\delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_lA_m-\delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_lA_m\\ \partial_m\partial_iA_m-\partial_l\partial_lA_i &= \partial_i(\partial_mA_m)-(\partial_l\partial_l)A_i=\big(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})\big)_i-\Big(\nabla^2\boldsymbol{A}\Big)_i\\ \Rightarrow\ &\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.63 Θα αναλύσουμε την έκφραση $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ και θα δείξουμε την ταυτότητα

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \partial_i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=\partial_i\Big(\varepsilon_{ijk}A_jB_k\Big)=\varepsilon_{ijk}\partial_i\big(A_jB_k\big)\\ &=\varepsilon_{ijk}\big(B_k\partial_iA_j+A_j\partial_iB_k\big)=\varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j+\varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k\\ &=B_k\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{kij}}\partial_iA_j+A_j\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{jik}}\partial_iB_k=B_k(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_k-A_j(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})_j\\ &=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.64 Θα δείξουμε την ταυτότητα

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\Phi \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}\Phi) \times \boldsymbol{A} + \Phi\,(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$$

Λύση:

Η $i-$συνιστώσα του αριστερού μέλους θα είναι

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{\nabla} \times (\Phi \boldsymbol{A})\big)_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\,(\Phi A_k) = \varepsilon_{ijk}\left[\left(\partial_j\Phi\right)A_k + \Phi\left(\partial_j A_k\right)\right] = \varepsilon_{ijk}\left(\partial_j\Phi\right)A_k + \Phi\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \\ &= (\boldsymbol{\nabla}\Phi \times \boldsymbol{A})_i + \Phi\,(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_i = (\boldsymbol{\nabla}\Phi \times \boldsymbol{A} + \Phi\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_i \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times (\Phi\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}\Phi \times \boldsymbol{A} + \Phi\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.65 Θα δείξουμε την ταυτότητα $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{\nabla}\Phi) \cdot \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\Phi\boldsymbol{A}) = \partial_i\,(\Phi\boldsymbol{A}_i) = (\partial_i\Phi)\,A_i + \Phi(\partial_i\boldsymbol{A}_i) = (\boldsymbol{\nabla}\Phi) \cdot \boldsymbol{A} + \Phi\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$$

Όμοια το $\boldsymbol{\nabla}(\Phi_1\Phi_2)$ θα είναι

$$\left[\boldsymbol{\nabla}(\Phi_1\Phi_2)\right]_i = \partial_i\,(\Phi_1\Phi_2) = (\partial_i\Phi_1)\,\Phi_2 + \Phi_1\,(\partial_i\Phi_2) = (\boldsymbol{\nabla}\Phi_1)\,\Phi_2 + \Phi_1\boldsymbol{\nabla}\Phi_2$$

Πρόβλημα 1.66 Θα αναλύσουμε την ποσότητα

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i\,(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})_i$$

Λύση:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) &= \varepsilon_{ijk}A_jB_k\varepsilon_{ilm}C_lD_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}A_jB_kC_lD_m \\ &= \Big(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{jl}\Big)\,A_jB_kC_lD_m = \delta_{jl}\delta_{km}A_jB_kC_lD_m - \delta_{jm}\delta_{kl}A_jB_kC_lD_m \\ &= A_lB_mC_lD_m - A_mB_lC_lD_m = (A_lC_l)(B_mD_m) - (A_mD_m)(B_lC_l) \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})\,(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.67 Ας αναλύσουμε την $i-$συνιστώσα του διανύσματος $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})$ και να δείξετε την ταυτότητα

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = \big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{D}\big]\,\boldsymbol{C} - \big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\big]\,\boldsymbol{D}$$

Λύση:

$$\big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})\big]_i = \varepsilon_{ijk}\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_j\,(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})_k$$

$$\begin{aligned}\big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})\big]_i &= \varepsilon_{ijk}\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_j\,\varepsilon_{klm}C_lD_m = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_j\,C_lD_m \\ &= \Big(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\Big)\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_j\,C_lD_m = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_m\,C_iD_m - (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_j\,C_jD_i \\ &= \underbrace{(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_m\,D_m}_{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{D}}C_i - (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}D_i = \big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}\big]_i - \big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\big]_i \\ \Rightarrow (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) &= \big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{D}\big]\,\boldsymbol{C} - \big[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\big]\,\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.68 Θα δείξουμε την ταυτότητα

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)=\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}+\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{B}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)$$

Λύση:

Θα ξεκινήσουμε από τους όρους

$$\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right)\right]_i+\left[\boldsymbol{B}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)\right]_i=\\
&\quad=\varepsilon_{ijk}A_j\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right)_k+\varepsilon_{ijk}B_j\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)_k=\varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}\partial_l B_m+\varepsilon_{ijk}B_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m\\
&\quad=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_j\partial_l B_m+\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}B_j\partial_l A_m=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}A_j\partial_l B_m+\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}B_j\partial_l A_m\\
&\quad=\Big(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\Big)A_j\partial_l B_m+\Big(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\Big)B_j\partial_l A_m=A_m\partial_i B_m-A_l\partial_l B_i+B_m\partial_i A_m-B_l\partial_l A_i\\
&\quad=\partial_i\left(A_m B_m\right)\cancel{-B_m\partial_i A_m}-A_l\partial_l B_i\cancel{+B_m\partial_i A_m}B_l\partial_l A_i\\
&\quad=\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)\right]_i-\left[\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}\right]_i-\left[\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}\right]_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{B}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)-\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}-\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}\\
&\qquad\Rightarrow\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)=\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}+\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{B}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)
\end{aligned}$$

όπου $\partial_i=\partial/\partial x_i,\ \forall\, i=1,2,3$ με $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z$ καρτεσιανές συντεταγμένες.

Πρόβλημα 1.69 Θα δείξουμε την ταυτότητα

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right)+\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}-\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}$$

Λύση:

Η $i-$ συνιστώσα του αριστερού μέλους θα είναι

$$\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)\right]_i&=\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)_k=\overbrace{\varepsilon_{ijk}}^{\varepsilon_{kij}}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}A_l B_m\right)=\Big(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\Big)\left[B_m\partial_y A_l+A_l\partial_j B_m\right]\\
&=\delta_{il}\delta_{jm}B_m\partial_j A_l+\delta_{il}\delta_{jm}A_l\partial_j B_m-\delta_{im}\delta_{jl}B_m\partial_j A_l-\delta_{im}\delta_{jl}A_l\partial_j B_m\\
&=B_m\partial_m A_i+A_i\partial_m B_m-B_i\partial_l A_l-A_j\partial_j B_i\\
&=\left[\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}\right]_i+\left[\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}\right)\right]_i-\left[\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right)\right]_i-\left[\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}\right]_i\\
\Rightarrow\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)&=\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}\right)-\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right)-\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 1.70 Θα δείξουμε οτι

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)=0\qquad\qquad\text{και}\qquad\qquad\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi\right)=0$$

Λύση:

Για την αριστερή σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)&=\partial_i\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)_i=\partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k=\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k\\
&=\underbrace{\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_i}_{\partial_i\partial_j=\partial_j\partial_i}A_k=-\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i A_k=-\underbrace{\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j}_{i\to j\&j\to i}A_k\\
&=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)\qquad\Rightarrow 2\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)=0\qquad\text{ή}\qquad\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)=0
\end{aligned}$$

Για την δεξιά σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\Phi)\right]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi\right)_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\Phi = -\varepsilon_{ikj}\partial_j\partial_k\Phi = -\underbrace{\varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_j}_{j\to k\&k\to j}\Phi \\ &= -\underbrace{\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k}_{\partial_k\partial_j=\partial_j\partial_k}\Phi = -\left[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\Phi)\right]_i \qquad \Rightarrow \left[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\Phi)\right]_i = 0\end{aligned}$$

και επομένως συμπεράινουμε ότι $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\Phi)=0$.

Πρόβλημα 1.71 Θα δείξουμε ότι για κάθε διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{A}$ ισχύει η ταυτότητα

$$\nabla^2\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}\right) = 2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}$$

όπου $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ είναι το διάνυσμα θέσης.

Λύση:

Θα αναλύσουμε τον όρο $\nabla^2\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}\right)$ ως ακολούθως

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}\right) &= \partial_i\partial_i\left(r_kA_k\right) = \partial_i\left[\underbrace{(\partial_ir_k)}_{\delta_{ik}}A_k + r_k\partial_iA_k\right] \\ &= \delta_{ik}\partial_iA_k + \underbrace{\partial_ir_k}_{\delta_{ik}}(\partial_iA_k) + r_k\partial_i\partial_iA_k \\ &= \underbrace{\partial_iA_i}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}} + \underbrace{\partial_kA_k}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}} + \overbrace{r_k\underbrace{\partial_i\partial_i}_{\nabla^2}A_k}^{\boldsymbol{r}\cdot\nabla^2\boldsymbol{A}} \\ &= 2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{r}\cdot\nabla^2\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

2
Νόμοι του Νεύτωνα

Πρόβλημα 2.1 Ένα πυροβόλο στην ακτή βάλλει εναντίον πλοίου που έρχεται κατ' ευθείαν επάνω του με ταχύτητα $v_{\pi\lambda} = 40\,\mathrm{km/h}$. Την στιγμή της βολής η απόσταση του πλοίου είναι $L = 1500$ m. Η ταχύτητα κάννης του βλήματος είναι $v_{\beta\lambda} = 700\,\mathrm{m/s}$. Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα.

(α) Ποια είναι η γωνία βολής, θ, του πυροβόλου;

(β) Πόσο είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ βολής και πρόσκρουσης;

Λύση:

(α) Η ταχύτητα του πλοίου είναι $v_{\pi\lambda} = 40$ km/h $= 11.11$ m/s. Η κίνηση του βλήματος περιγράφεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{r}_{\beta\lambda} = v_{\beta\lambda}\cos\theta t\hat{\boldsymbol{x}} + \left[v_{\beta\lambda}\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{\boldsymbol{y}}$$

Η κίνηση του πλοίου περιγράφεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{r}_{\pi\lambda} = (L - v_{\pi\lambda}t)\hat{\boldsymbol{x}}$$

όταν το βλήμα κτυπά το πλοίο η συντεταγμένη y μηδενίζεται. Άρα

$$v_{\beta\lambda}\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \tag{2.1}$$

Επίσης η x συντεταγμένη του πλοίου και του βλήματος ταυτίζονται

$$v_{\beta\lambda}\cos\theta t = L - v_{\pi\lambda}t$$

$$\Rightarrow t = \frac{L}{v_{\beta\lambda}\cos\theta + v_{\pi\lambda}} \tag{2.2}$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (2) βρίσκουμε

$$700\sin\theta = \frac{15000}{1400\cos\theta + 22,22} \Rightarrow \theta = 8,6^o$$

όπου η λύση βρέθηκε με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

(β) Ο ολικός χρόνος της βολής είναι

$$t = \frac{1500}{700\cos 8,6^o + 11,11} = 21,3\ \mathrm{s}$$

Πρόβλημα 2.2 Μηχανή επιταχύνει μια μάζα m κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής παράγοντας σταθερή ισχύ P. Αν η μάζα αρχίζει την κίνησή της από την ηρεμία, δείξτε ότι η διανυόμενη απόσταση σε χρόνο t είναι

$$s = \left(\frac{9Pt^3}{2m}\right)^{1/2}$$

Λύση:

Από τον ορισμό της ισχύος έχουμε

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Fv$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις γνωστές σχέσεις του έργου $\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x$ και της ταχύτητας $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Επομένως, η παραπάνω σχέση θα μας δώσει (αφού $F = m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$)

$$P = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \int_0^P \frac{P}{m}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{v^2} \mathrm{d}v^2 \qquad \Rightarrow v^2 = \frac{2Pt}{m} \qquad \Rightarrow v = \left(\frac{2Pt}{m}\right)^{1/2}$$

Η διανυόμενη απόσταση σε χρόνο t θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \qquad \Rightarrow s = \int_0^s \mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{2Pt}{m}\right)^{1/2} \mathrm{d}t = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} \frac{3t^{3/2}}{2} = \left(\frac{9Pt^3}{2m}\right)^{1/2}$$

Πρόβλημα 2.3 Δείξτε ότι στην ομαλά επιταχυνόμενη ευθύγραμμη κίνηση, η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα $\Delta t = [t_1, t_2]$ ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσο του χρονικού αυτού διαστήματος, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_1 + \Delta t/2$.

Λύση:

Η μέση ταχύτητα $\overline{v}$ στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ είναι ίση με

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

και επειδή αναφερόμαστε σε ομαλά επιταχυνόμενη ευθύγραμμη κίνηση, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_0 t_2 + (1/2)at_2^2 - v_0 t_1 - (1/2)at_1^2}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow \overline{v} = v_0 + \frac{1}{2}a\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = v_0 + \frac{1}{2}a(t_2 + t_1)$$

Η στιγμιαία ταχύτητα $v(t)$ στο μέσον του χρονικού διαστήματος $[t_1, t_2]$ (δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_1 + \Delta t/2$) είναι ίση με

$$v(t) = v_0 + at = v_0 + a\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) = v_0 + a\left(t_1 + \frac{t_2 - t_1}{2}\right) = v_0 + a\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

Άρα οι δύο ταχύτητες, $\overline{v}$ και $v(t) = v\left(t_1 + \Delta t/2\right)$, είναι μεταξύ τους ίσες.

Πρόβλημα 2.4 Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ στη διεύθυνση x. Τη στιγμή $t = 0$ εισέρχεται σε αέριο με αποτέλεσμα να ασκείται πάνω του δύναμη $\boldsymbol{F} = -\gamma'\boldsymbol{v}$, όπου γ' είναι μια σταθερά.

(α) Βρείτε την κίνηση του σωματιδίου για $t > 0$.

(β) Θεωρήστε ότι μια επιπλέον σταθερή δύναμη F' ασκείται στο σωματίδιο κατά τη διεύθυνση του x. Βρείτε τη νέα κίνηση του σωματιδίου. Εξετάστε την περίπτωση που ο χρόνος $t \geq 1/\gamma$, όπου $\gamma = \gamma'/m$.

Λύση:

(α) Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου μπορεί να βρεθεί από τον δεύτερο νόμο του Newton

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow -\gamma' v\hat{\boldsymbol{x}} &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

εφ' όσον η κίνηση είναι κατά τον άξονα του x. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση από $t = 0$ ως μια τυχαία χρονική στιγμή t, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v} m\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_0^t \gamma' \mathrm{d}t \\ \Rightarrow m\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) &= -\gamma' t \end{aligned}$$

αντικαθιστώντας $\gamma = \gamma'/m$ έχουμε για την ταχύτητα

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

Η θέση, $x(t)$, του σωματιδίου μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας την συνάρτηση της ταχύτητας

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\gamma t} \\ \Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x &= v_0\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) \end{aligned}$$

(β) Στην περίπτωση που έχουμε μια ακόμη σταθερή δύναμη F' ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow (-\gamma' v + F')\hat{\boldsymbol{x}} &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma v &= f \end{aligned}$$

όπου $f = F'/m$ και $\gamma = \gamma'/m$. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{f - \gamma v} &= \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}(f - \gamma v)}{f - \gamma v} &= -\gamma t \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{f - \gamma v}{f - \gamma v_0}\right) &= -\gamma t \\ \Rightarrow v(t) &= v_0\mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{f}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Ομοίως, η θέση $x(t)$ του σωματιδίου μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση της ταχύτητας

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathrm{d}x &= v_0\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t + \frac{f}{\gamma}\int_0^t (1 - \mathrm{e}^{-\gamma t})\mathrm{d}t \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{v_0}{\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}) + \frac{f}{\gamma}t + \frac{f}{\gamma^2}(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1) \end{aligned}$$

Για $t \geq 1/\gamma$ η ταχύτητα του σωματιδίου, όπως εκφράζεται στη σχέση (2), ανάγεται στην εξίσωση

$$v \simeq \frac{f}{\gamma}$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως η δύναμη F' στην εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F'}{m} = f$$

εφ'όσον έχει λύση της μορφής $v(t) = ft$ να ενεργεί για χρόνο $1/\gamma$ και μετά να μην έχει καμιά επίδραση στο σωματίδιο.

Πρόβλημα 2.5 Θεωρήστε ότι η τροχιά ενός δορυφόρου βρίσκεται λίγο πιο έξω από τον ισημερινό ενός ομογενούς σφαιρικού πλανήτη με πυκνότητα ρ. Δείξατε ότι η περίοδος T της κίνησης σε μια τροχιά εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα του πλανήτη. Δώστε τη σχέση για τη περίοδο T συναρτήσει του ρ και της σταθεράς του Νεύτωνα.

Λύση:

Η δύναμη της βαρύτητας που κρατά το δορυφόρο θα συνδέεται με την κεντρομόλο επιτάχυνση v^2/R

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \tag{2.4}$$

όπου M, m είναι η μάζα του πλανήτη, του δορυφόρου αντιστοίχως και R η ακτίνα του πλανήτη. Υποθέτουμε ότι ο δορυφόρος κινείται σε ακτίνα $r \approx R$ (κοντά στην επιφανεία του πλανήτη). Η ταχύτητα του δορυφόρου είναι

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R$$

όπου $\omega,\ T$ είναι η γωνιακή ταχύτητα και η περίοδος του δορυφόρου αντιστοίχως.
Η μάζα του πλανήτη εκφράζεται μέσω της πυκνότητας ρ του πλανήτη

$$M = \rho V$$

$$\Rightarrow M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

όπου ρ, V είναι η πυκνότητα και ο όγκος του πλανήτη. Άρα η Εξίσωση (2) θα είναι

$$\frac{4\pi^2R^2}{RT^2} = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi R$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{3\pi}{G\rho}\right)^{1/2}$$

Πρόβλημα 2.6 Ποιο σώμα τρέχει ταχύτερα, η Σελήνη ή ένας δορυφόρος που ταξιδεύει γύρω από τη Γη με ακτίνα μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης; Ποιος είναι ο λόγος των ταχυτήτων συναρτήσει του λόγου των ακτίνων των τροχιών; Ποιος είναι ο λόγος των περιόδων; Γνωρίζοντας ότι η Σελήνη έχει περίοδο 27 ημερών με ακτίνα τροχιάς 384 000 km και ότι η ακτίνα της Γης είναι 6400 km, βρείτε την περίοδο του δορυφόρου.

Λύση:

Η δύναμη της βαρύτητας της Γης που κρατά ένα σώμα μάζας m σε απόσταση r, θα συνδέεται με την κεντρομόλο επιτάχυνση v^2/r

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\Rightarrow v = \left(G\frac{M}{r}\right)^{1/2}$$

όπου M, R είναι η μάζα και ακτίνα της Γης, αντιστοίχως. Επιπλέον, αν αντικαταστήσουμε τη γωνιακή ταχύτητα $\omega = v/r = 2\pi/T$ με την περίοδο της κυκλικής τροχιάς, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \omega^2 r^3 &= GM \\ \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 &= GM \\ \Rightarrow T^2 &= \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Αυτή η σχέση είναι ο τρίτος νόμος του Keppler.
Αν θεωρήσουμε ένα δορυφόρο και τη Σελήνη σε ακτίνα r_δ και r_σ αντιστοίχως, θα έχουμε για το λόγο των ταχυτήτων

$$\frac{v_\sigma}{v_\delta} = \left(\frac{r_\delta}{r_\sigma}\right)^{1/2} < 1$$

άρα ο δορυφόρος θα κινείται ταχύτερα από τη Σελήνη.
Ο λόγος των περιόδων με τη βοήθεια της σχέσης (2) μας δίνει

$$\frac{T_\sigma}{T_\delta} = \left(\frac{r_\sigma}{r_\delta}\right)^{3/2}$$

όπου $r_\sigma = 384000\,\mathrm{km}$, $r_\delta = 6400\,\mathrm{km}$ και $T_\delta = 27 \times 24 \times 60 = 38\,880$ min. Άρα η περίοδος του δορυφόρου είναι

$$T_\delta \approx 84 \text{ min}$$

Πρόβλημα 2.7 Ένα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια μιας λίμνης (πολύ μεγάλου βάθους) και συνέχεια βυθίζεται κατακόρυφα προς τον πυθμένα της λίμνης. Στο σώμα εξασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις: το βάρος του $\boldsymbol{B} = mg\hat{\boldsymbol{z}}$, η άνωση $\boldsymbol{A} = -A\hat{\boldsymbol{z}}$ και μια δύναμη αντίστασης $-\gamma\boldsymbol{v}$, όπου γ είναι μία σταθερά και $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα του σώματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{z}}$ έχει διεύθυνση κατακόρυφη προς τον πυθμένα της λίμνης. Υποθέτουμε ότι $A < mg$.

(α) Να γράψετε την εξίσωση κίνησης του σώματος για $t > 0$.

(β) Να βρείτε τη θέση του σώματος (δηλ. την απόσταση από την επιφάνεια της λίμνης) για $t > 0$.

(γ) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου για $t \gg 1/\lambda$, όπου $\lambda \equiv \gamma/m$.

(δ) Να υπολογίσετε το έργο της βάρους $\boldsymbol{B} = mg\hat{\boldsymbol{z}}$ μέχρι τη χρονική στιγμή t, υποθέτοντας ότι $t \gg 1/\lambda$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα των ερωτήσεων (γ) και (δ) σχετικά με τη διατήρηση της ολικής ενέργειας.

Λύση:

(α) Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg - A - \gamma v \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= f - \lambda v \end{aligned}$$

όπου $f \equiv g - A/m$ και $\lambda \equiv \gamma/m$.
Η εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί γράφοντας

$$\frac{\mathrm{d}v}{f - \lambda v} = \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{f-\lambda v} = \int_0^t \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{\mathrm{d}(f-\lambda v)}{f-\lambda v} = -\lambda \int_0^t \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{f-\lambda v}{f}\right) = -\lambda t$$
$$\Rightarrow v = \frac{f}{\lambda} - \frac{f}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{f}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) \tag{2.6}$$

(β) Η θέση του σώματος, $z(t)$, μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας τη σχέση (2)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v = \frac{f}{\lambda} - \frac{f}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$$\Rightarrow \int_0^z \mathrm{d}z = \int_0^t \left(\frac{f}{\lambda} - \frac{f}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow z(t) = \frac{f}{\lambda}t + \frac{f}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{f}{\lambda^2}$$

(γ) Για τη συνθήκη $t \gg 1/\lambda$ έχουμε

$$t \gg 1/\lambda \quad \Rightarrow \lambda t \gg 1 \quad \Rightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t} \ll 1 \quad \Rightarrow v(t) \simeq \frac{f}{\lambda}$$

Άρα η κινητική ενέργεια, $T = (1/2)mv^2$, του σώματος εκφράζεται ως

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{f}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{mg-A}{\gamma}\right)^2$$

όπου αντικαταστήσαμε $f = g - A/m$ και $\lambda = \gamma/m$.

(δ) Ομοίως για τη θέση, $z(t)$, του σώματος όταν $t \gg 1/\lambda$ θα έχουμε

$$z(t) \simeq \frac{f}{\lambda^2}\lambda t - \frac{f}{\lambda^2} = \frac{f}{\lambda^2}(\lambda t - 1)$$
$$\simeq \frac{f}{\lambda}t \simeq \left(\frac{mg-A}{\gamma}\right)t$$

Άρα το έργο της βαρυτικής δύναμης μέχρι κάποια χρονική στιγμή t θα είναι

$$W = mgz(t) = \left(\frac{mgf}{\lambda}\right)t = mg\left(\frac{f}{\lambda}\right)t$$

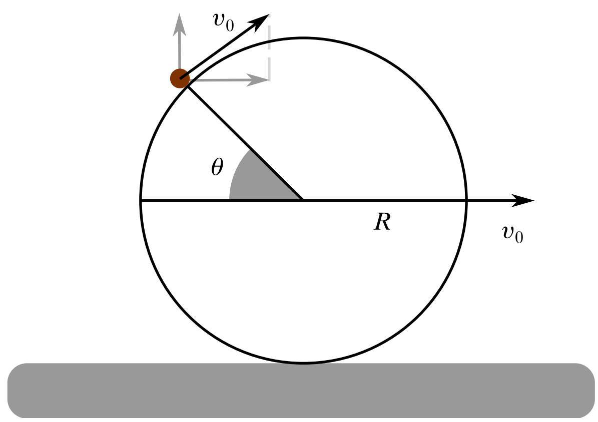
και όπως βλέπουμε αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, αντίθετα με την κινητική ενέργεια που παραμένει σταθερή. Η διαφορά οφείλεται στην ύπαρξη της άνωσης και της αντίστασης, μέσω των οποίων το έργο του βάρους μείον το έργο της άνωσης $[W($βάρος - άνωση$)]$ μεταβάλλεται σε θερμότητα.

Πρόβλημα 2.8 Σωματίδια λάσπης πετάγονται από την επιφάνεια ενός τροχού ακτίνας R που κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 χωρίς να ολισθαίνει.

(α) Βρείτε την ταχύτητα των σωματιδίων λάσπης που εκτοξεύονται κατά την στιγμή της απελευθέρωσης τους από ένα σημείο που ορίζεται από τη γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

(β) Βρείτε τη μέγιστη γωνία $\theta_{\max}$ για την οποία επιτυγχάνεται το μέγιστο ύψος. Ποιο είναι αυτό το μέγιστο ύψος, $h_{\max}$;

Λύση:



Σχήμα 2.1

(α) Θεωρούμε ένα σωματίδιο λάσπης που εκτοξεύεται από ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού όπως δείχνει το σχήμα 2.1. Η ταχύτητα του σωματιδίου στον οριζόντιο άξονα θα οφείλεται στη γραμμική ταχύτητα του τροχού και επιπλέον στην κυκλική ταχύτητα ενώ κατά μήκος του κάθετου άξονα θα οφείλεται μόνο στην κυκλική ταχύτητα. Άρα για τις συνιστώσες της ταχύτητας θα έχουμε

$$v_x = v_0 + v_0 \sin\theta, \quad v_y = v_0 \cos\theta$$

και η ολική ταχύτητα είναι

$$v = \sqrt{2v_0^2(1 + sin\theta)}$$

(β) Το σωματίδιο θα εκτελέσει μια βολή και όπως γνωρίζουμε το μέγιστο ύψος της τροχιάς της βολής θα είναι

$$h = y_0 + \frac{v_y^2}{2g}$$

όπου $y_0 = R(1+\sin\theta)$ είναι η αρχική θέση της βολής ($y = 0$ είναι στο επίπεδο του εδάφους) και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Άρα το μέγιστο θα είναι

$$h = R(1 + \sin\theta) + \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{2g}$$

και η μέγιστη γωνία, $\theta_{\max}$, θα συμβεί όταν η πρώτη παράγωγος του h ως προς το θ είναι μηδέν

$$0 = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta\left(R - \frac{v_0^2\sin\theta}{g}\right)$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{Rg}{v_0^2} \quad \text{ή} \quad \cos\theta = 0$$
$$\Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{Rg}{v_0^2}\right) \quad \text{ή} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Από τις δύο αυτές λύσεις, το μέγιστο ύψος $h_{\max}$ θα συμβεί όταν

$$\sin\theta = \frac{Rg}{v_0^2}$$

(η άλλη λύση, $\theta = \pi/2$, θα δώσει $h = 2\ R$) και θα είναι

$$h_{\max} = R\left(1 + \frac{Rg}{v_0^2}\right) + \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{R^2 g^2}{v_0^4}\right) = R + \frac{R^2 g}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

Πρόβλημα 2.9 Ένα σώμα μάζας m μπορεί να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο xy, χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο σημείο $(x = 0,\ y = 0)$ και έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v}(0) = v_0\hat{\boldsymbol{y}}$, όπου $v_0 > 0$. Πάνω στο σώμα ασκείται η δύναμη $\boldsymbol{F} = (\alpha - \beta t)\hat{\boldsymbol{x}} - \beta t\hat{\boldsymbol{y}}$, όπου $\alpha, \beta > 0$ σταθερές.

(α) Να διατυπώσατε την εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα, $\boldsymbol{v}(t)$, του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

(γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες $x(t),\ y(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

(δ) Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να συνδέει τις σταθερές $\alpha,\ \beta$ και v_0, ώστε να μπορέσει το σώμα να ξαναπεράσει από το σημείο $x = 0,\ y = 0$.

Λύση:

(α) Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= (\alpha - \beta t)\hat{\boldsymbol{x}} - \beta t\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

(β) Από τη σχέση (2) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\alpha - \beta t}{m} \\ \Rightarrow v_x &= \left(\frac{\alpha t}{m} - \frac{\beta t^2}{2m}\right) \qquad (2.8) \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\beta t}{m} \\ \Rightarrow v_y &= v_0 - \frac{\beta t^2}{2m} \qquad (2.9) \end{aligned}$$

(γ) Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (2) και (2) βρίσκουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος θέσεως του σώματος

$$x(t) = \frac{\alpha t^2}{2m} - \frac{\beta t^3}{6m} \qquad (2.10)$$

$$y(t) = v_0 t - \frac{\beta t^3}{6m} \qquad (2.11)$$

(δ) Για να ξαναπεράσει το σώμα από το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ πρέπει η (2) και η (2) να μηδενίζονται. Άρα

$$x(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2m} - \frac{\beta t}{6m}\right)t^2 = 0 \qquad (2.12)$$

$$y(t) = 0 \Rightarrow \left(v_0 - \frac{\beta t^2}{6m}\right)t = 0 \qquad (2.13)$$

Από τις (2) και (2) βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι $t = 0$ (που είναι η ώρα εκκίνησης) και

$$t = \frac{3\alpha}{\beta} \qquad (2.14)$$

αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στην (2) βρίσκουμε

$$v_0 = \frac{3\alpha^2}{2\beta m}$$

Πρόβλημα 2.10 Μια μάζα m είναι δεμένη στο ένα άκρο ενός ελατηρίου, και κινείται σε μια οριζόντια ευθεία. Η μετατόπιση της μάζας από το σημείο ισορροπίας της δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = A + B\sin(\omega t + \phi)$$

όπου τα μεγέθη A, B, ω και ϕ είναι σταθερά και γνωστά.

(α) Να βρείτε την ολική δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα στην κατεύθυνση x, και δείξατε ότι, εκτός από τη δύναμη του ελατηρίου $F_{\text{ελ}}$, ασκείται στη μάζα και μια άλλη δύναμη, $F_{\text{εξ}}$. Βρείτε το μέγεθος της $F_{\text{εξ}}$.

(β) Τη χρονική στιγμή $t = 0$, και καθώς η μάζα κινείται όπως αναφέρθηκε στο (α), η δύναμη $F_{\text{εξ}}$ αφαιρείται. Να βρείτε την κίνηση που θα εκτελέσει η μάζα για $t \geq 0$.

Λύση:

(α) Από το δεδομένο διάνυσμα θέσης μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση

$$\begin{aligned} x(t) &= A + B\sin(\omega t + \phi) \qquad (2.15)\\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= B\omega\cos(\omega t + \phi)\\ \Rightarrow \ddot{x}(t) &= -B\omega^2\sin(\omega t + \phi) \qquad (2.16) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2), η (2) γίνεται

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -B\omega^2\left(\frac{x - A}{B}\right)\\ \Rightarrow \ddot{x} &= -\omega^2 x + \omega^2 A \end{aligned}$$

Η ολική δύναμη $F_{\text{ολική}}$ είναι ίση με

$$F_{\text{ολική}} = m\ddot{x} = -m\omega^2 x + m\omega^2 A$$

Ο πρώτος όρος $-m\omega^2 x$ αποτελεί την $F_{\text{ελ}}$ ενώ ο δεύτερος όρος τη ζητούμενη

$$F_{\text{εξ}} = m\omega^2 A$$

(β) Για $t = 0$ έχουμε ως αρχικές συνθήκες για τη μελλοντική κίνηση $(t > 0)$ της μάζας

$$x(t = 0) = A + B\sin\phi \quad \text{και} \quad v(t = 0) = B\omega\cos\phi$$

$$F(t = 0) = m\dot{v} = -m\omega^2 x$$

Όταν η δύναμη $F_{\text{εξ}}$ αφαιρεθεί το A = 0 εφ' όσον έχουμε $F_{\text{εξ}} = m\omega^2 A$ και η εξίσωση κίνησης θα είναι αυτή ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m\omega^2 x$$

Η εξίσωση κίνησης για $A = 0$ θα είναι

$$x(t) = f\sin(\omega t + \theta)$$

όπου οι σταθερές θ, f θα πρέπει να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες ως ακολούθως.
Για την αρχική συνθήκη $x(t = 0) = A + B\sin\phi$ θα έχουμε

$$x(t = 0) = f\sin\theta = A + B\sin\phi \qquad (2.17)$$

και για την αρχική συνθήκη $v(t=0) = B\omega\cos\phi$ θα έχουμε

$$v(t=0) = f\omega\cos\theta = B\omega\cos\phi$$

$$\Rightarrow f\cos\theta = B\cos\phi \tag{2.18}$$

Αν διαιρέσουμε τις εξισώσεις (2) και (2) θα πάρουμε

$$\tan\theta = \frac{A + B\sin\phi}{B\cos\phi}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{A + B\sin\phi}{B\cos\phi}\right)$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και προσθέσουμε τις σχέσεις (2) και (2) θα έχουμε την έκφραση της σταθεράς f

$$f^2 = A^2 + B^2 + 2AB\sin\phi$$
$$\Rightarrow f = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\sin\phi}$$

Πρόβλημα 2.11 Δυο σωματίδια με ίσες μάζες συγκρούονται ελαστικά (η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων διατηρείται). Δείξτε ότι αν αρχικά το ένα είχε ταχύτητα μηδέν, τότε μετά την κρούση αν και τα δύο σώματα κινούνται, οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων σχηματίζουν γωνία 90^o .

Λύση:

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$m\boldsymbol{v}_1 + 0 = m\boldsymbol{v}_1' + m\boldsymbol{v}_2'$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2' \tag{2.19}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2'^2$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_1^2 = \boldsymbol{v}_1'^2 + \boldsymbol{v}_2'^2 \tag{2.20}$$

Από την (2) έχουμε

$$v_1^2 = (\boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2')\cdot(\boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2') = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\boldsymbol{v}_1'\cdot\boldsymbol{v}_2'$$

Χρησιμοποιώντας την (2) συμπεραίνουμε ότι

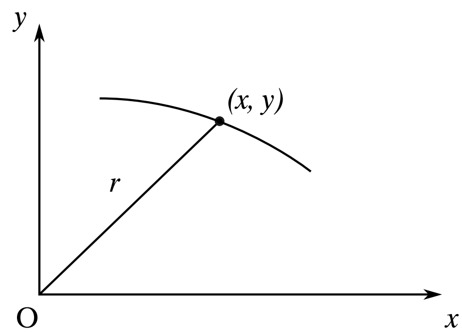
$$\boldsymbol{v}_1'\cdot\boldsymbol{v}_2' = 0$$

Άρα οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων μετά την κρούση είναι κάθετες $\boldsymbol{v}_1' \perp \boldsymbol{v}_2'$.

Πρόβλημα 2.12 Σωματιδίου μάζας $m = 1$ κινείται θπό τη δράση μιας κεντρικής δύναμης της μορφής $F = -\gamma/r^2$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2}$ είναι η απόσταση του σωματιδίου από το κέντρο Ο της δύναμης και γ είναι μια σταθερά για την οποία, για $\gamma > 0$ έχουμε ελκτική δύναμη ενώ για $\gamma < 0$ απωστική δύναμη. Τα $x(t),\ y(t)$ είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της θέσης του σωματιδίου.
Να δείξετε ότι η τροχιά του σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$r = Ax + By + C \qquad \text{ή} \qquad \left(x^2+y^2\right)^{1/2} = Ax + By + C$$

όπου $A,\ B,\ C$ είναι σταθερές που προσδιοπίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Ο τρόπος αυτής της λύσης του προβλήματος οφείλεται στον Pierre Simon Laplace.



Σχήμα 2.2

Λύση:

Στην περίπτωση περίπτωση της κεντρικής δύναμης οι εξισώσεις κίνησης θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} = -\frac{\gamma x}{r^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y} = -\frac{\gamma y}{r^3} \tag{2.21}$$

Από τις εξισώσεις (2) έχουμε

$$r^3\ddot{x} = -\gamma x, \qquad r^3\ddot{y} = -\gamma y$$

Λαμβάνοντας την πρώτη παράγωγο ως προς το χρόνο, τότε θα λάβουμε

$$\frac{\mathrm{d}(r^3\ddot{x})}{\mathrm{d}t} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\gamma\dot{x}, \qquad \frac{\mathrm{d}(r^3\ddot{y})}{\mathrm{d}t} = -\gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\gamma\dot{y} \tag{2.22}$$

Από τη σχέση $r^2 = x^2 + y^2$, λαμβάνοντας την πρώτη παράγωγο θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(y^2)}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ας υπολογίσουμε την ποσότητα $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}$

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \overset{(2)}{=} -\dot{x}\gamma\frac{x}{r^3} - \dot{y}\frac{\gamma y}{r^3} = -\frac{\gamma(x\dot{x} + y\dot{y})}{r^3} \overset{(2)}{=} -\gamma\frac{r\dot{r}}{r^3} = -\gamma\frac{\dot{r}}{r^2} \tag{2.24}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την ποσότητα $x\ddot{x} + y\ddot{y}$

$$\begin{aligned} x\ddot{x} + y\ddot{y} &= \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right)}_{2r\dot{r}}\right) = r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(r\dot{r}\right) \\ &\overset{(2)}{=} r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right) \overset{(2)}{=} r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\ &= r^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\gamma}{r}\right) - \frac{2\gamma\dot{r}}{r^2}\right] = r^2\left[\frac{\gamma}{r^2}\dot{r} - \frac{2\gamma\dot{r}}{r^2}\right] = -r^2\left(-\gamma\frac{\dot{r}}{r^2}\right) \\ &= -\gamma\dot{r} \end{aligned} \tag{2.25}$$

δηλαδή η σχέση (2) έχει λάβει τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^3\ddot{r}\right) = -\gamma\dot{r} \tag{2.26}$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (2) και (2) είναι της ίδιας μορφής, αφού εκφράστηκαν ως ακολούθως

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^3\ddot{x}\right) = -\gamma\dot{x}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^3\ddot{y}\right) = -\gamma\dot{y}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^3\ddot{r}\right) = -\gamma\dot{r}$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $r = r(t)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (πρώτης τάξης)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = -\gamma u$$

όπου $\psi(t) = r^3$ είναι μια θετική συνάρτηση του χρόνου, αφού $r(t) > 0$ και $u(t) = \dot{x}(t)$ ή $\dot{y}(t)$ ή $\dot{r}(t)$. Εφόσον αυτές οι συναρτήσεις $\dot{r}(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση, τότε συνδέονται με μια γραμμική σχέση, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$\dot{r} = A\dot{x} + B\dot{y}, \ A, \ B = \text{ σταθερές}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r - Ax - By) = 0$$

$$\Rightarrow r - Ax - By = C = \text{σταθερά} \tag{2.27}$$

αφού η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $r - Ax - By$ είναι μηδέν. Επομένως, η σχέση (2) θα γραφτεί ως

$$r = Ax + By + C \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} = Ax + By + C \tag{2.28}$$

και αποτελεί την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

Πρόβλημα 2.13 Να αναλύσετε το πρόβλημα κίνησης σωματιδίου με κεντρικές δυνάμεις (βλ. πρόβλημα 2.12) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μιγαδικών αριθμών.

Λύση:

Από τις εξισώσεις κίνησης (2) για τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y έχουμε

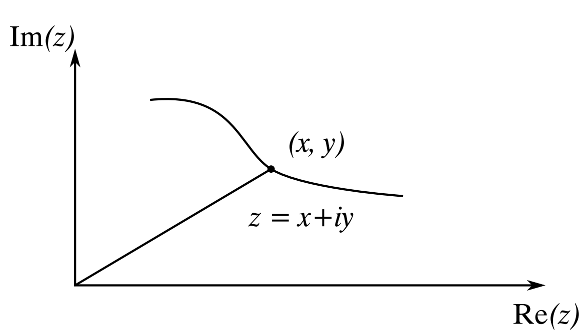
$$\ddot{x} = -\gamma\frac{x}{r^3}, \qquad \ddot{y} = -\gamma\frac{y}{r^3}, \ \gamma \in \mathbb{R}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεξιά εξίσωση με τη μιγαδική μονάδα i ($i^2 = -1$) και την προσθέτουμε στην αριστερή εξίσωση, οπότε έπεται

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\gamma\frac{x + iy}{r^3} \tag{2.29}$$

Ορίζουμε μια μιγαδική συνάρτηση $z = x + iy \Rightarrow z^* = x - iy$, με

$$|z|^2 = |z^*|^2 = zz^* = x^2 + y^2 = r^2$$



Σχήμα 2.3

Στην περίπτωση αυτή η σχέση (2) θα λάβει τη μορφή

$$\ddot{z} = -\gamma \frac{z}{|z|^3} = -\gamma \frac{z}{|z|\,|z|^2} = -\frac{\gamma}{|z|z^*} \tag{2.30}$$

αφού

$$|z|^2 = |z^*|^2 = zz^* \Rightarrow z/|z^*|^2 = \frac{1}{z^*}$$

Λαμβάνοντας το μιγαδικό συζυγές της (2) θα έχουμε

$$\ddot{z}^* = -\gamma \frac{1}{|z|z} \tag{2.31}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (2) με z^*, τη σχέση (2) με z και τις αφαιρούμε

$$0 = \ddot{z}z^* - z\ddot{z}^* = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{z}z^* - z\dot{z}^*\right)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μέσα στην παράγωγο θα πρέπει να είναι σταθερή, αφού η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται. Επίσης, παρατηρούμε ότι ο όρος $\dot{z}z^*$ είναι το μιγαδικό συζυγές του $z\dot{z}^*$, και επομένως ο όρος $\dot{z}z^* - z\dot{z}^*$ είναι φανταστικός. Ας ονομάσουμε τον όρο $2ib$, $b \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\dot{z}z^* - z\dot{z}^* = 2ib \tag{2.32}$$

Μπορούμε επίσης να αναλύσουμε τη σχέση (2) ως ακολούθως

$$\left(z^*\right)^2 \frac{\dot{z}z^* - z\dot{z}^*}{\left(z^*\right)^2} = 2ib \Rightarrow \left(z^*\right)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{z^*}\right) = 2ib \tag{2.33}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{z}{z^*} = \frac{z}{z^*}\frac{z}{z} = \frac{z^2}{|z|^2} = \left(\frac{z}{|z|}\right)^2$$

Επομένως, η σχέση (2) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\left(z^*\right)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|}\right)^2 &= 2ib\\ \Rightarrow 2\left(z^*\right)^2 \frac{z}{|z|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|}\right) &= 2ib\end{aligned}$$

αλλά ο όρος

$$\begin{aligned}\frac{z}{|z|} &= \frac{z|z|}{|z|^2} = \frac{z|z|}{zz^*} = \frac{|z|}{z^*}\\ \Rightarrow 2\left(z^*\right)^2 \frac{|z|}{z^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|}\right) &= 2ib\\ \Rightarrow 2z^*|z|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|}\right) &= 2ib\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με $\ddot{z}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2z^*|z|\ddot{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|}\right) &= 2ib\ddot{z}\\ \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} -2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|}\right) &= 2ib\ddot{z}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 = 2\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|}\right) + 2ib\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{z}\right)\\
&\Rightarrow 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z}{|z|} + \frac{ib}{\gamma}\dot{z}\right)\\
&\Rightarrow 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{z^*}\left(|z| + \frac{ib}{\gamma}\dot{z}z^*\right)\right)\\
&\Rightarrow \frac{1}{z^*}\left(|z| + \frac{ib}{\gamma}\dot{z}z^*\right) = \text{μιγαδική σταθερά} = C_1 \quad \text{ή} \quad |z| + \frac{ib}{\gamma}\dot{z}z^* = C_1 z^*
\end{aligned}
$$

λαμβάνοντας το μιγαδικό συζυγή, θα έχουμε επίσης

$$|z| - \frac{ib}{\gamma}\dot{z}^* z = C_1^* z$$

αν προσθέσουμε τις δυο τελευταίες σχέσεις, έπεται

$$2|z| + \frac{ib}{\gamma}(\dot{z}z^* - \dot{z}^* z) = C_1 z^* + C_1^* z$$

αν θεωρήσουμε τη μιγαδική σταθερά $C_1 = A + iB$, όπου $A,\ B$ πραγματικές σταθερές, τότε λαμβάνουμε

$$2|z| + i\frac{b}{\gamma}\left(\dot{z}z^* - z\dot{z}^*\right) = A\left(z + z^*\right) - iB\left(z - z^*\right) \tag{2.34}$$

αλλά από τη σχέση (2) $\dot{z}z^* - z\dot{z}^* = 2ib$, επομένως η (2) γράφεται ως

$$2|z| - \frac{2b^2}{\gamma} = 2Ax + 2By$$

αφού

$$z + z^* = x + iy + x - iy = 2x, \qquad z - z^* = x + iy - x + iy = 2iy$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow |z| - \frac{b^2}{\gamma} = Ax + By\\
&\Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} = Ax + By + \frac{b^2}{\gamma}
\end{aligned}
$$

που είναι η ίδια λύση (2) (με $C = b^2/\gamma$) που βρήκαμε με τη μέθοδο του Laplace.

Πρόβλημα 2.14 Δορυφόρος μάζας m κινείται γύρω από τη γη σε περιοχή όπου υπάρχει ελαφρά ατμοσφαιρική τριβή της μορφής λv^n, όπου v είναι η ταχύτητα του δορυφόρου και λ, n, σταθερές. Να προσδιοριστεί το n, ώστε ο δορυφόρος να υφίσταται

(α) μείωση του ύψους του με σταθερό ρυθμό και

(β) μείωση της περιόδου του με σταθερό ρυθμό.

Να υποτεθεί ότι η τροχιά είναι σπειροειδής με μικρό βήμα, οπότε είναι κάθε χρονική στιγμή περίπου κυκλική με κέντρο καμπυλότητας το κέντρο της γης.

Λύση:

(α) Στο δορυφόρο έχουμε την κεντρομόλο επιτάχυνση v^2/r που μπορεί να εκφραστεί διαμέσου της βαρυτικής έλξης

$$
\begin{aligned}
&G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}\\
&\Rightarrow G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2} \tag{2.35}$$

όπου M είναι η μάζα της Γης και m είναι η μάζα του δορυφόρου.
Παραγωγίζοντας την Εξίσωση (2) έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\left(GM\right)^{1/2}\frac{1}{r^{3/2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Έχουμε τη συνθήκη ότι $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = a$ όπου $a =$σταθερά, δηλαδή ο δορυφόρος υφίσταται μείωση του ύψους του με σταθερό ρυθμό: Άρα το $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ είναι

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}a\left(GM\right)^{1/2}\frac{1}{r^{3/2}} \tag{2.36}$$

Επιπλέον έχουμε την επιτρόχιο επιτάχυνση $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ που συνδέεται με την ατμοσφαιρική τριβή ως εξής

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda v^n = -\lambda\left(\frac{GM}{r}\right)^{n/2} \tag{2.37}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2), (2) θα πάρουμε

$$-\frac{1}{2}ma(GM)^{1/2}\frac{1}{r^{3/2}} = -\lambda\left(\frac{GM}{r}\right)^{n/2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2\frac{\lambda}{m}\left(GM\right)^{(n-1)/2} r^{(3-n)/2}$$

Άρα για να έχουμε το $a =$σταθερό θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη $3 - n = 0$ (η δύναμη του r να είναι μηδέν), επομένως

$$n = 3$$

(β) Για την κυκλική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα είναι

$$w = \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi}{T}r$$

όπου T είναι η περίοδος της κυκλικής τροχιάς. Επομένως η εξίσωση (2) μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} r &= \frac{GM}{v^2} \\ \Rightarrow \frac{vT}{2\pi} &= \frac{GM}{v^2} \\ \Rightarrow v^3 &= \frac{2\pi GM}{T} \\ \Rightarrow v &= \frac{(2\pi GM)^{1/3}}{T^{1/3}} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{3}\frac{(2\pi GM)^{1/3}}{T^{4/3}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Αλλά έχουμε τη συνθήκη $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = \beta$, όπου $\beta =$σταθερά, δηλαδή ο δορυφόρος υφίσταται μείωση της περιόδου του κατά σταθερό ρυθμό. Συνεπώς η $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\beta}{3}\frac{(2\pi GM)^{1/3}}{T^{4/3}}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2), (2) θα πάρουμε

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda v^n$$

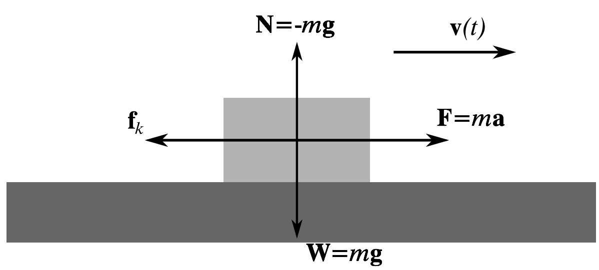
$$\Rightarrow -\frac{m}{3}(2\pi GM)^{1/3}T^{-4/3}\beta = -\lambda\frac{(2\pi GM)^{n/3}}{T^{n/3}}$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{3\lambda}{m}(2\pi GM)^{(n-1)/3}T^{(4-n)/3}$$

Άρα για να έχουμε το b =σταθερό θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη $4 - n = 0$ (η δύναμη της περιόδου T να είναι μηδέν), επομένως

$$n = 4$$

Πρόβλημα 2.15 Ένα σώμα μάζας m κινείται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Όταν η αρχική του ταχύτητα είναι v_0, σταματά σε απόσταση s μακριά από την αρχική του θέση. Βρείτε το συντελεστή τριβής μ μεταξύ του σώματος και επιφάνειας.

Λύση:



Σχήμα 2.4

Οι δυνάμεις που επιδρούν πάνω στο σώμα αναλύονται στο σχήμα 2.4. Η δύναμη της κινητικής τριβής f_K είναι

$$f_K = -\mu mg = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma$$
$$\Rightarrow a = -\mu g = \text{σταθερή}$$

Η ταχύτητα του σώματος είναι

$$v(t) = v_0 + at$$
$$\Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

Η θέση του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\frac{v - v_0}{a} \tag{2.39}$$

εκεί που σταματά το σώμα έχουμε $x(t) = s$ και $v(t) = 0$ άρα η σχέση (2) γράφεται

$$\mu = \frac{v_0^2}{2sg}$$

Πρόβλημα 2.16 Ηλεκτρόνιο κινείται μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{y}}$. Αν το ηλεκτρόνιο κατά την στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα μηδέν, να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του ηλεκτρονίου με την πάροδο του χρόνου. Τι θα έκανε το ηλεκτρόνιο με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αν δεν είχαμε καθόλου ηλεκτρικό πεδίο;

Λύση:

Η δύναμη που επιδρά πάνω στο ηλεκτρόνιο δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = qE\hat{\boldsymbol{y}} + q \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qE\hat{\boldsymbol{y}} + qBv_y\hat{\boldsymbol{x}} - qBv_x\hat{\boldsymbol{y}}$$

άρα οι x και y συνιστώσες είναι

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = qBv_y \quad \text{και} \quad m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = qE - qBv_x$$

χρησιμοποιώντας $\omega = qB/m$ (κυκλοτρονική συχνότητα)

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \omega v_y \qquad \text{και} \qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}E - \omega v_x$$

από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow v_z = 0 \quad \text{και} \quad z(t) = 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Έχουμε

$$\ddot{x} = \omega\dot{y} \times i \tag{2.41}$$

$$\ddot{y} = -\omega\dot{x} + \frac{qE}{m} \times 1 \tag{2.42}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (2), αφού πρώτα έχουμε πολλαπλασιάσει τη σχέση (2) με i και τη σχέση (2) με τη μονάδα, βρίσκουμε

$$\ddot{y} + i\ddot{x} = -\omega\dot{x} + \frac{qE}{m} + i\omega\dot{y} = \frac{qE}{m} + i\omega(\dot{y} + i\dot{x}) \tag{2.43}$$

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε το μιγαδικό αριθμό $s = y + ix$. Η εξίσωση (2) γίνεται

$$\ddot{s} - i\omega\dot{s} = \frac{qE}{m} \tag{2.44}$$

Πρέπει να βρούμε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2). Η λύση της ομογενούς είναι

$$s_{\text{ομ}}(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{2.45}$$

Η λύση της μερικής είναι

$$s_{\text{μερ}}(t) = C_3 t \tag{2.46}$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (2) έχουμε

$$\begin{aligned} i\omega C_3 &= \frac{qE}{m} \\ \Rightarrow C_3 &= -i\frac{qE}{m\omega} = i\frac{E}{B} \end{aligned}$$

Η λύση της διαφορικής (2) είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς (2) και της λύσης της μερικής (2)

$$s(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{i\omega t} - i\frac{E}{B}t \tag{2.47}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (2) έχουμε

$$\begin{aligned} s(0) &= C_1 + C_2 \\ \Rightarrow C_1 &= -C_2 \\ \dot{s}(t) &= -i\omega C_2 \mathrm{e}^{i\omega t} + i\frac{E}{B} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (2) έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{s}(0) &= -i\omega C_2 + i\frac{E}{B} = 0 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{E}{B\omega} \end{aligned} \tag{2.49}$$

Από τις (2) και (2) η (2) γίνεται

$$s(t) = \frac{E}{B\omega}\left(1 - \mathrm{e}^{i\omega t}\right) - i\frac{Et}{B}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler – De Moivre για τους μιγαδικούς αριθμούς βρίσκουμε

$$s(t) = \frac{E}{B\omega}\big(1 - \cos(\omega t)\big) + i\frac{E}{B}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right) \tag{2.50}$$

Είχαμε χρησιμοποιήσει τη σχέση $s = y + ix$ οπότε το πραγματικό μέρος της (2) είναι η $y(t)$ και το μιγαδικό η $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E}{B\omega}\big(\omega t - \sin(\omega t)\big) \\ y(t) &= \frac{E}{B\omega}\big(1 - \cos(\omega t)\big) \end{aligned}$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{E}{B}\big(\cos(\omega t) - 1\big) \\ \dot{y}(t) &= \frac{E}{B}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που δεν υπήρχε το ηλεκτρικό πεδίο το ηλεκτρόνιο θα παρέμενε ακίνητο στην αρχή των συντεταγμένων.

Πρόβλημα 2.17 Ένα σώμα μάζας m, βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0, από την επιφάνεια της Γης μάζας M και ακτίνας R. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Να βρείτε

(α) την ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση της απόστασης x από το κέντρο της Γης,

(β) το μέγιστο ύψος, $x_{\max}$, που θα φθάσει το σώμα, και

(γ) το v_0 ώστε το σώμα να διαφύγει από την έλξη της Γης.

(*Η μάζα, M και η ακτίνα, R, της Γης θεωρούνται γνωστά μεγέθη*).

Λύση:

(α) Έχουμε ακτινική τροχιά. Για μία απόσταση x ισχύει

$$\begin{aligned} F &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow G\frac{Mm}{x^2} &= -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v = -\frac{GM}{x^2}$$
$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -GM\int_R^x \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)}$$

(β) Στο $x_{\max}$ η ταχύτητα θα είναι $v = 0$

$$x_{\max} = \left(\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}\right)^{-1}$$

(γ) Για την ταχύτητα διαφυγής $x \to \infty$ όπου η ταχύτητά του είναι μηδέν

$$v_{\delta\iota\alpha\phi} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Πρόβλημα 2.18 Φορτισμένο σωματίδιο q βρίσκεται σε εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο

$$\boldsymbol{E} = E(\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}})$$

και σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = -B\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπου $\omega = qB/m$ είναι η κυκλοτρονική συχνότητα. Το σωματίδιο βρίσκεται σε ηρεμία κατά την στιγμή $t = 0$, δηλαδή

$$\boldsymbol{v}(0) = 0 \qquad \text{και} \qquad x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

Να βρείτε τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου, t και την κινητική ενέργεια του. Να αποδείξετε ότι η τροχιά του σωματιδίου θα βρίσκεται στο επίπεδο $x - y$.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton, όπου η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι το διανυσματικό άθροισμα της ηλεκτρικής δύναμης και της δύναμης Lorentz

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{qE}{m}(\cos(\omega t)\ \hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\ \hat{\boldsymbol{y}}) + \frac{q}{m}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix}$$

όπου η ταχύτητα, $\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$. Άρα η εξίσωση κίνησης αναλύεται στις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = a\cos(\omega t) - \omega v_y$$
$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = a\sin(\omega t) + \omega v_x \tag{2.51}$$
$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.52}$$

όπου $a = qE/m$. Από την τελευταία εξίσωση, για την συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα των z θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow v_z(t) = 0$$
$$\Rightarrow z(t) = 0$$

όπου οι αρχικές συνθήκες $z(0) = v_z(0) = 0$ έχουν χρησιμοποιηθεί. Άρα η κίνηση του σωματιδίου θα παίρνει μέρος στο επίπεδο $x - y$.
Ορίζουμε μια νέα μιγαδική μεταβλητή $w(t) = v_x(t) + iv_y(t)$ και αφού πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (2) με τη μιγαδική μονάδα και την προσθέσουμε με την εξίσωση της (2) θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = a\mathrm{e}^{i\omega t} + i\omega w$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - i\omega w = a\mathrm{e}^{i\omega t}$$

Η λύση του πρώτου βαθμού της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - i\omega w = 0 \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}w}{w} = i\omega \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln w = i\omega t$$

είναι

$$w_o(t) = A\mathrm{e}^{i\omega t}$$

Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα έχει τη μορφή

$$w_\mu(t) = Bt\mathrm{e}^{i\omega t}$$

Άρα η γενική λύση θα είναι

$$w(t) = w_o(t) + w_\mu(t) = A\mathrm{e}^{i\omega t} + Bt\mathrm{e}^{i\omega t}$$

όπου οι σταθερές A, B θα ορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $v_x(0) = v_y(0) = x(0) = y(0) = 0$. Συνεπώς οι αρχικές συνθήκες θα μας δώσουν

$$A = 0 \qquad \text{και} \qquad B = a$$

Επομένως οι καρτεσιανές συντεταγμένες της ταχύτητας θα είναι

$$w(t) = at\mathrm{e}^{i\omega t} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) & = at\cos(\omega t) \\ v_y(t) & = at\sin(\omega t) \end{cases}$$

και η κινητική ενέργεια του σωματιδίου θα είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}ma^2t^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = \frac{1}{2}ma^2t^2$$
$$= \frac{q^2E^2t^2}{2m}$$

Η τροχιά του σωματιδίου, $(x(t), y(t))$, μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις των συνιστωσών της ταχύτητας

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = at\cos(\omega t)$$
$$\Rightarrow \int_0^t \mathrm{d}x = a\int_0^t t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{\omega^2}\left[\cos(\omega t) + \omega t\sin(\omega t) - 1\right]$$

και

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = at\sin(\omega t)$$
$$\Rightarrow \int_0^t \mathrm{d}y = a\int_0^t t\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow y(t) = \frac{a}{\omega^2}\left[\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)\right]$$

Πρόβλημα 2.19 Σωματίδιο μάζας m πέφτει με την επίδραση της βαρύτητας (που δεχόμαστε ότι είναι σταθερή) σε μέσο που προκαλεί αντίσταση μέτρου

$$\frac{mg}{k^2}v^2$$

όπου k είναι μια σταθερά. Δείξατε ότι η ταχύτητα που θα αποκτήσει το σωματίδιο ξεκινώντας από την ηρεμία, όταν τούτο πέσει σε απόσταση x ικανοποιεί τη σχέση

$$v^2 = k^2\left(1 - \mathrm{e}^{-(2g/k^2)x}\right)$$

Δείξατε ότι το x και ο αντίστοιχος χρόνος της πτώσης t, συνδέονται με τον τύπο

$$x = \frac{k^2}{g}\ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{k}\right)\right]$$

Λύση:

Θεωρούμε ότι ο θετικός άξονας z κατευθύνεται προς τα κάτω. Η ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το διανυσματικό άθροισμα της βαρύτητας, $mg\hat{\boldsymbol{z}}$ και της αντίστασης, $-(mg/k^2)v^2\hat{\boldsymbol{z}}$. Συνεπώς η εξίσωση κίνησης από το δεύτερο νόμο του Newton θα είναι

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} &= \left(mg - \frac{mg}{k^2}v^2\right)\hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) \qquad (2.53) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

και η εξίσωση (2) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) \\ \Rightarrow \int_0^v \frac{v\mathrm{d}v}{1 - v^2/k^2} &= \int_0^x g\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)\Bigg|_0^v &= -\frac{2g}{k^2}x \\ \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) &= -\frac{2g}{k^2}x \\ \Rightarrow v^2 &= k^2\left(1 - \mathrm{e}^{-2gx/k^2}\right) \end{aligned}$$

Για να βρούμε τη θέση πτώσης συναρτήσει του χρόνου, ξεκινάμε από την Εξίσωση (2) για την ταχύτητα

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{k^2 - v^2} &= \int_0^t \frac{g}{k^2}\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{k+v}{k-v}\right) &= \frac{g}{k^2}t \\ \Rightarrow \frac{k+v}{k-v} &= \mathrm{e}^{2gt/k} \\ \Rightarrow v &= k\frac{\mathrm{e}^{gt/k} - \mathrm{e}^{-gt/k}}{\mathrm{e}^{gt/k} + \mathrm{e}^{-gt/k}} \end{aligned}$$

$$= k \tanh\left(\frac{gt}{k}\right)$$

και η θέση του σωματιδίου θα βρεθεί από την ολοκλήρωση της ταχύτητας

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k \tanh\left(\frac{gt}{k}\right)$$
$$\Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x = k \int_0^t \tanh\left(\frac{gt}{k}\right) \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow x = \frac{k^2}{g} \int_0^{gt/k} \tanh \omega \, \mathrm{d}\omega$$

όπου η νέα μεταβλητή $\omega = gt/k$. Άρα έχουμε

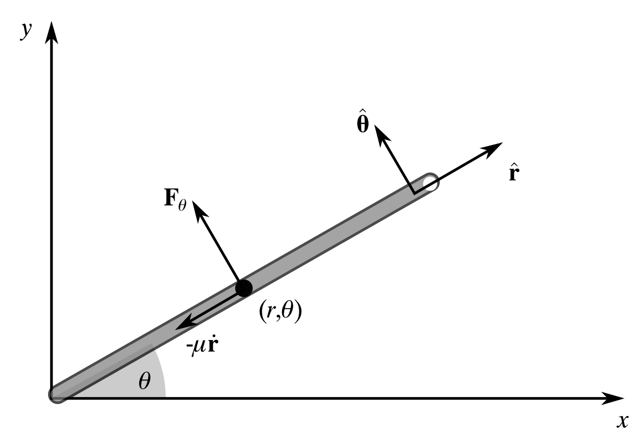
$$x = \frac{k^2}{g} \int_0^{gt/k} \frac{\sinh \omega}{\cosh \omega} \mathrm{d}\omega = \frac{k^2}{g} \int_0^{gt/k} \frac{\mathrm{d} \cosh \omega}{\cosh \omega} = \frac{k^2}{g} \ln \left[\cosh\left(\frac{gt}{k}\right)\right]$$

Πρόβλημα 2.20 Σωλήνας στρέφεται γύρω από ένα σταθερό σημείο με γωνιακή ταχύτητα ω (σταθερή) πάνω σ' ένα οριζόντιο επίπεδο. Μπαλάκι κινείται κατά μήκος του στρεφομένου σωλήνα. Λόγω τριβής στο μπαλάκι ασκείται δύναμη $-\mu\dot{r}$ όπου $\dot{r}$ είναι η ταχύτητα κατά μήκος του σωλήνα. Επιπλέον ασκείται η κάθετη αντίδραση του σωλήνα λόγω περιστροφής του. Αν οι αρχικές συνθήκες σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$r(0) = 0, \quad \dot{r}(0) = v_0$$

βρείτε την πολική ακτίνα $r(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου καθώς και τη δύναμη της αντίδραση λόγω περιστροφής.

Λύση:



Σχήμα 2.5

Σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) η δύναμη που ασκείται στο μπαλάκι είναι

$$\boldsymbol{F} = F_r \hat{\boldsymbol{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{2.54}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις πολικές συντεταγμένες.
Η εξίσωση κίνησης σε πολικές συντεταγμένες θα είναι

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = m(\ddot{r} - r\omega^2)\hat{\boldsymbol{r}} + 2m\dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

όπου $\dot{\theta}=\omega,\ \ddot{\theta}=0$. Άρα η εξίσωση (2) μπορεί να γραφτεί

$$F_\theta = 2m\dot{r}\dot{\theta} \tag{2.55}$$

και

$$\begin{aligned} m(\ddot{r}-r\omega^2) &= -\mu\dot{r} \\ \Rightarrow \ddot{r}+\frac{\mu}{m}\dot{r}-r\omega^2 &= 0 \\ \Rightarrow \left(D^2+\frac{\mu}{m}D-\omega^2\right) r &= 0 \end{aligned}$$

όπου $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Οι δύο ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,$D^2 + \mu/m\ D - \omega^2 = 0$, της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\rho_{1,2} = \frac{-(\mu/m) \pm \sqrt{\mu^2/m^2+4\omega^2}}{2}$$

και συνεπώς η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης για τη θέση r θα είναι

$$r(t) = c_1\mathrm{e}^{\rho_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\rho_2 t}$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές που μπορούν να καθοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.
Για $r(0)=0$ και $\dot{r}(0)=v_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= r(0) = c_1 + c_2 \\ \Rightarrow c_1 &= -c_2 \\ \Rightarrow v_0 &= \dot{r}(0) = c_1\rho_1 + c_2\rho_2 \end{aligned}$$

Επομένως οι σταθερές είναι

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{v_0}{\rho_1-\rho_2} \\ \Rightarrow c_1 &= -c_2 = \frac{v_0}{(\mu^2/m^2+4\omega^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Άρα η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης για τη θέση του σωματιδίου είναι

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{v_0}{(\mu^2/m^2+4\omega^2)^{1/2}}\left(\mathrm{e}^{\left(-(\mu/m)+((\mu^2/m^2)+4\omega^2)^{1/2}\right)t/2} - \mathrm{e}^{\left(-(\mu/m)-((\mu^2/m^2)+4\omega^2)^{1/2}\right)t/2}\right) \\ &= \frac{2mv_0\mathrm{e}^{-(\mu/2m)t}}{(\mu^2+4m^2\omega^2)^{1/2}}\sinh\left(\frac{(\mu^2+4m^2\omega^2)^{1/2}}{2m}t\right) \end{aligned}$$

Η κάθετη αντίδραση του σωλήνα, F_θ, λόγω περιστροφής δίνεται από την εξίσωση (2)

$$\begin{aligned} F_\theta &= 2m\dot{r}\dot{\theta} \\ &= 2\frac{2mv_0\omega\mathrm{e}^{-\left(\mu/2m\right)t}}{\left(\mu^2+4m^2\omega^2\right)^{1/2}}\left[-\frac{\mu}{2m}\sinh\left(\frac{(\mu^2+4m^2\omega^2)^{1/2}}{2m}t\right)\right. \\ &\left. + \frac{\left(\mu^2+4m^2\omega^2\right)^{1/2}}{2m}\cosh\left(\frac{(\mu^2+4m^2\omega^2)^{1/2}}{2m}t\right)\right] \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.21 Φορτισμένο σωματίδιο φορτίου q κινείται μέσα σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ και ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ κάθετο στο $\boldsymbol{B}$. Δείξτε ότι οι προκύπτουσες εξισώσεις της κίνησης όταν κανείς πάρει τον άξονα Oz παράλληλο προς το $\boldsymbol{B}$ και τον άξονα Ox παράλληλο προς το $\boldsymbol{E}$ παίρνουν τη μορφή

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m\omega \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{x}}_1 = q\boldsymbol{E}_1, \qquad m\ddot{z} = 0$$

όπου

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \frac{qB}{m}, \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Βρείτε* τα $x(t), y(t), z(t)$ δεδομένου ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x} = v_0, \dot{y} = \dot{z} = 0$.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του φορτισμένου σωματιδίου περιγράφεται από το δεύτερο νόμο του Newton

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}\hat{\boldsymbol{x}} + m\ddot{y}\hat{\boldsymbol{y}} + m\ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}} = q\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} + qE\hat{\boldsymbol{x}} = (qB\dot{y} - qB\dot{x})\hat{\boldsymbol{x}} - qB\dot{x}\hat{\boldsymbol{y}}$$

Άρα έχουμε τρεις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} + qE \\ \Rightarrow m\ddot{x} - m\omega\dot{y} &= qE \qquad (2.56) \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} \\ \Rightarrow m\ddot{x} + m\omega\dot{x} &= 0 \qquad (2.57) \\ m\ddot{z} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{z} &= 0 \\ \Rightarrow z(t) &= 0 \end{aligned}$$

εφ' όσον οι αρχικές συνθήκες για το z είναι $z(0) = \dot{z} = 0$. Άρα η κίνηση του σωματιδίου θα είναι στο επίπεδο $x - y$.
Παρατηρούμε ότι μπορούμε να συνδυάσουμε τις εξισώσεις (2), (2) και να γράψουμε

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + m\omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m\omega\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{x}}_1 = q\boldsymbol{E}_1 \qquad (2.58)$$

όπου ο πίνακας $\boldsymbol{J}$ έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Παρατηρήστε ότι ο πίνακας $\boldsymbol{J}$ συμπεριφέρεται σαν τη φανταστική μονάδα στις δύο διαστάσεις, δηλαδή $\boldsymbol{J}^2 = -\boldsymbol{I}$, όπου*

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Από αυτό βγαίνει ότι ισχύει η σχέση Euler (όπως και στο μιγαδικό επίπεδο)

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}\phi} = \boldsymbol{I}\cos\phi + \boldsymbol{J}\sin\phi$$

με την ιδιότητα $\boldsymbol{J}^2 = -\boldsymbol{I}$. Συνεπώς θα ισχύει για τον αντίστροφο πίνακα, $\boldsymbol{J}^{-1}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}^2 &= -I \\
\Rightarrow \boldsymbol{J}\boldsymbol{J} &= -I \\
\Rightarrow \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}) &= -\boldsymbol{J}^{-1}I \\
\Rightarrow (\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{J})\boldsymbol{J} &= -\boldsymbol{J}^{-1} \\
\Rightarrow \boldsymbol{J} &= -\boldsymbol{J}^{-1}
\end{aligned}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα είναι το άθροισμα της λύσης, $\boldsymbol{x}_{\text{ομ}}$, της ομογενούς

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m\omega\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{x}}_1 = 0 \tag{2.59}$$

και της μερικής λύσης $\boldsymbol{x}_{\text{με}}$ που θα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{x}_{\text{με}} = \boldsymbol{A}t$$

όπου το $\boldsymbol{A}$ θα προσδιοριστεί με αντικατάσταση της $\boldsymbol{x}_{\text{με}}$ στην εξίσωση (2). Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
m\omega\boldsymbol{J}\boldsymbol{A} &= q\boldsymbol{E}_1 \\
\Rightarrow \boldsymbol{A} &= \frac{q}{m\omega}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{E}_1 \\
\Rightarrow \boldsymbol{x}_{\text{με}} &= \frac{q}{m\omega}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -qt/m\omega \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Η λύση της ομογενούς (2) θα βρεθεί με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της διαφορικής εξίσωσης

$$mD(D + \omega\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}_1 = 0$$

όπου ο τελεστής $D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι: $\rho_1 = 0, \rho_2 = -m\omega\boldsymbol{J}$. Συνεπώς η λύση της ομογενούς θα είναι

$$\boldsymbol{x}_{\text{ομ}} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{c}_1' + \mathrm{e}^{-\omega\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{c}_2'$$

όπου τα σταθερά διανύσματα $\boldsymbol{c}_1', \boldsymbol{c}_2'$

$$\boldsymbol{c}_1' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2' = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = \dot{z} = 0$. Επομένως η λύση της ομογενούς θα είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{\text{ομ}} &= I\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-\omega\boldsymbol{J}t}\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\
&= I\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\boldsymbol{I}\cos(\omega t) - \boldsymbol{J}\sin(\omega t))\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 + c_3\cos(\omega t) + c_4\sin(\omega t) \\ c_2 - c_3\sin(\omega t) + c_4\cos(\omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Άρα η γενική λύση θα είναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_{\text{ομ}} + \boldsymbol{x}_{\text{με}} = \begin{pmatrix} c_1 + c_3\cos(\omega t) + c_4\sin(\omega t) \\ c_2 - c_3\sin(\omega t) + c_4\cos(\omega t) - \dfrac{qE}{m\omega}t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = c_1 + c_3 \cos(\omega t) + c_4 \sin(\omega t) \\ \\ y(t) = c_2 - c_3 \sin(\omega t) + c_4 \cos \omega t - qEt/m\omega \end{cases}$$

Οι αρχικές συνθήκες $x(0) = y(0) = 0$ μας δίνουν

$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_2 + c_4 = 0$$

και οι $\dot{x} = v_0, \dot{y} = 0$ δίνουν

$$\omega c_4 = v_0, \qquad -c_3\omega = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

Άρα $c_1 = 0$, $c_4 = v_0/\omega$, $c_2 = -v_0/\omega$ και $c_3 = 0$ και τα $x(t)$, $y(t)$, είναι

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \left[\cos(\omega t) - 1\right] - \frac{qE}{m\omega} t$$

Πρόβλημα 2.22 Ένα φορτισμένο σωματίδιο φορτίου q και μάζας m κινείται μέσα σ' ένα ομογενές σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Να αποδείξετε ότι η θέση, $\boldsymbol{r}(t)$, του σωματιδίου κάτω από τις αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\omega} t - \frac{1}{\omega^3}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)] \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)(\cos(\omega t) - 1)$$

όπου $\boldsymbol{\omega} \equiv (q/m)\boldsymbol{B}$ είναι η κυκλοτρονική γωνιακή ταχύτητα.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{m}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v} \tag{2.60}$$

όπου η δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο σωματίδιο είναι η δύναμη Lorentz εξαρτώμενη από την ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ του. Ορίζουμε ένα νέο τελεστή, που εκφράζεται σαν το εξωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{\omega}$ με την οποιαδήποτε συνάρτηση που δρα πάνω της

$$\hat{L} \equiv (q/m)\boldsymbol{B}\times = \boldsymbol{\omega}\times$$

Παρατηρούμε ότι αυτός ο τελεστής $\hat{L}$ είναι γραμμικός εφ' όσον όταν δράσει σε μια γραμμική συνάρτηση $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ (όπου τα a_1, a_2 είναι δύο σταθεροί συντελεστές και $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ δύο τυχαία διανύσματα) θα έχουμε

$$\hat{L}(a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{\omega} \times (a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2) = a_1\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_2 = a_1\hat{L}\boldsymbol{v}_1 + a_2\hat{L}\boldsymbol{v}_2$$

Με την εισαγωγή αυτού του νέου τελεστή $\hat{L}$ η εξίσωση κίνησης (2) του φορτισμένου σωματιδίου θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\hat{L}\boldsymbol{v}$$

Η λύση για την ταχύτητα $\boldsymbol{v}(t)$ αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{-tL}\boldsymbol{v}_0$$

που μπορεί να επαληθευτεί με αντικατάσταση.
Μπορούμε να αναπτύξουμε σε μια σειρά Taylor τον εκθετικό τελεστή $\exp(-t\hat{L})$ ως εξής

$$\mathrm{e}^{-tL} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tL)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}\hat{L}^n$$

και συνεπώς η ταχύτητα θα είναι

$$\boldsymbol{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \hat{L}^n \boldsymbol{v}_0$$

Θα αναπτύξουμε τους διάφορους όρους $\hat{L}^n \boldsymbol{v}_0$ χρησιμοποιώντας ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

$$\begin{aligned}
\hat{L}^0 \boldsymbol{v}_0 &= \boldsymbol{v}_0 \\
\hat{L}^1 \boldsymbol{v}_0 &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 \\
\hat{L}^2 \boldsymbol{v}_0 &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{v}_0 \\
\hat{L}^3 \boldsymbol{v}_0 &= \hat{L}(\hat{L}^2 \boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{\omega} \times [(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{v}_0] = -\omega^2 \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι περιττές δυνάμεις του τελεστή $\hat{L}$ γράφονται

$$\hat{L}^{2k+1} \boldsymbol{v}_0 = (-\omega^2)^k (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots \tag{2.61}$$

και μπορεί να αποδειχτεί με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής: για $k = 0$ η σχέση $\hat{L}^1 \boldsymbol{v}_0 = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)$ είναι αληθής. Έστω ότι η σχέση (2) επαληθεύεται για ένα τυχαίο φυσικό αριθμό λ, άρα θα ισχύει

$$\hat{L}^{2\lambda+1} \boldsymbol{v}_0 = (-\omega^2)^\lambda (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)$$

Θα δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε τη σχέση (2) για $\lambda + 1$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\hat{L}^{2(\lambda+1)+1} \boldsymbol{v}_0 &= \hat{L}^2 (\hat{L}^{2\lambda+1} \boldsymbol{v}_0) = LL[(-\omega^2)^\lambda (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)] \\
&= (-\omega^2)^\lambda \hat{L}(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)) = (-\omega^2)^\lambda \hat{L}[(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{v}_0] \\
&= (-\omega^2)^{\lambda+1} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0
\end{aligned}$$

Άρα η σχέση (2) επαληθεύεται και για $\lambda + 1$. Συνεπώς θα ισχύει για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι για τις άρτιες δυνάμεις του τελεστή $\hat{L}$ θα ισχύει

$$\hat{L}^{2k} \boldsymbol{v}_0 = (-\omega^2)^{k-1} [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)], \quad \forall\, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Έχοντας τις άρτιες και περιττές δυνάμεις του τελεστή $\hat{L}$, η ταχύτητα $\boldsymbol{v}(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}_0 + \sum_{\text{άρτιος}} \frac{(-t)^n}{n!} \hat{L}^n \boldsymbol{v}_0 + \sum_{\text{περιττός}} \frac{(-t)^n}{n!} \hat{L}^n \boldsymbol{v}_0 \\
&= \boldsymbol{v}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^{2k}}{(2k)!} \hat{L}^{2k} \boldsymbol{v}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{L}^{2k+1} \boldsymbol{v}_0 \\
&= \boldsymbol{v}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^{2k}}{(2k)!} (-\omega^2)^{k-1} [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k+1}}{(2k+1)!} (-\omega^2)^k (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) \\
&= \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{\omega^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!} \right) [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)] - \frac{1}{\omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα αθροίσματα μας δίνουν

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k}}{(2k)!} = -\frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \ldots = \cos(\omega t) - 1$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = (\omega t) - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \ldots = \sin(\omega t)$$

Επομένως η ταχύτητα $\boldsymbol{v}(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)](\cos(\omega t) - 1) - \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)\sin(\omega t) \\
&= \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)] - \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)]\cos(\omega t) - \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)\sin(\omega t) \\
&= \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)]\cos(\omega t) - \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)\sin(\omega t) \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

εφ' όσον $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{v}_0$ και επομένως ο παρακάτω όρος θα είναι

$$\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)] = \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\omega}$$

Η θέση $\boldsymbol{r}(t)$ του σωματιδίου θα βρεθεί ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση της ταχύτητας (2)

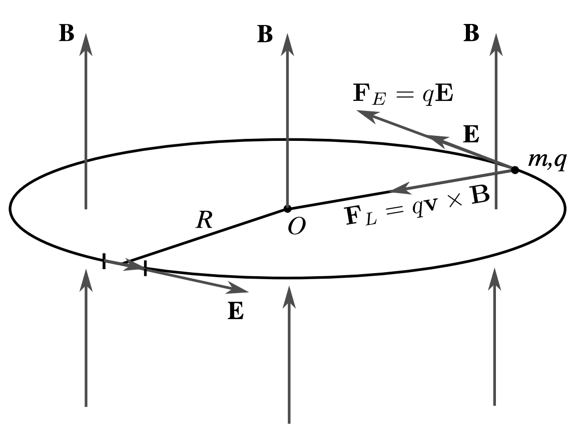
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{v}(t) \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0 + \int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{d}t \\
&= \boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{\omega} t - \frac{1}{\omega^3}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)]\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)(\cos(\omega t) - 1)
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.23 Σωματίδιο με δεδομένα φορτίο q και μάζα m κινείται σε κυκλική τροχιά, δεδομένης ακτίνας R μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Ισχύει για το μαγνητικό πεδίο B

$$B = b(r)a(t)$$

όπου t ο χρόνος και r η απόσταση από το κέντρο της τροχιάς. Ισχύει $a(0) = 0$ και $b(r) = b_0 + \beta r$ όπου b_0 και β σταθερές με την b_0 γνωστή. Να προσδιοριστεί το β συναρτήσει των γνωστών μεγεθών. Αφού υπολογίσετε το β να δείξτε ότι η μέση (στιγμιαία) τιμή του μαγνητικού πεδίου B στην επιφάνεια του κύκλου ακτίνας R είναι διπλάσια της στιγμιαίας τιμής του B στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R. Υποθέστε ότι η κίνηση είναι μη σχετικιστική.

Λύση:



Σχήμα 2.6

Όταν το σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, η μαγνητική ροή Φ που διαπερνά τον κύκλο ακτίνα R είναι

$$\Phi = \int_S B\mathrm{d}S = \int_0^R (b_0 + \beta r) 2\pi a(t) r\mathrm{d}r = \pi R^2 \left(b_0 + \frac{2}{3}\beta R\right) a(t)$$

και επομένως το μέτρο της επαγόμενη Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) από το Νόμο του Faraday θα είναι

$$\text{ΗΕΔ} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \pi R^2 \left(b_0 + \frac{2}{3}\beta R \right) \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

Άρα το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου είναι

$$\text{ΗΕΔ} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int E \mathrm{d}l = E \int \mathrm{d}l = E 2\pi R$$

και με τη βοήθεια της ΗΕΔ θα έχουμε

$$\text{ΗΕΔ} = \pi R^2 \left(b_0 + \frac{2}{3}\beta R \right) \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = E 2\pi R$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{R}{2} \left(b_0 + \frac{2}{3}\beta R \right) \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

Αυτό το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό για μια ακτινική απόσταση r.
Η ηλεκτρική δύναμη $F_E = qE$ είναι η δύναμη που κρατά το σωματίδιο σε σταθερή κυκλική τροχιά με επιτρόχια επιτάχυνση που είναι

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qE$$

$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{qR}{2} \left(b_0 + \frac{2}{3}\beta R \right) \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \tag{2.63}$$

Επιπλέον η κεντρομόλος επιτάχυνση θα είναι ίση με τη δύναμη Lorentz, $\boldsymbol{F}_L = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \Rightarrow F_L = qvB$ (το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του κύκλου που διαγράφεται από το φορτισμένο σωματίδιο)

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} &= qvB = qvb(r)a(t) \\ \Rightarrow mv &= q(b_0 + \beta R)aR \\ \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= q(b_0 + \beta R)R\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Από τις εξισώσεις (2) και (2) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{qR}{2}(b_0 + \frac{2}{3}\beta R)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= q(b_0 + \beta R)R\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(b_0 + \frac{2}{3}\beta R) &= b_0 + \beta R \\ \Rightarrow \beta &= -\frac{3}{4}\frac{b_0}{R} \end{aligned}$$

Η μέση (στιγμιαία) τιμή του B στην επιφάνεια του κύκλου ακτίνας R είναι

$$\langle B \rangle = \frac{\int B \mathrm{d}S}{\pi R^2} = \int_0^R \frac{(b_0 + \beta r)a 2\pi r}{\pi R^2} \mathrm{d}r = 2a \left(\frac{b_0}{2} + \beta \frac{R}{3} \right)$$

και για $\beta = -3b_0/4R$ η μέση τιμή θα είναι

$$\langle B \rangle = \frac{ab_0}{2}$$

Η στιγμιαία τιμή του B στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R είναι

$$B(R) = (b_0 + \beta R)a = \left(b_0 - \frac{3}{4}b_0 \right) a = \frac{ab_0}{4}$$

Άρα ισχύει

$$\langle B \rangle = 2B(R)$$

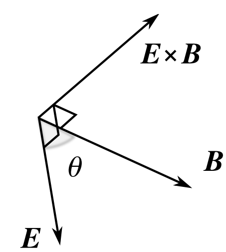
Πρόβλημα 2.24 Θεωρήστε ένα ηλεκτρόνιο φορτίου $q = -e$ και μάζας m, το οποίο κινείται σε ένα χώρο που περιέχει αέριο και υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού, $\boldsymbol{E}$, και ενός μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$, τα οποία σχηματίζουν τυχαία γωνία θ μεταξύ τους, δηλαδή $\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} = \cos\theta$, $|\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{B}}| = \sin\theta$, όπου $\hat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/|\boldsymbol{E}|$, $\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$, είναι τα μοναδιαία διανύσματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Η κίνηση του ηλεκτρονίου περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\left(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) + m\boldsymbol{A}(t) \tag{2.65}$$

όπου ο παράγοντας $\boldsymbol{A}(t)$ περιγράφει την επιβράδυνση του ηλεκτρονίου μέσα στο αέριο λόγω των συγκρούσεών του με τα μόρια του αερίου. Έστω ότι αυτή η επιβράδυνση περιγράφεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{A}(t) = -\frac{\boldsymbol{v}(t)}{\tau}$$

όπου η σταθερά τ φέρει μονάδες χρόνου (θα την ονομάζουμε χαρακτηριστικό χρόνο) και συσχετίζεται με το μέσο χρόνο ανάμεσα σε δύο συγκρούσεις του ηλεκτρονίου με τα μόρια του αερίου.



Έχει παρατηρηθεί ότι μετά από κάποιο χρόνο, το ηλεκτρόνιο αποκτά μια σταθερή ταχύτητα ολίσθησης, $\boldsymbol{v}_D \equiv \boldsymbol{v}$, κατά μήκος μιας ευθείας η οποία σχηματίζει μια γωνία α ως προς το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$. Αυτή η γωνία, α, ονομάζεται γωνία Lorentz.
Λαμβάνοντας τη μόνιμη κατάσταση, $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = 0$, στην εξίσωση (2.24),

(α) να δείξετε ότι η ταχύτητα ολίσθησης του ηλεκτρονίου δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{v}_D = -\frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\left[\hat{\boldsymbol{E}} - (\omega\tau)(\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{B}}) + (\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}})\hat{\boldsymbol{B}}\right]$$

όπου μ και ω ορίζονται ως

$$\mu \equiv \frac{e}{m}\tau, \qquad \omega \equiv \frac{e}{m}B$$

και ονομάζονται ευκινησία και κυκλοτρονική συχνότητα του ηλεκτρονίου, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας ολίσθησης αναλύεται σε τρεις συνιστώσες, μία παράλληλη κατά μήκος του ηλεκτρικού πεδίου, μία κατά μήκος του διανύσματος $\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{B}}$ που είναι κάθετο στα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$ και μία κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου. Όταν ο όρος $\omega\tau \simeq 0$, δηλαδή για χαμηλά μαγνητικά πεδία ή μέσους χαρακτηριστικούς χρόνους τ, η ταχύτητα ολίσθησης ακολουθεί το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$. Όταν όμως $\omega\tau \gg 1$, το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται γύρω από την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, αρκεί $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \neq 0$.

(β) να δείξετε ότι το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης $v_D = |\boldsymbol{v}_D|$ δίνεται από τον τύπο

$$v_D = \mu E\sqrt{\frac{1+(\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}})^2(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}}$$

και οι συνιστώσες της, η παράλληλη στο $\boldsymbol{E}$ και η κάθετη στο $\boldsymbol{E}$, $v_{D\perp}$, είναι $v_{D\parallel}$,

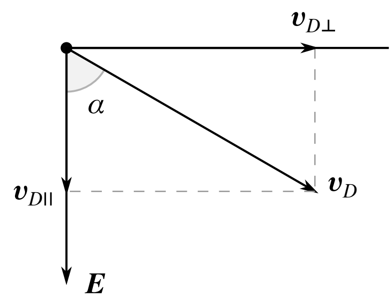
$$v_{D\parallel} = \mu E\frac{1+(\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}})^2(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}, \qquad v_{D\perp} = \mu E\omega\tau\frac{|\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{B}}|\sqrt{1+(\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}})^2(\omega\tau)^2}}{1+(\omega\tau)^2}$$

Επίσης, να δείξετε ότι η γωνία Lorentz, α, θα είναι

$$\tan\alpha = \frac{|\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{B}}|}{\sqrt{1+(\hat{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{B}})^2(\omega\tau)}}\omega\tau$$

(γ) Αν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους, $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ και $|\boldsymbol{E} \times \hat{\boldsymbol{B}}| = 1$, το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης και η γωνία Lorentz α θα είναι

$$v_D = \frac{\mu E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \qquad \tan\alpha = \omega\tau$$



Σχήμα 2.7

Λύση:

(α)
Στη μόνιμη κατάσταση η γενική έκφραση της ταχύτητας ολίσθησης είναι $\boldsymbol{v}_D = \langle \boldsymbol{v} \rangle$ μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση

$$\frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}_D - e\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}_D = -e\boldsymbol{E} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{E} - \frac{m}{e\tau}\boldsymbol{v}_D \tag{2.66}$$

Αν λάβουμε το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο του μαγνητικού πεδίου με την εξίσωση (2) θα έχουμε

$$\frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}_D\cdot\boldsymbol{B} - \cancelto{0}{e(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}_D)\cdot\boldsymbol{B}} = -e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{v}_D\cdot\boldsymbol{B} = -\frac{e\tau}{m}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \tag{2.67}$$

$$\frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B} - e\underbrace{(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}_D)\times\boldsymbol{B}}_{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}_D)\boldsymbol{B}-B^2\boldsymbol{v}_D} = -e\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{2.68}$$

Αν εισάγουμε τις εξισώσεις (2) και (2) στην εξίδωση (2), θα έχουμε

$$-\boldsymbol{v}_D\left(\frac{m^2}{\tau^2 e} + eB^2\right) = -e\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} + \frac{m}{\tau}\boldsymbol{E} + \frac{e^2\tau}{m}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$$

ή

$$-\boldsymbol{v}_D\frac{m^2}{\tau^2 e}\left[1+(\omega\tau)^2\right] = -e\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} + \frac{m}{\tau}\boldsymbol{E} + \frac{e^2\tau}{m}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B} \tag{2.69}$$

σινςε $m^2/\tau^2 e + eB^2 = m^2/\tau^2 e + e\omega^2 m^2/e^2 = (m^2/\tau^2 e)[1+(\omega\tau)^2]$. Φιναλλψ, Εχ. (2) ωιλλ ρεαδ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_D &= \frac{e^2\tau^2}{m^2}\frac{EB(\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}})}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{m}{\tau}\frac{\tau^2 e}{m^2}\frac{E\hat{\boldsymbol{E}}}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{e^2\tau}{m}\frac{e\tau^2}{m^2}EB^2\frac{(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})\hat{\boldsymbol{B}}}{1+(\omega\tau)^2}\\ \boldsymbol{v}_D &= \frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\left[(\omega\tau)(\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}) - \hat{\boldsymbol{E}} - (\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})\hat{\boldsymbol{B}}\right], \qquad \hat{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{E}}{E}, \quad \hat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{B}}{B}\end{aligned} \tag{2.70}$$

όπου οι διάφορες σταθερές θα είναι

$$\frac{e^2\tau^2}{m^2}EB = \mu E\omega\tau, \qquad \frac{\tau e}{m} = \mu E, \qquad \frac{e^2\tau}{m}\frac{e\tau^2}{m^2}EB^2 = \frac{e}{m}\tau E\frac{e^2\tau^2}{m^2}B^2 = \mu E(\omega\tau)^2$$

(β)
Το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης $\boldsymbol{v}_D$ θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned}v_D^2 = \boldsymbol{v}_D\cdot\boldsymbol{v}_D &= \left(\frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\right)^2\left[(\omega\tau)(\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}) - \hat{\boldsymbol{E}} - (\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})\hat{\boldsymbol{B}}\right]\cdot\left[(\omega\tau)(\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}) - \hat{\boldsymbol{E}} - (\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})\hat{\boldsymbol{B}}\right]\\ &= \left(\frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\right)^2\left[1 + 2(\omega\tau)^2\left(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\right)^2 + (\omega\tau)^2\left(\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right)^2 + (\omega\tau)^4\left(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι η γωνία μεταξύ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι θ, $\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}} = \cos\theta$, $\left|\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right| = \sin\theta$, τότε η παραπάνω έκφραση της ταχύτητας θα λάβει τη μορφή

$$v_D^2 = \boldsymbol{v}_D\cdot\boldsymbol{v}_D = \left(\frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\right)^2\left[1+2(\omega\tau)^2\cos^2\theta + \underbrace{(\omega\tau)^2\sin^2\theta}_{(\omega\tau)^2(1-\cos^2\theta)} + (\omega\tau)^4\cos^2\theta\right]$$

$$= \left(\frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\right)^2\left[1+(\omega\tau)^2\cos^2\theta + (\omega\tau)^2 + (\omega\tau)^4\cos^2\theta\right]$$

$$= \left(\frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\right)^2\left[(1+(\omega\tau)^2) + (1+(\omega\tau)^2)(\omega\tau)^2\cos^2\theta\right] = \frac{(\mu E)^2}{1+(\omega\tau)^2}\left[1+(\omega\tau)^2\cos^2\theta\right]$$

$$\Rightarrow v_D = \mu E\sqrt{\frac{1+(\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})^2}{1+(\omega\tau)^2}} \tag{2.71}$$

Η προβολή της ταχύτητας, $\boldsymbol{v}_D$, στο ηλεκτρικό πεδίο, $\boldsymbol{E}$, μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια της σχέσης (2), ως ακολούθως

$$v_{D_\parallel} = \boldsymbol{v}_D\cdot\hat{\boldsymbol{E}} = \frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\left[1+(\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})^2\right]$$

ενώ η συνιστώσα της ταχύτητας ολίσθησης κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι

$$v_{D_\perp}^2 = v_D^2 - v_{D_\parallel}^2 = (\mu E)^2\frac{1+(\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})^2}{1+(\omega\tau)^2} - \left(\frac{\mu E}{1+(\omega\tau)^2}\right)^2\left[1+(\omega\tau)^2(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})^2\right]^2$$

$$= \frac{(\mu E)^2}{1+(\omega\tau)^2}\left(1+(\omega\tau)^2\left(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\right)^2\right)\frac{(\omega\tau)^2\overbrace{\left(1-\left(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\right)^2\right)}^{1-\cos^2\theta=\sin^2\theta=\left|\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right|^2}}{1+(\omega\tau)^2}$$

$$\Rightarrow v_{D_\perp} = \mu E(\omega\tau)\frac{\left|\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right|\sqrt{1+(\omega\tau)^2\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}}}{1+(\omega\tau)^2}$$

Επομένως η γωνία Lorentz, α, ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και την ταχύτητα θα είναι

$$\tan\alpha = \frac{v_{D_\perp}}{v_{D_\parallel}} = \omega\tau\frac{\left|\hat{\boldsymbol{E}}\times\hat{\boldsymbol{B}}\right|}{\sqrt{1+(\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})^2(\omega\tau)^2}} \tag{2.72}$$

(γ)
Από τις σχέσεις (2) και (2) το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης και η γωνία Lorentz α θα είναι

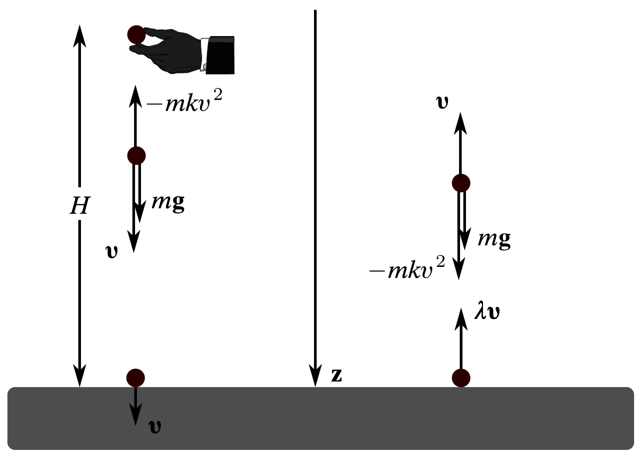
$$v_D = \frac{\mu E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \qquad \tan\alpha = \omega\tau$$

αφού το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ και $|\boldsymbol{E}\times\hat{\boldsymbol{B}}| = 1$,

Πρόβλημα 2.25 Σωματίδιο μάζας m αφήνεται όπου αρχικά ηρεμεί από ύψος H πάνω από οριζόντιο έδαφος και πέφτει υπό την επίδραση του βάρους του μέσα σε μέσο που προκαλεί αντίσταση μέτρου mkv^2, όπου k θετική σταθερά και v η ταχύτητα του. Το σωματίδιο χτυπά στο έδαφος και αναπηδά κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα λ φορές την ταχύτητα που είχε ακριβώς πριν έλθει σε επαφή με το έδαφος. Αν h είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σωματίδιο. Να δείξετε ότι

$$h = \frac{1}{2k}\ln\left[1+\lambda^2\left(1-\mathrm{e}^{-2kH}\right)\right]$$

Λύση:



Σχήμα 2.8

Θεωρούμε ότι ο άξονας των z είναι θετικός προς τα κάτω. Καθώς το σωματίδιο πέφτει η εξίσωση κίνησης δίνεται από τον δεύτερο νόμο του Newton

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F_{\text{ολ}} = mg - mkv^2 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\left(1 - \frac{k}{g}v^2\right) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= g\left(1 - \frac{k}{g}v^2\right) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}v &= g\left(1 - \frac{k}{g}v^2\right) \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}z} &= g\left(1 - \frac{k}{g}v^2\right) \\
\Rightarrow \int_0^V \frac{\mathrm{d}v^2}{1 - \frac{k}{g}v^2} &= 2g\int_0^H \mathrm{d}z \\
\Rightarrow \frac{g}{k}\int_0^{kV^2/g} \frac{\mathrm{d}\omega}{1-\omega} &= 2gH
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

όπου V είναι η ταχύτητα όταν το σωματίδιο κτυπά το έδαφος. Επιπλέον η αντικατάσταση $\omega = kv^2/g$ μας έδωσε το τελευταίο ολοκλήρωμα.
Η εξίσωση (2) γράφεται ως εξής

$$
\begin{aligned}
\int_0^{kV^2/g} \frac{\mathrm{d}(\omega-1)}{\omega-1} &= -2kH \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{(k/g)V^2 - 1}{-1}\right) &= -2Hk \\
\Rightarrow \frac{k}{g}V^2 - 1 &= -\mathrm{e}^{-2kH} \\
\Rightarrow V^2 &= \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2kH}\right)
\end{aligned}
$$

Το σωματίδιο αναπηδά από το έδαφος με αρχική ταχύτητα

$$
\lambda V = \lambda\sqrt{\frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2kH}\right)}
$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται όταν το σωματίδιο κινείται προς το πάνω είναι $\boldsymbol{F} = -(mg + mkv^2)\hat{\boldsymbol{z}}$ όταν v είναι το μέτρο της ταχύτητας του, και επομένως η εξίσωση κίνησης του θα είναι

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -mg - mkv^2 \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}v &= -g\left(1 + \frac{k}{g}v^2\right) \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v^2}{1 + (k/g)v^2} &= -2g\mathrm{d}z \\ \Rightarrow \frac{g}{k}\int_{k\lambda^2V^2/g}^{0} \frac{\mathrm{d}\omega}{1+\omega} &= -2g\int_0^h \mathrm{d}z \end{aligned}$$

όπου $\omega = kv^2/g \to \mathrm{d}v^2 = g\mathrm{d}\omega/k$ και h είναι το ύψος που το σώμα θα αναπηδήσει. Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_{k\lambda^2V^2/g}^{0} \frac{\mathrm{d}(\omega+1)}{1+\omega} &= -2kh \\ \Rightarrow -\ln\left(1 + \frac{\lambda^2 k}{g}V^2\right) &= -2kh \\ \Rightarrow h &= \frac{1}{2k}\ln\left[1 + \frac{k}{g}\lambda^2\frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2kH}\right)\right] \\ \Rightarrow h &= \frac{1}{2k}\ln\left[1 + \lambda^2\left(1 - \mathrm{e}^{-2kH}\right)\right] \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.26 Σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0. Το σωματίδιο δέχεται ολική αντίδραση μέτρου $mkv^2 + mkav$, όπου v είναι το μέτρο της ταχύτητας του σε τυχούσα χρονική στιγμή και $k > 0, a > 0$ σταθερές.

(α) Να υπολογίσετε την απόσταση, s, που διανύει το σωματίδιο μέχρις ότου ηρεμήσει.

(β) Να δείξετε ότι ο χρόνος που απαιτείται ώστε η ταχύτητα του σωματιδίου να γίνει $v_0/2$ είναι

$$t_{1/2} = \frac{1}{ka}\ln\left(\frac{v_0 + 2a}{v_0 + a}\right)$$

Λύση:

(α) Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου εκφράζεται μέσω του δευτέρου νόμου του Newton με δύναμη αντίστασης $F = -(mkv^2 + mkav)$ και θα είναι

$$\begin{aligned} F &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow -mkv(v+a) &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow -kv(v+a) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v+a} &= -k\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}v}{v+a} &= -k\int_0^s \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{v_0+a}\right) &= -ks \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_0 + a}{a}\right)$$

όπου s είναι η απόσταση που το σωματίδιο διανύει ώστε να ηρεμήσει $v = 0$.

(β) Από την εξίσωση κίνησης (2) ξαναπαίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -kv(v+a) \\
\Rightarrow \int_{v_0}^{v_0/2} \frac{\mathrm{d}v}{v(v+a)} &= -k\int_0^{t_{1/2}} \mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int_{v_0}^{v_0/2} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+a}\right)\frac{\mathrm{d}v}{a} &= -kt_{1/2} \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v+a}\right)\Bigg|_{v_0}^{v_0/2} &= -kat_{1/2} \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{v_0/2}{v_0/2+a}\right) - \ln\left(\frac{v_0}{v_0+a}\right) &= -kat_{1/2} \\
\Rightarrow t_{1/2} &= \frac{1}{ka}\ln\left(\frac{v_0/(v_0+a)}{\frac{v_0/2}{(v_0/2+a)}}\right) \\
\Rightarrow t_{1/2} &= \frac{1}{ka}\ln\left(\frac{v_0+2a}{v_0+a}\right)
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.27 Υποθέτουμε ελεύθερη πτώση υλικού σημείου μάζας m στον αέρα με αντίσταση αέρος της οποίας το μέτρο είναι της μορφής mav^2 όπου $a > 0$ σταθερά. Πάρτε ως θετική φορά για την ταχύτητα την κατακόρυφο προς τα κάτω και δείξετε ότι η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \tanh\left(\sqrt{ag}t\right)$$

Υπάρχει οριακή ταχύτητα όταν ο χρόνος $t \to +\infty$;

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = -mav^2 + mg$$

όπου η ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το αλγεβρικό άθροισμα της αντίστασης του αέρα $-mav^2$ και της δύναμης της βαρύτητας mg. Επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\begin{aligned}
-av^2 + g &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow g\left(1 - \frac{a}{g}v^2\right) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow g\int_0^t \mathrm{d}t &= \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{1-(a/g)v^2} \\
\Rightarrow gt &= \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1+\sqrt{a/g}\,v)(1-\sqrt{a/g}\,v)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^v \left(\frac{\mathrm{d}v}{(1-\sqrt{a/g}\,v)} + \frac{\mathrm{d}v}{(1+\sqrt{a/g}\,v)}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1-\sqrt{a/g}\,v)} + \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1+\sqrt{a/g}\,v)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\left[\int_0^{\sqrt{a/g}v} \frac{\mathrm{d}\omega}{1-\omega} + \int_0^{\sqrt{a/g}v} \frac{\mathrm{d}\omega}{1+\omega}\right]
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η αντικατάσταση $\sqrt{a/g}v = \omega \Rightarrow \mathrm{d}v = \mathrm{d}\omega\sqrt{g/a}$. Η εξίσωση (2) θα γίνει

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\left[-\ln\left(-\sqrt{\frac{a}{g}}\,v+1\right)+\ln\left(\sqrt{\frac{a}{g}}\,v+1\right)\right] &= gt \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a/g}\,v+1}{-\sqrt{a/g}\,v+1}\right) &= gt \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{a/g}\,v+1}{-\sqrt{a/g}\,v+1}\right) &= 2\sqrt{ag}\,t \\
\Rightarrow \frac{\sqrt{a/g}\,v+1}{-\sqrt{a/g}\,v+1} &= \mathrm{e}^{2\sqrt{ag}\,t}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{ag}\,t}-1}{\mathrm{e}^{2\sqrt{ag}\,t}+1} = \sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{ag}\,t}-\mathrm{e}^{-\sqrt{ag}\,t}}{\mathrm{e}^{\sqrt{ag}\,t}+\mathrm{e}^{-\sqrt{ag}\,t}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\sinh(\sqrt{ag}\,t)}{\cosh(\sqrt{ag}\,t)} = \sqrt{\frac{g}{a}}\tanh(\sqrt{ag}\,t)
$$

για $t \to +\infty$ το $\tanh(\sqrt{ag}\,t) \to 1$, επομένως η οριακή ταχύτητα θα είναι

$$
v_{\text{ορ}} = \sqrt{\frac{g}{a}}
$$

Πρόβλημα 2.28 Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης $\boldsymbol{F} = -\frac{k}{x^3}\hat{\boldsymbol{x}}$, $k > 0$. Αν το σωματίδιο ξεκινάει με μηδενική αρχική ταχύτητα από το σημείο $x_0 > 0$, να δείξετε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να φτάσει στην αρχή του άξονα $(x = 0)$ είναι

$$
t_0 = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}
$$

Λύση:

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{k}{x^3} \\
\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v} &= -\frac{k}{x^3} \\
\Rightarrow m\int_0^v v\mathrm{d}v &= -\int_{x_0}^x \frac{k}{x^3}\mathrm{d}x \\
\Rightarrow v^2 &= \frac{k}{m}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
v = -\sqrt{\frac{k}{mx_0^2}}\frac{\sqrt{x_0^2-x^2}}{x} \tag{2.76}
$$

Θα παρατηρήσατε ότι λάβαμε το αρνητικό πρόσημο στην τετραγωνική ρίζα, καθότι το σωματίδιο κινείται προς την αρχή του άξονα x. Ολοκληρώνοντας την (2) θα έχουμε

$$\int_{x_0}^{x}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2-x^2}}=-\sqrt{\frac{k}{mx_0^2}}\int_0^t\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow\sqrt{x_0^2-x^2}=\sqrt{\frac{k}{mx_0^2}}t$$
$$\Rightarrow x=x_0\sqrt{1-\frac{k}{mx_0^4}t^2},\qquad \text{για } t\leqq\sqrt{\frac{mx_0^4}{k}} \tag{2.77}$$

Εδώ λάβαμε τη θετική τετραγωνική ρίζα, διότι το σωματίδιο βρίσκεται στα δεξιά της αρχής του άξονα x. Από τη σχέση για (2) για $x=0$ έπεται

$$t_0=\sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}$$

Πρόβλημα 2.29 Να επαναλάβετε το πρόβλημα 2.28 για δύναμη της μορφής

$$\boldsymbol{F}=-\frac{k}{x^2}\hat{\boldsymbol{x}},$$

υποθέτοντας ως αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0>0$ και $v(0)=v_0>0$. Να βρείτε τη θέση $x(t)$ και την ταχύτητα $v(t)$ στην περίπτωση που έχουμε $v_0=\sqrt{2k/mx_0}$.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$m\frac{v}{t}=-\frac{k}{x^2}$$
$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v}=-\frac{k}{x^2}$$
$$\Rightarrow\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=-\frac{k}{m}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
$$\Rightarrow v=\pm v_0\left[1+\frac{2k}{mv_0^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)\right]^{1/2} \tag{2.78}$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (2) ότι η οριακή ταχύτητα (για $x\to\infty$) του σωματιδίου θα είναι

$$v_{\text{ορ}}=v_0\left[1-\frac{2k}{mx_0v_0^2}\right]^{1/2}$$

και λαμβάνει πραγματική τιμή στην περίπτωση που ισχύει

$$v_0\geqq\sqrt{\frac{2k}{mx_0}}$$

Αν λάβουμε το $v_0=\sqrt{2k/mx_0}$, τότε έπεται από τη σχέση (2)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\sqrt{\frac{x_0}{x}}\Rightarrow\int_0^x\sqrt{x}\mathrm{d}x=v_0\sqrt{x_0}\int_0^t\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow x(t)=x_0\left(1+\frac{3v_0}{2x_0}t\right)^{2/3} \tag{2.79}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (2) θα έχουμε την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου

$$v(t) = v_0 \left(1 + \frac{3v_0}{2x_0}t\right)^{-1/3}$$

Πρόβλημα 2.30 Μια δύναμη $F = -F_0 \mathrm{e}^{-x/\lambda}$, ($F_0 > 0,\ \lambda > 0$) δρα σε σωματίδιο μάζας m, το οποίο βρίσκεται στη θέση $x(0) = 0$ με ταχύτητα $v(0) = v_0 > 0$. Να βρείτε την ταχύτητα $v(x)$ ως συνάρτηση της θέσης x.

Λύση:

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έπεται

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -F_0 \mathrm{e}^{-x/\lambda} \\ \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v} &= -F_0 \mathrm{e}^{-x/\lambda} \\ \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v &= -\frac{F_0}{m}\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-x/\lambda}\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) &= \frac{F_0}{m}\lambda\left(\mathrm{e}^{-x/\lambda} - 1\right) \\ \Rightarrow v(x) &= \pm\left[v_0^2 + \frac{2F_0\lambda}{m}\left(\mathrm{e}^{-x/\lambda} - 1\right)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

όπου το θετικό πρόσημο ισχύει στην περίπτωση που το σωματίδιο κινείται προς τα θετικά του άξονα x. Η οριική ταχύτητά του θα είναι

$$v(\infty) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2F_0\lambda}{m}}$$

για

$$v_0 \geqq \sqrt{\frac{2F_0\lambda}{m}}$$

Πρόβλημα 2.31 Η πρώτη παράγωγος της επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}$ αναφέρεται ως υπερεπιτάχυνση-«jerk»

$$\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^3}$$

Θεωρήστε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με σταθερή υπερεπιτάχυνση-σ«jerk» $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0$. Να βρείτε τη θέση $\boldsymbol{x}(t)$, υποθέτοντας τις αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}_0$.

Λύση:

Από τον ορισμό της υπερεπιτάχυνσησ-«jerk» θα έχουμε

$$\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_{\boldsymbol{a}_0}^{\boldsymbol{a}} \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_0^t \boldsymbol{j}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{j}_0 t \tag{2.80}$$

Η επιτάχυνση θα είναι

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

$$\xRightarrow{(2)} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}_0 t^2 \tag{2.81}$$

Η ταχύτητα μας δίνει

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (2) λαμβάνουμε τη θέση $\boldsymbol{x}(t)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 t^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{j}_0 t^3$$

Πρόβλημα 2.32 Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m (υο οποίο κινείται σε μια διάσταση) στο οποίο ασκείται μια δύναμη της μορφής $F(t) + m\tau j$, όπου j είναι η υπερεπιτάχυνση και $F(t)$ τυχαία συνάρτηση του χρόνου με μονάδες δύναμης, $\tau > 0$ με μονάδες χρόνου. Να δείξετε η επιτάχυνση $a(t)$ εκφράζεται ως ακολούθως

$$a = \frac{1}{m\tau}\int_0^t \mathrm{e}^{-t'/\tau} F(t')\mathrm{d}t'$$

αν θέλουμε να λάβουμε μια πεπερασμένη τιμή για την επιτάχυνση.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου θα είναι

$$ma = F(t) + m\tau\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη με $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ θα λάβουμε

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-t/\tau}}{m\tau}F(t) \\
&\Rightarrow \int_{a_0}^{a\mathrm{e}^{-t/\tau}} \mathrm{d}\left(a\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = -\frac{1}{m\tau}\int_0^t \mathrm{e}^{-t'/\tau}F(t')\mathrm{d}t' \\
&\Rightarrow a(t) = \mathrm{e}^{t/\tau}\left[a_0 - \frac{1}{m\tau}\int_0^t \mathrm{e}^{-t'/\tau}F(t')\mathrm{d}t'\right] \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $a(t) \to \infty$ για $t \to \infty$. Επομένως για να λάβουμε πεπερασμένη τιμή στην επιτάχυνση θα πρέπει ο όρος της παρένθεσης της σχέσης (2) να μηδενίζεται, δηλαδή

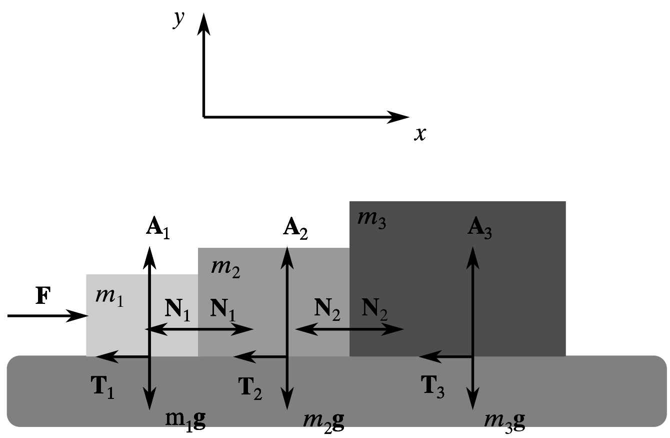
$$a_0 = \frac{1}{m\tau}\int_0^t \mathrm{e}^{-t'/\tau}F(t')\mathrm{d}t'$$

Πρόβλημα 2.33 Τρία σώματα με μάζες m_1, m_2, m_3 αντίστοιχα είναι τοποθετημένα σε οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.9). Μια δύναμη μέτρου F ασκείται στο αριστερό σώμα. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το μεσαίο σώμα m_2 στο αριστερό m_1 και στο δεξιό σώμα m_3.

Λύση:

Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα m_1 είναι

- η εξωτερική δύναμη με μέτρο F
- η δύναμη του βάρους $B_1 = m_1 g$
- η δύναμη της τριβής $T_1 = \mu A_1$
- η κάθετος δύναμης του επιπέδου A_1



Σχήμα 2.9

- η δύναμη N_1 που ασκεί το σώμα m_2

όπου μ είναι το συντελεστής στατικής τριβής της επιφάνειας. Από την ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα m_1 θα έχουμε

$$F - T_1 - N_1 = 0, \quad \text{όπου} \quad T_1 = \mu A_1, A_1 = B_1 = m_1 g$$

$$\Rightarrow F - \mu m_1 g - N_1 = 0 \tag{2.83}$$

Στο σώμα m_2 ασκούνται οι δυνάμεις

- η δύναμη του βάρους $B_2 = m_2 g$
- η δύναμη της τριβής $T_2 = \mu A_2$
- η κάθετος δύναμης του επιπέδου A_2
- η δύναμη N_1 που ασκεί το σώμα m_1
- η δύναμη N_2 που ασκεί το σώμα m_3

όπου από τον τρίτο νόμο του Newton η δύναμη που ασκεί το σώμα m_1 στο σώμα m_2 είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί το σώμα m_2 στο m_1.
Από την ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα m_2 θα έχουμε

$$N_1 - T_2 - N_2 = 0, \quad \text{όπου} \quad T_2 = \mu A_2, A_2 = B_2 = m_2 g$$

$$\Rightarrow N_1 - \mu m_2 g - N_2 = 0 \tag{2.84}$$

Στο σώμα m_3 ασκούνται οι δυνάμεις

- η δύναμη του βάρους $B_3 = m_3 g$
- η δύναμη της τριβής $T_3 = \mu A_3$
- η κάθετος δύναμης του επιπέδου A_3
- η δύναμη μέτρου N_2 που ασκεί το σώμα m_2

όπου από τον τρίτο νόμο του Newton η δύναμη που ασκεί το σώμα m_2 στο σώμα m_3 είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί το σώμα m_3 στο m_2.
Από την ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα m_3 θα έχουμε

$$N_2 - T_3 = 0, \quad \text{όπου} \quad T_3 = \mu A_3, A_3 = B_3 = m_3 g$$

$$\Rightarrow N_2 - \mu m_3 g = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = \mu m_3 g \tag{2.85}$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση (2) με την (2) έχουμε

$$N_1 = \mu g(m_2 + m_3) \tag{2.86}$$

και αν αντικαταστήσουμε αυτήν τη σχέση στην εξίσωση (2) θα έχουμε για το συντελεστή τριβής

$$F = \mu m_1 g + \mu g(m_2 + m_3)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{F}{g(m_1 + m_2 + m_3)} \tag{2.87}$$

Συνεπώς οι δυνάμεις N_1, N_2 θα δίνονται από τις σχέσεις (2) και (2) αφού αντικαταστήσουμε το συντελεστή τριβής από τη σχέση (2)

$$N_1 = F\frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad \text{και} \qquad N_2 = F\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Πρόβλημα 2.34 Σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα και υφίσταται επιβράδυνση $a = -kv^n$ όπου v η ταχύτητα του. Δείξτε ότι αν $n < 1$ το σωματίδιο θα ηρεμήσει σε απόσταση

$$x = \frac{v_0^{2-n}}{k(2-n)}$$

από το σημείο εκκίνησης σε χρόνο

$$t = \frac{v_0^{1-n}}{k(1-n)}$$

όπου v_0 η αρχική του ταχύτητα.

Λύση:

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης θα έχουμε

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow -kv^n &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \\
\Rightarrow -k\int_x^0 \mathrm{d}x &= \int_0^{v_0} \frac{\mathrm{d}v}{v^{n-1}} \\
\Rightarrow -\frac{v_0^{2-n}}{2-n} &= -kx \\
\Rightarrow x &= \frac{v_0^{2-n}}{k(2-n)}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Ο χρόνος t που το το σωματίδιο θα ηρεμήσει μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια της σχέσης (2)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -kv^n \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v^n} &= -k\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int_{v_0}^0 \frac{\mathrm{d}v}{v^n} &= -k\int_0^t \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^{1-n}}{1-n} = kt$$
$$\Rightarrow t = \frac{v_0^{1-n}}{k(1-n)}$$

Πρόβλημα 2.35 Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακόρυφα λόγω της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας η ακτίνα της r αυξάνει με ρυθμό $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \lambda r$ όπου λ είναι μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι r_0 και η αρχική της μάζας m_0.

(α) Βρείτε τη μάζα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Βρείτε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

(γ) Δείξτε ότι η ταχύτητα της σταγόνας τείνει προς μια οριακή τιμή, ίση με $g/3\lambda$.

Λύση:

(α) Η ακτίνα, $r(t)$, της σταγόνας μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \lambda r$$
$$\Rightarrow \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \lambda \int_0^t \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \lambda t$$
$$\Rightarrow r(t) = r_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

Αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα και ο όγκος της σταγόνας είναι ρ και $V = (4/3)\pi r^3$ αντίστοιχα, επομένως η μάζα της θα είναι

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi r^3 \tag{2.89}$$
$$\Rightarrow m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 = \frac{4}{3}\pi\rho r_0^3 \mathrm{e}^{3\lambda t}$$

διότι $r = r_0\mathrm{e}^{\lambda t}$. Επιπλέον η πυκνότητα της σταγόνας μπορεί να εκφραστεί τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ας υποθέσουμε ότι η μάζα και ο όγκος της είναι m_0 και $V_0 = (4/3)\pi r_0^3$. Επομένως θα έχουμε

$$\rho = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_0}{(4/3)\pi r_0^3}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση της πυκνότητας ρ στη σχέση (2), θα έχουμε

$$m = m_0 \mathrm{e}^{3\lambda t} \tag{2.90}$$

(β) Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σταγόνα είναι η δύναμη του βάρους της mg, επομένως ο δεύτερος νόμος του Newton θα μας δώσει την εξίσωση κίνησης της

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$$
$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = mg$$

όπου η ορμή της σταγόνας είναι $p = mv$, και η μάζας της μεταβάλλεται με το χρόνο t. Αντικαθιστώντας την έκφραση m της σχέσης (2) στην εξίσωση κίνησης, θα έχουμε

$$m_0\mathrm{e}^{3\lambda t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + vm_0 3\lambda \mathrm{e}^{3\lambda t} = m_0\mathrm{e}^{3\lambda t} g$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - 3\lambda v$$

$$\Rightarrow \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v - g/(3\lambda)} = -3\lambda \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v - (g/3\lambda)}{-(g/3\lambda)}\right) = -3\lambda t$$

$$\Rightarrow v = \frac{g}{3\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-3\lambda t}\right)$$

(γ) Η οριακή ταχύτητα της σταγόνας μπορεί να βρεθεί από τη σχέση της ταχύτητας $v(t)$ όταν θεωρήσουμε το χρόνο να τείνει στο άπειρο, $t \to \infty$, δηλαδή

$$v \to \frac{g}{3\lambda}$$

διότι $\mathrm{e}^{-3\lambda t} \to 0$ όταν $t \to \infty$.

Πρόβλημα 2.36 Μια σφαιρική σταγόνα πέφτει κατακόρυφα στο πεδίο βαρύτητας χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας η μάζα της αυξάνεται με ρυθμό που δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \lambda m^a v^\beta, \quad \lambda > 0, \quad 0 \leqq a < 1, \quad \beta \geqq 0$$

(α) Να βρείτε την ταχύτητα v ως συνάρτηση της μάζας m. Θεωρήστε αρχική συνθήκη $m = 0$ όταν $v = 0$.

(β) Αν θεωρήσουμε τώρα μια δύναμη αντίστασης μέτρου $F = km^a v^\gamma$, $\gamma > 0$, $k \geq 0$, να δείξετε ότι η επιτάχυνση της σταγόνας είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση

$$a = \frac{ng}{1 + k(1-n)/\lambda}, \qquad \text{όπου} \quad n = (1-a)/(2+\beta-a)$$

Λύση:

(α) Εφόσον η σταγόνα κινείται στο πεδίο βαρύτητας χωρίς αντίσταση, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα μας δώσει

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = mg, \qquad \text{όπου } p = mv \tag{2.91}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας της θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \lambda m^a v^\beta = \lambda m^{a-\beta} p^\beta \tag{2.92}$$

Με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας στην παραγώγιση, η εξίσωση (2) θα μας δώσει

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = mg \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = mg \overset{(2)}{\Rightarrow} p^\beta \mathrm{d}p = \frac{g}{\lambda} m^{1+\beta-a} \mathrm{d}m$$

$$\Rightarrow \int p^\beta \mathrm{d}p = \frac{g}{\lambda}\int m^{1+\beta-a}\mathrm{d}m$$

$$\Rightarrow \frac{p^{\beta+1}}{1+\beta} = \frac{gm^{2+\beta-a}}{\lambda(2+\beta-a)} + \frac{c}{1+\beta}, \qquad c = \text{ σταθερά ολοκλήρωσης}$$

και για $p = mv$ έπεται ότι

$$v^{1+\beta} = \frac{1+\beta}{m^\beta}\left[\frac{gm^{2+\beta-a}}{\lambda(2+\beta-a)} + \frac{c}{1+\beta}\right]$$

Από την αρχική συνθήκη $v = 0$ για $m = 0$ έπεται $c = 0$. Επομένως η ταχύτητα είναι

$$v^\beta = \frac{g(1+\beta)}{\lambda(2+\beta-a)} m^{2-a}$$

(β) Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα στην περίπτωση που έχουμε τη δύναμη της αντίστασης $\boldsymbol{F} = -km^a v^\gamma \hat{\boldsymbol{z}}$ (όπου $\hat{\boldsymbol{z}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον κατακόρυφο άξονα, υποθέτοντας τα θετικά προς τα κάτω) θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = mg - km^a v^\gamma = mg - km^{a-\gamma} p^\gamma \tag{2.93}$$

Στην ειδική περίπτωση που λάβουμε $1 + \beta = \gamma$ μπορούμε να έχουμε λύση συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (2), δηλαδή έπεται η ακόλουθη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = mg - km^{a-\gamma}p^\gamma \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} + \frac{k}{\lambda}\frac{p}{m} = \frac{g}{\lambda} m^{1+\beta-a} p^{-\beta}, \tag{2.94}$$

Αν θεωρήσουμε τη νέα μεταβλητή $u = m^{k/\lambda} p = m^{k/\lambda} mv$, η σχέση (2) θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
u^\beta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}m} &= \frac{g}{\lambda} m^{(1+\beta)(1+k/\lambda)-a} \\
\Rightarrow \int u^\beta \mathrm{d}m &= \frac{g}{\lambda} \int m^{(1+\beta)(1+k/\lambda)-a} \mathrm{d}m \\
\Rightarrow u^{1+\beta} &= \frac{g(1+\beta)}{\lambda[(1+\beta)(1+k/\lambda) - a + 1]} + c'(1+\beta) \\
\Rightarrow v^{1+\beta} &= \frac{g(1+\beta)m^{1-a}}{\lambda(2+\beta-a) + k(1+\beta)} + \frac{c}{m^{(1+\beta)(1+k/\lambda)}}
\end{aligned} \tag{2.95}$$

όπου c είναι η νέα σταθερά ολοκλήρωσης και ισούται με μηδέν αφού $v = 0$, για $m = 0$.
Αν διαφορίσουμε τη σχέση (2) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\cancel{(1+\beta)} v^\beta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{g\cancel{(1+\beta)}(1-a)m^{-a}}{\lambda(2+\beta-a) + k(1+\beta)} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\
\overset{(2)}{\Longrightarrow} \cancel{v^\beta} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{g(1-a)m^{-a}}{\lambda(2+\beta-a) + k(1+\beta)} \lambda m^a \cancel{v^\beta}
\end{aligned}$$

και επομένως η επιτάχυνση $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ θα είναι σταθερή, και δίνεται από την παρακάτω έκφραση

$$a = \frac{(1-a)g}{(2+\beta-a) + k(1+\beta)/\lambda} = \frac{g(1-a)/(2+\beta-a)}{1 + k(1+\beta)/\lambda(2+\beta-a)} = \frac{ng}{1 + k(1-n)/\lambda}$$

όπου $n = (1-a)/(2+\beta-a)$.

Πρόβλημα 2.37 Μελετήστε τη κίνηση ενός σφαιρικού σωματιδίου ακτίνας R και πυκνότητας ρ που πέφτει σε μια βαθιά λίμνη με συντελεστή ιξώδους η όπου η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου στην επιφάνεια της λίμνης είναι v_0. Να βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ και τη θέση $x(t)$ του σωματιδίου καθώς αυτό βυθίζεται μέσα στη λίμνη ως συνάρτηση του χρόνου t.
Επίσης θεωρήστε τη δύναμη της βαρύτητας πέρα από τη δύναμη τριβής μεταξύ του σωματιδίου και του υγρού της λίμνης.

Λύση:

Όταν το σωματίδιο βρίσκεται μέσα στη λίμνη, εκτός από τη δύναμη βαρύτητας mg θα ασκείται και η δύναμη τριβής που οφείλεται στο υγρό της λίμνης. Από τη θεωρία των ρευστών η δύναμη αυτή η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη της ταχύτητας v και θα δίνεται από τη σχέση

$$F = -6\pi\eta R v$$

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου θα βρεθεί από το δεύτερο νόμο του Newton

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - 6\pi\eta R v$$

όπου η μάζα, m, του σωματιδίου είναι: $m = \rho V = \rho(4/3)\pi R^3$, διότι το σωματίδιο είναι σφαίρα ακτίνας R. Επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{6\pi\eta R v}{m} = g\left(1 - \frac{9\eta v}{2g\rho R^2}\right)\\
\Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{1-\lambda v} &= \int_0^t g\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

όπου $\lambda = 9\eta/2\rho R^2 g$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1-\lambda v}{1-\lambda v_0}\right) &= gt\\
\Rightarrow \frac{1-\lambda v}{1-\lambda v_0} &= \mathrm{e}^{-\lambda g t}\\
\Rightarrow v &= \frac{1}{\lambda}\left[1 - (1-\lambda v_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda g t}\right]
\end{aligned}$$

Η θέση, $x(t)$, του σωματιδίου θα βρεθεί αφού ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας

$$x(t) = \int_0^t v\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left[t + \frac{(1-\lambda v_0)}{\lambda g}\left(\mathrm{e}^{-\lambda g t} - 1\right)\right]$$

Πρόβλημα 2.38 Σωματίδιο μάζας κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας κατά μήκος λείας ράβδου μήκους L, κεκλιμένης κατά γωνία α ως προς τη κατακόρυφο, και περιστρεφόμενης γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου.

(β) Βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το σωματίδιο το άκρο Β αν για $t = 0$ ξεκινά από την ηρεμία του από το σημείο Α.

Λύση:

(α) Η κίνηση του σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) όπου ο περιορισμός της γωνίας $\theta = \alpha =$ σταθερή μας δίνει $\dot{\theta} = 0$. Επίσης για την πολική γωνία ϕ έχουμε ότι $\dot{\phi} = \omega =$ γωνιακή ταχύτητα. Κατά μήκος της ακτινικής συνιστώσας, r ασκείται η δύναμη της αντίστασης $-mg\cos\theta$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Επομένως η ακτινική επιτάχυνση είναι $\alpha_r = -g\cos\theta$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες η ακτινική επιτάχυνση δίνεται στο πρόβλημα 1.16

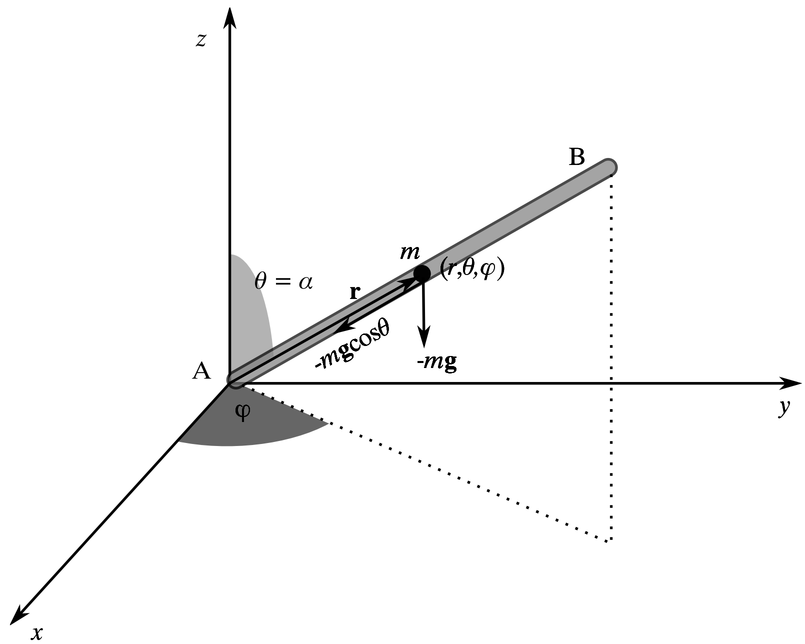
$$\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta &= -g\cos\theta\\
\Rightarrow \ddot{r} - r\omega^2\sin^2\alpha &= -g\cos\alpha\\
\Rightarrow (D^2 - \omega^2\sin^2\alpha)r &= -g\cos\alpha \qquad (2.96)
\end{aligned}$$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης βρίσκεται μέσω των ριζών $D_{1,2} = \pm\omega\sin\alpha$, του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,$D^2 - \omega^2\sin^2\alpha$, και δίνεται από τη σχέση

$$r_{o\mu}(t) = C_1\mathrm{e}^{\omega\sin\alpha\, t} + C_2\mathrm{e}^{-\omega\sin\alpha\, t}$$

και η μερική λύση λόγω του σταθερού όρου του δεξιού μέρους της διαφορικής εξίσωσης (2) θα είναι

$$r_\mu(t) = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$



Σχήμα 2.10

Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης θα είναι

$$r(t) = r_{o\mu}(t) + r_{\mu}(t) = C_1 \mathrm{e}^{\omega \sin\alpha\, t} + C_2 \mathrm{e}^{-\omega \sin\alpha\, t} + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$$

Οι αρχικές συνθήκες, θέση και ταχύτητα, $r(0) = 0$ και $\dot{r}(0) = 0$ θα μας δώσουν

$$0 = r(0) = C_1 + C_2 + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$
$$0 = \dot{r}(0) = \omega\sin\alpha C_1 - \omega\sin\alpha C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2$$

και $C_1 = C_2 = -g\cos\alpha/(2\omega^2\sin^2\alpha)$.
Από τον προσδιορισμό αυτών των σταθερών ολοκλήρωσης C_1, C_2 η γενική λύση θα είναι

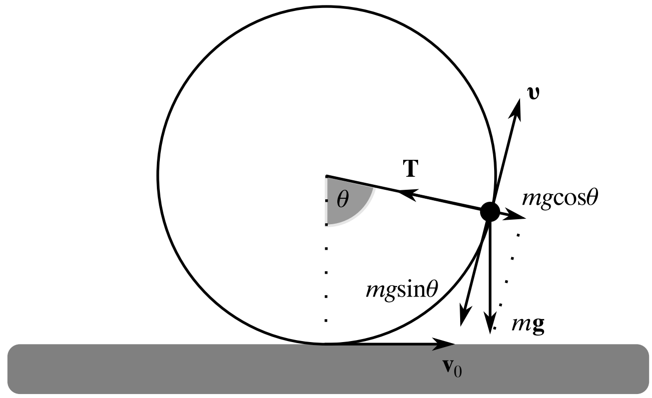
$$r(t) = -\frac{g\cos\alpha}{2\omega^2\sin^2\alpha}\left(\mathrm{e}^{\omega\sin\alpha t} + \mathrm{e}^{-\omega\sin\alpha t}\right) + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\big(1 - \cosh(\omega\sin\alpha t)\big)$$

(β) Στην περίπτωση που το σωματίδιο φτάσει στην άκρη B, $(r = L)$, η εξίσωση κίνησης θα μας δώσει

$$L = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\big(1 - \cosh(\omega\sin\alpha t)\big)$$
$$\Rightarrow \cosh(\omega\sin\alpha t) = 1 - \frac{L\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow t = \frac{1}{\omega\sin\alpha}\cosh^{-1}\left(1 - \frac{L\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}\right)$$

Πρόβλημα 2.39 Από κάποιο διάτρητο μπαλάκι είναι περασμένο σταθερό κυκλικό καλώδιο ακτίνας r. Το καλώδιο είναι ομαλό και βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Το μπαλάκι βάλλεται από τη κατώτερη θέση του με τόση ενέργεια που μόλις του επιτρέπει να φθάσει στην κορυφή. Βρείτε μια έκφραση για τη δύναμη της αντίδρασης του καλωδίου στο μπαλάκι και προσδιορίστε σε ποιο σημείο η αντίδραση αλλάζει πρόσημο.

Λύση:



Σχήμα 2.11

Έστω T είναι η δύναμη της αντίδρασης που ασκείται στο μπαλάκι, άρα η ολική δύναμη που ασκείται κατά μήκος του r θα είναι

$$F_r = -T + mg\cos\theta$$

και στο άξονα τον κάθετο στο r θα είναι

$$F_\theta = -mg\sin\theta$$

Από το πρόβλημα 1.15 γνωρίζουμε τις εκφράσεις των F_r και F_θ

$$\begin{aligned} F_r &= m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -T + mg\cos\theta \\ \Rightarrow -mr\dot{\theta}^2 &= -T + mg\cos\theta \\ F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\sin\theta \\ \Rightarrow r\ddot{\theta} &= -g\sin\theta \end{aligned}$$

διότι η ακτίνα r είναι σταθερή. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση για την F_θ μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} r\ddot{\theta} &= -g\sin\theta \\ \Rightarrow r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} &= g\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\dot{\theta}} \\ \Rightarrow r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} &= 2g\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \int r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \int 2g\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{r}\cos\theta + C \end{aligned}$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης C μπορεί να προσδιοριστεί από τις τελική συνθήκες για $\theta = \pi$ η ταχύτητα $\dot{\theta} = 0$, δηλαδή θα έχουμε $C = 2g/r$, και η σχέση του $\dot{\theta}$ θα μας δώσει

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(\cos\theta + 1)$$

Από την εξίσωση κίνησης στον άξονα r θα έχουμε

$$-mr\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow -mr\frac{2g}{r}(\cos\theta + 1) = -T + mg\cos\theta$$
$$\Rightarrow T = mg(3\cos\theta + 2)$$

Παρατηρούμε ότι η αντίδραση T γίνεται μηδέν όταν $\cos\theta = -2/3$ και επομένως η T θα αλλάξει πρόσημο σ' αυτό το σημείο.

Πρόβλημα 2.40 Στο κλασικό πρόβλημα της βολής σωματιδίου αρχικής ταχύτητας v_0 και γωνίας βολής θ ως προς το οριζόντιο άξονα x να βρείτε τη γωνία βολής θ_0 για την οποία επιτυγχάνουμε μέγιστο μήκος διαδρομής.

Λύση:

Στο πρόβλημα της βολής οι θέσεις $x(t),\ y(t)$ του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου δίνοναι από τις γνωστές σχέσεις

$$x(t) = v_0\cos\theta\, t \qquad \text{και} \qquad y(t) = v_0\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

Το σωματίδιο θα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της διαδρομής όταν $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = 0 \ \Rightarrow v_0\sin\theta - gt = 0$ και επομένως για χρόνο $t = v_0\sin\theta/g$. Το μήκος της διαδρομής μπορεί να υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
s(\theta) &= 2\int_0^{v_0\sin\theta/g}\left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right)^{1/2} = 2\int_0^{v_0\sin\theta/g}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{v_0\sin\theta/g}\left((v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t \\
&= 2v_0\cos\theta\int_0^{v_0\sin\theta/g}\left(1 + \left(\tan\theta - \frac{gt}{v_0\cos\theta}\right)^2\right)^2\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}\int_{\tan\theta}^0(1+\omega^2)^{1/2}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα της ολοκλήρωσης έχουμε κάνει την αντικατάσταση $\omega = \tan\theta - gt/v_0\cos\theta$. Αν θεωρήσουμε μια νέα μεταβλητή, z, μέσω της σχέσης $\omega = \tan z$ και αντιστρέφοντας τα όρια της ολοκλήρωσης, το τελευταίο ολοκλήρωμα λαμβάνει τη μορφή

$$s(\theta) = \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}\int_0^\theta\frac{\mathrm{d}z}{\cos^3 z}$$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί έυκολα και δίνεται στο Παράρτημα 11 στη σελίδα 533 από τον τύπο (11.1) και επομένως θα έχουμε

$$s(\theta) = \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right) = \frac{v_0^2}{g}\left(\sin\theta + \cos^2\theta\ln\left(\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)\right)$$

Αν λάβουμε την πρώτη παράγωγο του $s(\theta)$ ως προς θ και τη θεωρήσουμε μηδέν, θα λάβουμε τη γωνία για την οποία θα εχουμε μέγιστο μήκος διαδρομής

$$0 = \frac{\mathrm{d}s(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v_0^2}{g}\left(\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) + \cos^2\theta\,\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\,\frac{\cos^2\theta + (1+\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) = 1$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά όπου η λύση είναι $\theta_0 = 56,5^{\mathrm{o}}$.

Πρόβλημα 2.41 Ένα βλήμα βάλλεται από ένα σταθερό σημείο A με αρχική ταχύτητα v_0. Εάν η γωνία βολής είναι 90^o, δηλαδή αν βάλλεται κατακόρυφα, αυτό θα απομακρύνεται για λίγο από το σημείο A, θα φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος και στην συνέχεια θα κατεβαίνει και θα πλησιάζει το σημείο A μέχρι να πέσει πάνω του. Αν το βάλλουμε με λίγο μικρότερη γωνία (π.χ. 88o) πάλι θα απομακρύνεται από το A αλλά στην συνέχεια θα το πλησιάζει μέχρι να πέσει δίπλα του. Ποια είναι η μέγιστη γωνία βολής θ_0 ώστε το βλήμα συνεχώς να απομακρύνεται από το σημείο βολής;

Λύση:

Στο πρόβλημα της βολής οι θέσεις $x(t),\ y(t)$ του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου δίνοναι από τις γνωστές σχέσεις

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t \qquad \text{και} \qquad y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

Η απόσταση L του βλήματος από το σημείο βολής A δίνεται από τη σχέση

$$L^2 = x^2(t) + y^2(t) = (v_0 \cos\theta\, t)^2 + \left(v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2\right)^2$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο και θέσουμε την παράγωγο ίση με μηδέν θα βρούμε τα ακρότατα της απόαστασης L, δηλαδή

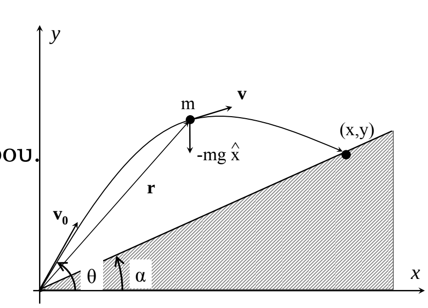
$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}L^2}{\mathrm{d}t} &= 2v_0^2 \cos^2\theta t + 2\left(v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2\right)(v_0 \sin\theta - gt) \\
&= 2t\left[v_0^2(cos^2\theta + \sin^2\theta) - v_0 \sin\theta gt - \frac{1}{2}v_0 \sin\theta gt + \frac{1}{2}g^2t^2\right] \\
&= 2t\left[v_0^2 - \frac{3}{2}v_0 \sin\theta gt + \frac{1}{2}g^2t^2\right]
\end{aligned}$$

Για $t = 0$ έχουμε ένα ελάχιστο. Η σχέση στις αγκύλες είναι ένα διώνυμο ως προς το t και θα μας κοαθορίσει τα υπόλοιπα ακρότατα. Ειδικότερα, αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta \leq 0$ δεν θα υπάρχει άλλο ακρότατο και η απόσταση θα αυξάνεται συνεχώς, επομένως θα καθορίσουμε τη γωνία θ_0 για την οποία $\Delta \leq 0$

$$0 \geq \Delta = \frac{9}{4}v_0^2 \sin^2\theta_0^2 - 4\frac{1}{2}v_0^2 g^2 \qquad \Rightarrow \sin^2\theta_0 \leq \frac{8}{9} \qquad \Rightarrow \theta_0 \leq \arcsin\left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right) = 70,53^o$$

Πρόβλημα 2.42

Ένα σώμα μάζας m κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο (x, y). Στο πρόβλημα των βολών θεωρούμε ότι το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα v_0 που σχηματίζει γωνία θ ως προς τον άξονα x. Επίσης θεωρούμε ότι υπάρχει ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας a.
Να βρείτε το βεληνεκές, R, της βολής κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.



Λύση:

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα μας δώσει την εξίσωση κίνησης

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

όπου η ταχύτητα

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{y}} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}}$$

Συνεπώς

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow -mg\hat{\boldsymbol{y}} = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \Rightarrow 0 = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad -g = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow v_x = v_0 \cos\theta, \qquad v_y = v_0 \sin\theta - gt \qquad \Rightarrow x = v_0 \cos\theta\, t \quad y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις αρχικές συνθήκες για την ταχύτητα: $v_x(0) = v_0 \cos\theta$ και $v_y(0) = v_0 \sin\theta$. Απαλείφοντας τη μεταβλητή του χρόνου, t, από τις παραπάνω σχέσεις, έπεται

$$y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}, \quad \text{με } a < \theta < \frac{\pi}{2} \tag{2.97}$$

όπου x, y είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της θέσης του σώματος την τυχαία χρονική στιγμή.

$$\frac{\mathrm{d} v_x}{\mathrm{d} t} = 0 \Leftrightarrow v_x = c_1$$

Επειδή $v_x(0) = v_0 \cos\theta, \quad c_1 = v_0 \cos\theta$. Συνεπώς, $v_x = v_0 \cos\theta$.

$$\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t} = v_0 \cos\theta \Leftrightarrow x(t) = v_0 \cos\theta t + c_2$$

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα, $x(t) = v_0 \cos\theta t$.

$$\frac{\mathrm{d} v_y}{\mathrm{d} t} = -g \Leftrightarrow v_y(t) = -gt + c_3$$

$$v_y(0) = v_0 \sin\theta \Leftrightarrow c_3 = v_0 \sin\theta$$

άρα

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt$$

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t} = v_0 \sin\theta - gt \Leftrightarrow y(t) = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 + c_4$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow c_4 = 0$$

άρα

$$y(t) = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Έστω $X(\theta)$ είναι η $x-$συντεταγμένη του σημείου πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο που συναντά η τροχιά του σώματος. Επομένως η αντίστοιχη $y-$συντεταγμένη είναι $X(\theta) \tan\alpha$. Προφανώς το σημείο $(X(\theta), Y(\theta))$ θα είναι η λύση του συστήματος της (2) με την $y = x \tan a$, δηλαδή:

$$X(\theta) = \frac{2 v_0^2}{g} \cos^2\theta (\tan\theta - \tan\alpha), \quad \text{με } 0 \leq a < \frac{\pi}{2} \tag{2.98}$$

Το βεληνεκές, R, της βολής κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου θα είναι

$$R = \frac{X}{\cos a} = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta}{g \cos\alpha} (\tan\theta - \tan\alpha) \tag{2.99}$$

Οριζόντιο επίπεδο

Αν δεν υπάρχει κεκλιμένο επίπεδο, δηλαδή $\alpha = 0$, η εξίσωση (2) γίνεται

$$R = \frac{2 v_0^2}{g} \cos^2\theta \tan\theta = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \tag{2.100}$$

όπου το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται για

$$0 = \frac{\mathrm{d} R}{\mathrm{d} \theta} = \frac{2 v_0^2 \cos 2\theta}{g} \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d} \theta^2} = -\frac{4 v_0^2 \sin 2\theta}{g} \text{ με } \left.\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d} \theta^2}\right|_{\theta = \pi/4} = -\frac{4 v_0^2}{g} < 0$$

και είναι $R_{\max} = v_0^2/g$. Άρα, αν το βεληνεκές, R, είναι γνωστό, τότε η εξίσωση (2) γράφεται ως

$$\sin 2\theta = \frac{gR}{v_0^2} = \frac{R}{R_{\max}}, \quad \text{με } 0 < R \le R_{\max}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{4v_0^2}{g\cos^2 a}\sin(2\theta - a)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g\cos^2 a}\sin\left(a + \frac{\pi}{2} - a\right) = -\frac{4v_0^2}{g\cos^2 a}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{4v_0^2}{g\cos^2 a} < 0$$

Το ίδιο βεληνεκές επιτυγχάνεται για δύο γωνίες θ_1 και θ_2, για τις οποίες $\sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2$, δηλαδή για θ_1 και $\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$.

Κεκλιμένο επίπεδο

Στην περίπτωση που έχουμε ένα κεκλιμένο επίπεδο, $\alpha \neq 0$, η εξίσωση (2) γράφεται ως

$$R = \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g\cos\alpha}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{2v_0^2\cos\theta}{g\cos^2 a}(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\cos\theta\sin(\theta-\alpha)$$

$$\Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin(2\theta-\alpha) - \sin\alpha\right] \tag{2.101}$$

Το μέγιστο βεληνεκές στο κεκλιμένο επίπεδο θα συμβεί για γωνία θ

$$0 = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v_0^2}{g\cos^2 a}2\cos(2\theta-\alpha) \Rightarrow \cos(2\theta-\alpha) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$$

και θα έχει την τιμή

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}(1-\sin\alpha) = \frac{v_0^2}{g(1+\sin\alpha)}$$

Αν το βεληνεκές, R, είναι δεδομένο, τότε η εξίσωση (2) μας δίνει

$$\sin(2\theta-\alpha) - \sin\alpha = \frac{gR\cos^2\alpha}{v_0^2} = \frac{R}{R_{\max}}(1-\sin\alpha), \quad \text{με } R \le R_{\max}$$

Το ίδιο βεληνεκές επιτυγχάνεται για γωνίες θ_1 και θ_2 για τις οποίες $\sin(2\theta_2 - a) = \sin(2\theta_1 - a)$, δηλαδή για θ_1 και $\theta_2 = \pi/2 - (\theta_1 - a)$.

Πρόβλημα 2.43 Να υπολογιστεί το μήκος της τροχιάς που διανύει το σώμα κατά τη διάρκεια της βολής, για μια γωνία βολής θ του προηγουμένου προβλήματος.

Λύση:

Η εξίσωση της τροχιάς του σώματος περιγράφεται από τη σχέση (2). Το μήκος της τροχιάς, $s(\theta)$, θα είναι

$$s(\theta) = \int_0^{X(\theta)}\mathrm{d}s = \int_0^X\left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right)^{1/2} = \int_0^X\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}x \tag{2.102}$$

όπου $X(\theta)$ είναι το σημείο που συναντά η τροχιά το κεκλιμένο επίπεδο, και δίνεται από τη σχέση (2). Από την εξίσωση κίνησης (2), έπεται

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta}$$

και αν την εισάγουμε στη σχέση (2), θα έχουμε

$$s(\theta) = \int_0^{(2v_0^2/g)\cos^2\theta(\tan\theta-\tan\alpha)}\left[1 + \underbrace{\left(\tan\theta - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta}\right)^2}_{\sinh z}\right]^{1/2}\mathrm{d}x$$

αν θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$\sinh z = \tan\theta - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta} \Rightarrow \cos hz\mathrm{d}z = -(g/v_0^2\cos^2\theta)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow s(\theta) = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}\int\limits_{\sinh^{-1}(2\tan\alpha-\tan\theta)}^{\sinh^{-1}(\tan\theta)}\cos h^2 z\mathrm{d}z = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}\left[\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sinh(2z)\right]_{\sinh^{-1}(2\tan\alpha-\tan\theta)}^{\sinh^{-1}(\tan\theta)}$$

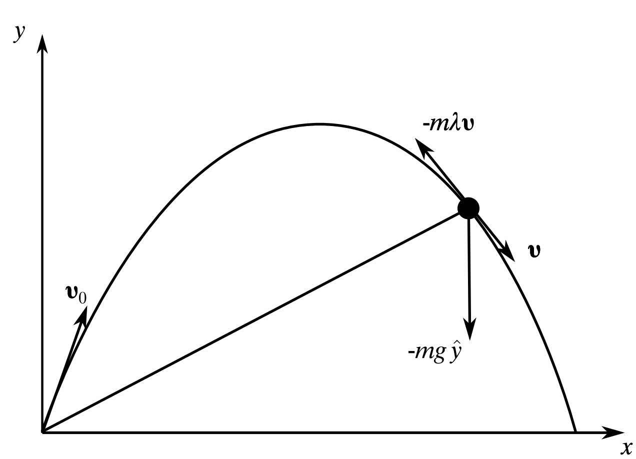
Το

$$\sinh(2z) = 2\sinh z\cosh z = 2\sinh z\sqrt{1+\sinh^2 z}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow s(\theta) &= \frac{v_0^2\cos^2\theta}{2g}\left[z + \sinh z(1+\sinh^2 z)^{1/2}\right]_{\sinh^{-1}(2\tan\alpha-\tan\theta)}^{\sinh^{-1}(\tan\theta)}\\ &= \frac{v_0^2\cos^2\theta}{2g}\Big[\sinh^{-1}(\tan\theta) - \sin h^{-1}(2\tan\alpha-\tan\theta) +\\ &+ \tan\theta(1+\tan^2\theta)^{1/2} - (2\tan\alpha-\tan\theta)\left\{1+(2\tan a-\tan\theta)^2\right\}^{1/2}\Big]\\ &= \frac{v_0^2}{2g}\Big[\sin\theta + \cos^2\theta\Big\{\sinh^{-1}(\tan\theta) -\\ &- \sinh^{-1}(2\tan\alpha-\tan\theta) - (2\tan\alpha-\tan\theta)\left[1+(2\tan\alpha-\tan\theta)^2\right]^{1/2}\Big\}\Big]\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.44 Βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 που κάνει γωνία α με την οριζόντια. Βρείτε τη θέση $(x(t), y(t))$ καθώς και τη ταχύτητα του βλήματος υπό την επίδραση της βαρύτητας και αντίστασης του αέρα που είναι ανάλογη του διανύσματος της ταχύτητας και την οποία θα πάρετε $-m\lambda\boldsymbol{v}$, όπου λ θετική σταθερά. Βρείτε το χρόνο που απαιτείται ώστε το βλήμα να φτάσει το μέγιστο ύψος, καθώς και το μέγιστο ύψος.

Λύση:



Σχήμα 2.12

Η εξίσωση κίνησης του βλήματος θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -mg\hat{\boldsymbol{y}} - m\lambda\boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} = -mg\hat{\boldsymbol{y}} - m\lambda\boldsymbol{v}_x\hat{\boldsymbol{x}} - m\lambda\boldsymbol{v}_y\hat{\boldsymbol{y}}$$

Για τη x-συνιστώσα της ταχύτητας θα έχουμε

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -m\lambda v_x \\ \Rightarrow \int_{v_0\cos\alpha}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} &= -\lambda \int_0^t \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \ln\frac{v_x}{v_0\cos\alpha} &= -\lambda t \\ \Rightarrow v_x &= v_0\cos\alpha \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{aligned}$$

και για τη y-συνιστώσα θα έχουμε

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -mg - m\lambda v_y \\ \Rightarrow \int_{v_0\sin\alpha}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{g+\lambda v_y} &= -t \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\ln(\frac{1+(\lambda/g)v_y}{1+v_0\sin\alpha(\lambda/g)}) &= -t \\ \Rightarrow \frac{1+(\lambda/g)v_y}{1+v_0\sin\alpha(\lambda/g)} &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ \Rightarrow v_y &= \frac{g}{\lambda}\left[\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}-1\right] \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{g}{\lambda}\left[\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}-1\right] \\ \Rightarrow \int_0^y \mathrm{d}y &= \frac{g}{\lambda}\int_0^t\left[\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}-1\right]\mathrm{d}t \\ \Rightarrow y &= -\frac{g}{\lambda}t - \frac{g}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{-\lambda t}-1)\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right) \end{aligned} \tag{2.103}$$

Το μέγιστο ύψος θα συμβεί όταν $v_y = 0$, δηλαδή όταν

$$0 = v_y = \frac{g}{\lambda}\left[\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}-1\right]$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(1+(\lambda/g)v_0\sin\alpha)}{\lambda} \tag{2.104}$$

και το μέγιστο ύψος, $y_{\max}$, θα βρεθεί όταν αντικαταστήσουμε το χρόνο t της σχέσης (2) στην εξίσωση (2)

$$\begin{aligned} y_{\max} &= -\frac{g}{\lambda^2}\ln\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right) - \frac{g}{\lambda^2}\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{1+v_0(\lambda/g)\sin\alpha}-1\right) \\ &= \frac{g}{\lambda^2}\left[\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha - \ln\left(1+\frac{\lambda}{g}v_0\sin\alpha\right)\right] \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.45 Μια σταγόνα βροχής, μάζας m, πέφτει από ύψος h κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα v_0. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς τη ταχύτητα της σταγόνας $F = -kv, \quad k > 0$ να βρεθεί η ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου. Αποκτά η σταγόνα οριακή ταχύτητα; Ποια είναι αυτή;

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης της σταγόνας θα περιγράφεται από το δεύτερο νόμο του Newton όπου η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σταγόνα είναι $mg - kv$, και επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg - kv \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{k}{m}v \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{gm}{k} - v\right)\frac{k}{m} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v - gm/k} &= -\frac{k}{m}\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v - gm/k} &= -\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \ln\left[\frac{1-(k/mg)v}{1-(k/mg)v_0}\right] &= -\frac{k}{m}t \\ \Rightarrow 1 - \frac{kv}{mg} &= \left(1 - \frac{kv_0}{mg}\right)\mathrm{e}^{-kt/m} \\ \Rightarrow v(t) &= \frac{mg}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{kv_0}{mg}\right)\mathrm{e}^{-kt/m}\right] \end{aligned}$$

Επομένως η σταγόνα θα αποκτήσει οριακή ταχύτητα

$$v(t \to \infty) = \frac{mg}{k}$$

Πρόβλημα 2.46 Σωματίδιο μάζας m_1 και ορμής p_1 συγκρούεται ελαστικά με άλλο σωματίδιο μάζας m_2 και ορμής p_2, ενώ αυτά κινούνται με αντίθετη κατεύθυνση. Αν το πρώτο σωματίδιο μετά τη σύγκρουση σχηματίζει γωνία θ_1 με την αρχική του κατεύθυνση, γράψτε τις εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας και ορμής και δείξετε ότι το μέτρο της ορμής του πρώτου σωματιδίου μετά τη κρούση είναι μια από τις ρίζες του τριωνύμου

$$x^2(1+\gamma) - 2x(p_1 - p_2)\cos\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - (\gamma p_1^2 + p_2^2) = 0$$

όπου $\gamma = m_2/m_1$.

Λύση:

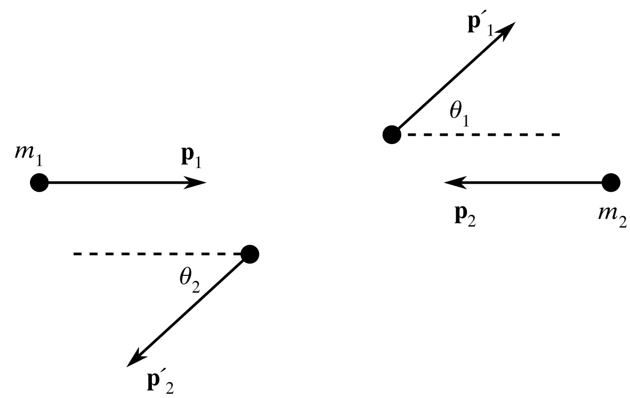
Από τη διατήρηση της ορμής στους άξονες x, y θα έχουμε

- διεύθυνση x:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= p_1'\cos\theta_1 - p_2'\cos\theta_2 \\ \Rightarrow p_2'\cos\theta_2 &= p_1'\cos\theta_1 - (p_1 - p_2) \\ \Rightarrow p_2'^2\cos^2\theta_2 &= p_1'^2\cos^2\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - 2(p_1 - p_2)p_1'\cos\theta_1 \end{aligned} \tag{2.105}$$

- διεύθυνση y:

$$\begin{aligned} p_1'\sin\theta_1 &= p_2'\sin\theta_2 \\ \Rightarrow p_1'^2\sin^2\theta_1 &= p_2'^2\sin^2\theta_2 \\ \Rightarrow p_2'^2\cos^2\theta_2 &= p_2'^2 - p_1'^2\sin^2\theta_1 \end{aligned} \tag{2.106}$$



Σχήμα 2.13

και από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$
$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1}p_1^2 + p_2^2 = \frac{m_2}{m_1}p_1'^2 + p_2'^2$$

$$\Rightarrow \gamma p_1^2 + p_2^2 = \gamma p_1'^2 + p_2'^2 \Rightarrow p_2'^2 = \gamma p_1^2 + p_2^2 - \gamma p_1'^2 \tag{2.107}$$

Από τις εξισώσεις (2) και (2) θα έχουμε

$$p_2'^2 - p_1'^2 \sin^2\theta_1 = p_1'^2 \cos^2\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - 2p_1' \cos\theta_1 (p_1 - p_2)$$
$$\Rightarrow p_2'^2 = p_1'^2 + (p_1 - p_2)^2 - 2p_1' \cos\theta_1 (p_1 - p_2) \tag{2.108}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (2) θα έχουμε

$$\gamma p_1'^2 + p_1'^2 - 2p_1'(p_1 - p_2)\cos\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - (\gamma p_1^2 + p_2^2) = 0$$

Πρόβλημα 2.47 Βλήμα εκτοξεύεται από κάποιο σημείο Ο με ταχύτητα μέτρου V υπό γωνία θ ως προς τον οριζόντιο άξονα. Βρείτε την εξίσωση τροχιάς του βλήματος σε σχέση με κατάλληλο οριζόντιο άξονα Ox και κατακόρυφο Oy χωρίς να λάβετε υπ' όψιν τη τριβή του αέρα. Το σημείο Ο είναι στη κορυφή κατακόρυφου βράχου ύψους h πάνω από τη θάλασσα, και το μέγιστο ύψος όπου φτάνει το βλήμα είναι $h + b$ από το επίπεδο της θάλασσας. Το βλήμα κτυπά τη θάλασσα σ' απόσταση d από τη βάση του βράχου O, στη θάλασσα. Να δείξετε ότι

$$d^2 \tan^2\theta - 4db\tan\theta - 4bh = 0$$

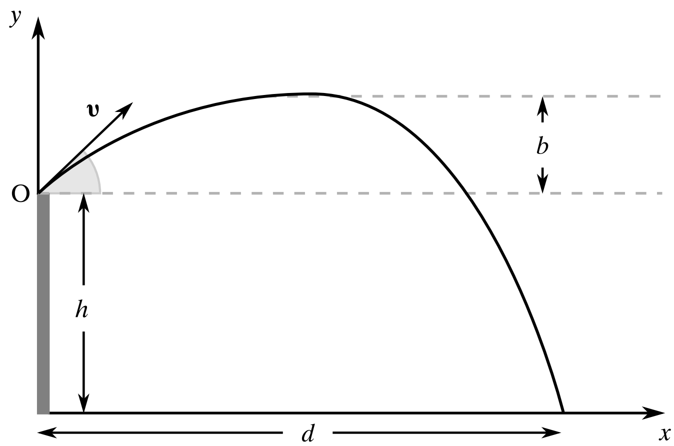
Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του βλήματος κυβερνάται από τη δύναμη της βαρύτητας

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -mg\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} = -mg\hat{\boldsymbol{y}}$$

Για την $x-$συνιστώσα έχουμε

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow v_x = V\cos\theta \quad \Rightarrow x = V\cos\theta t$$



Σχήμα 2.14

$$\Rightarrow \quad t = \frac{x}{V\cos\theta} \tag{2.109}$$

και για την y-συνιστώσα έχουμε

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg \quad \Rightarrow v_y = V\sin\theta - gt$$

$$\Rightarrow y = V\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.110}$$

και επομένως η εξίσωση της τροχιάς στο επίπεδο xy για το πρόβλημα της βολής είναι μια παραβολή όπως προκύπτει όταν αντικαθιστούμε τη σχέση (2) στην (2)

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\theta} \tag{2.111}$$

Στο μέγιστο ύψος θα έχουμε τη συνιστώσα της ταχύτητας $v_y = 0$, άρα

$$0 = v_y = V\sin\theta - gt_h$$

$$\Rightarrow t_h = \frac{V\sin\theta}{g}$$

όπου t_h είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος. Από την εξίσωση (2) θα υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος

$$b = \frac{V^2\sin^2\theta}{g} - \frac{V^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{V^2\sin^2\theta}{2g} \tag{2.112}$$

Από τη σχέση (2) μπορούμε να εκφράσουμε την ταχύτητα του βλήματος ,V , ως συνάρτηση του μέγιστου ύψους

$$V^2 = \frac{2gb}{\sin^2\theta} \tag{2.113}$$

Όταν το βλήμα προσκρούει στην επιφάνεια της θάλασσας το $x = d$ και $y = -h$ και επομένως η εξίσωση της τροχιάς του (2) μας δίνει

$$-h = d\tan\theta - \frac{d^2 g}{2V^2\cos^2\theta}$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (2) θα έχουμε

$$-h = d\tan\theta - \frac{d^2 g}{2(2gb/sin^2\theta)\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow -h = d\tan\theta - \frac{d^2\tan^2\theta}{4b}$$

$$\Rightarrow d^2\tan^2\theta - 4db\tan\theta - 4bh = 0$$

Πρόβλημα 2.48 Μια βάρκα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0 = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ ($v_0 > 0$) και βρίσκεται σε θέση $x = 0$ όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ σβήνεται η μηχανή της. Η αντίσταση νερού είναι τέτοια ώστε η δύναμη που ασκείται πάνω στη βάρκα να είναι ίση με $-b\mathrm{e}^{av}$, όπου v είναι το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας και a και b είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα της βάρκας, v, ως συνάρτηση του χρόνου για $t > 0$.

(β) Να βρεθεί η θέση της βάρκας, x, ως συνάρτηση του χρόνου για $t > 0$.

(γ) Πόσος χρόνος,τ, θα απαιτηθεί για να σταματήσει η βάρκα; Σε ποια τιμή τείνει ο τ για πολύ μεγάλες τιμές της v_0.

Λύση:

(α) Η εξίσωση κίνησης της βάρκας περιγράφεται από το δεύτερο νόμο του Newton

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -b\mathrm{e}^{av} \\
\Rightarrow \int_{v_0}^{v} \mathrm{e}^{-av}\mathrm{d}v &= -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t \\
\Rightarrow -\frac{1}{a}(\mathrm{e}^{-av} - \mathrm{e}^{-av_0}) &= -\frac{b}{m}t \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{-av} &= \frac{ab}{m}t + \mathrm{e}^{-av_0} \\
\Rightarrow v &= -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{ab}{m}t + \mathrm{e}^{-av_0}\right) \\
&= -\frac{1}{a}\ln\left[\left(\frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}t + 1\right)\mathrm{e}^{-av_0}\right] \\
&= v_0 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}t + 1\right) \qquad (2.114)
\end{aligned}$$

(β) Η θέση της βάρκας θα βρεθεί από τον ορισμό της ταχύτητας, $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v = v_0 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}t + 1\right) \\
\Rightarrow x &= v_0 t - \frac{1}{a}\int_0^t \ln\left(\frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}t + 1\right)\mathrm{d}t \\
&= v_0 t - \frac{m\mathrm{e}^{-av_0}}{a^2 b}\left(1 + \frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}t\right)\left[\ln\left(1 + \frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}t\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

διότι ισχύει

$$\int \ln(1 + ct)\mathrm{d}t = \frac{1}{c}(1 + ct)\left[\ln(1 + ct) - 1\right]$$

(γ) Όταν θα σταματήσει η βάρκα, η ταχύτητά της θα είναι μηδέν, επομένως η σχέση (2) θα μας δώσει

$$\begin{aligned}
0 &= v_0 - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}\tau + 1\right) \\
\Rightarrow av_0 &= \ln\left(\frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}\tau + 1\right) \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{av_0} &= \frac{ab}{m}\mathrm{e}^{av_0}\tau + 1 \\
\Rightarrow \tau &= \frac{m}{ab}\left(1 - \mathrm{e}^{-av_0}\right)
\end{aligned}$$

Για πολύ μεγάλες αρχικές ταχύτητες v_0, ο όρος $\mathrm{e}^{-av_0} \to 0$ και επομένως ο χρόνος τ θα είναι

$$\tau \to \frac{m}{ab}$$

Πρόβλημα 2.49 Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{\boldsymbol{y}}$ ($V > 0$) κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y = 0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής του αέρα ίση με $-mk\boldsymbol{v}$, όπου $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Δείξτε ότι η v και y ικανοποιούν τη σχέση

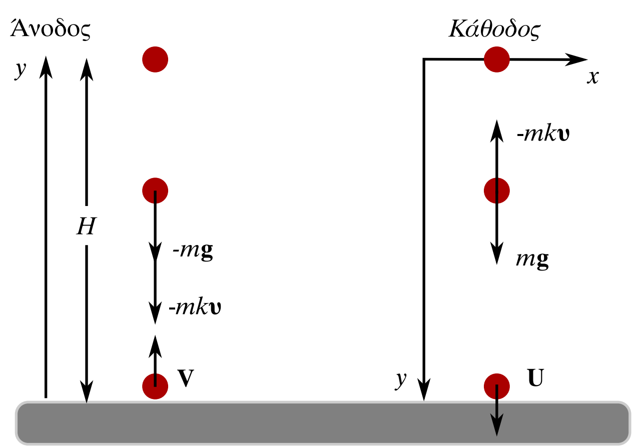
$$y = \frac{V - v}{k} - \frac{g}{k^2} \ln\left(\frac{1 + kV/g}{1 + kv/g}\right)$$

(γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H που θα φθάσει το σώμα.

(δ) Αν $v = -U$ είναι η ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο $y = 0$, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\left(1 - \frac{kU}{g}\right) \mathrm{e}^{kU/g} = \left(1 + \frac{kV}{g}\right) \mathrm{e}^{-kV/g}$$

Λύση:



Σχήμα 2.15

(α) Κατά την άνοδο το σωματίδιο υπόκειται στις δυνάμεις του βάρους και της αντίστασης όπως φαίνεται στο σχήμα (2.15). Επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - mkv$$

(β) Η παράγωγος $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}y)(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$, άρα η εξίσωση κίνησης θα πάρει τη μορφή

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -(g + kv) = -k\left(v + \frac{g}{k}\right)$$
$$\Rightarrow \int_V^v \frac{v\mathrm{d}v}{v + g/k} = -k\int_0^y \mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int_V^v \frac{(v+g/k)\mathrm{d}v}{v+g/k} - \int_V^v \frac{(g/k)\mathrm{d}v}{v+g/k} &= -ky \\
\Rightarrow (v-V) - \frac{g}{k}\ln\left(\frac{v+g/k}{V+g/k}\right) &= -ky \\
\Rightarrow y = \frac{V-v}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{1+kV/g}{1+kv/g}\right)
\end{aligned}
$$

(γ) Το μέγιστο ύψος, H, θα βρεθεί όταν η ταχύτητα $v=0$, δηλαδή

$$
H = \frac{V}{k} - \frac{g}{k^2}\ln(1+kV/g) \tag{2.115}
$$

(δ) Κατά την κάθοδο του σωματιδίου, θεωρούμε ότι ο άξονας των y έχει θετική κατεύθυνση προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η εξίσωση κίνησης σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg - mkv \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -k\left(v - \frac{g}{k}\right) \\
\Rightarrow \frac{v\mathrm{d}v}{v-g/k} &= -k\mathrm{d}y \\
\Rightarrow \int_0^U \frac{v-g/k}{v-g/k}\mathrm{d}v + \int_0^U \frac{(g/k)\mathrm{d}v}{v-g/k} &= -k\int_0^H \mathrm{d}y \\
\Rightarrow U + \frac{g}{k}\ln\left(\frac{U-g/k}{-g/k}\right) &= -kH \\
\Rightarrow H = -\frac{U}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1-\frac{k}{g}U\right)
\end{aligned} \tag{2.116}
$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2) και (2) θα έχουμε

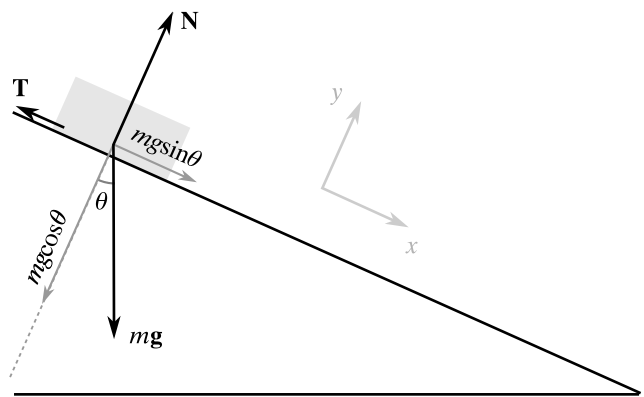
$$
\begin{aligned}
\frac{V}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1+\frac{kV}{g}\right) &= -\frac{U}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1-\frac{k}{g}U\right) \\
\Rightarrow V + U &= -\frac{g}{k}\ln\left[\frac{1-kU/g}{1+kV/g}\right] \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{-k(V+U)/g} &= \frac{1-kU/g}{1+kV/g} \\
\Rightarrow \left(1-\frac{kU}{g}\right)\mathrm{e}^{kU/g} &= \left(1+\frac{kV}{g}\right)\mathrm{e}^{-kV/g}
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 2.50 Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Η γωνία θ που σχηματίζει το επίπεδο με την οριζόντια κατεύθυνση είναι αρχικά μηδενική και αυξάνεται αργά μέχρι τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται. Τότε η γωνία διατηρείται σταθερή. Αν οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι μ_s και μ_k αντίστοιχα, $(\mu_s > \mu_k)$, να βρεθούν ως συναρτήσεις του χρόνου:

(α) η ταχύτητα της μάζας

(β) η θέση της.

Λύση:



Σχήμα 2.16

(α) Την στιγμή πριν αρχίζει να κινείται το σώμα θα έχουμε ισορροπία δυνάμεων όπως φαίνεται στο σχήμα (2.16)

$$mg\cos\theta = N, \quad mg\sin\theta = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$$

όπου N είναι η κάθετη δύναμη που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο σώμα και μ_s ο συντελεστής στατικής τριβής. Αφού διαιρέσουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε

$$\mu_s = \tan\theta$$

Όταν το σώμα κινείται, η εξίσωση κίνησης δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton όπου θα λάβουμε υπόψιν την κινητική τριβή $T = \mu_k N$ και τη δύναμη της βαρύτητας

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg\sin\theta - \mu_k N \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta \\
&= g\cos\theta(\tan\theta - \mu_k) = g\cos\theta(\mu_s - \mu_k) \\
&= \frac{g(\mu_s - \mu_k)}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}} = \frac{g(\mu_s - \mu_k)}{(1+\mu_s^2)^{1/2}} \\
\Rightarrow \int_0^v \mathrm{d}v &= \int_0^t \frac{g(\mu_s - \mu_k)}{(1+\mu_s^2)^{1/2}}\mathrm{d}t \\
\Rightarrow v &= \frac{g(\mu_s - \mu_k)}{(1+\mu_s^2)^{1/2}}t
\end{aligned}$$

(β) Η θέση του σώματος, s, θα είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v &= \frac{g(\mu_s - \mu_k)}{(1+\mu_s^2)^{1/2}}t \\
\Rightarrow s &= s_0 + \frac{1}{2}\frac{g(\mu_s - \mu_k)}{(1+\mu_s^2)^{1/2}}t^2
\end{aligned}$$

όπου s_0 είναι η αρχική θέση του σώματος, τη στιγμή $t = 0$.

Πρόβλημα 2.51 Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από το σημείο $(0,0)$ με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x, ο οποίος είναι οριζόντιος. Ο άξονας y είναι κατακόρυφος. Η σφαίρα κινείται στο επίπεδο xy. Το σημείο βολής βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Κατά τη κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση $-b\boldsymbol{v}$ από την ατμόσφαιρα, όπου $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε τις συναρτήσεις $v_x(t)$ και $v_y(t)$ κατά τη κίνηση της σφαίρας.

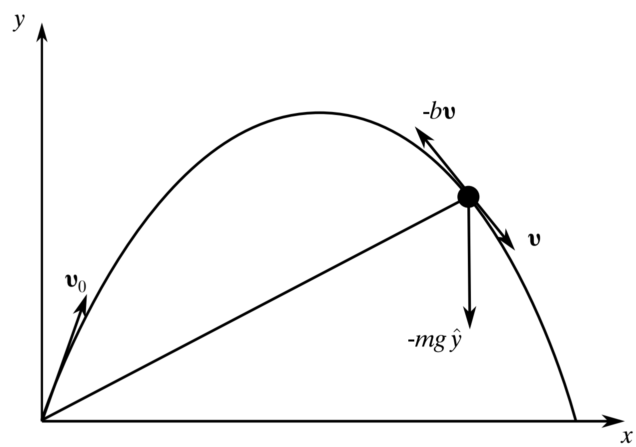
(β) Βρείτε τις συντεταγμένες $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας.

(γ) Γράψτε την εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του χρόνου τ όταν η σφαίρα προσκρούει στο έδαφος, χωρίς να επιχειρήσετε να τη λύστε.

(δ) Δείξτε ότι για $\tau >> m/b$ ο χρόνος αυτός είναι

$$\tau \approx \frac{hb}{mg} + \frac{v_0}{g}\sin\theta$$

Λύση:



Σχήμα 2.17

(α) Η εξίσωση κίνησης για το σώμα θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -mg\hat{\boldsymbol{y}} - b\boldsymbol{v}$$

και χωρίζεται σε δύο διαφορικές εξισώσεις

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -bv_x$$

και

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg - bv_y$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v_y + \frac{gm}{b}\right)$$

Ολοκληρώνοντας τις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις όπου στο ορισμένο ολοκλήρωμα θεωρούμε την αρχική συνθήκη $\boldsymbol{v}_0 = v_0\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + v_0\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}$, θα έχουμε για τη συνιστώσα v_x της ταχύτητας

$$\int_{v_0\cos\theta}^{v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \ln\frac{v_x}{v_0\cos\theta} = -\frac{b}{m}t$$
$$\Rightarrow v_x = v_0\cos\theta\mathrm{e}^{-bt/m}$$

ενώ για την v_y θα πάρουμε

$$\int_{v_0\sin\theta}^{v_y}\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y + gm/b} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v_y + gm/b}{v_0\sin\theta + gm/b}\right) = -\frac{b}{m}t$$
$$\Rightarrow v_y = \left(v_0\sin\theta + \frac{gm}{b}\right)\mathrm{e}^{-bt/m} - \frac{gm}{b}$$

(β) Οι συντεταγμένες του σώματος θα βρεθούν από την ολοκλήρωση των v_x, v_y

$$\int_0^x \mathrm{d}x = v_0\cos\theta\int_0^t \mathrm{e}^{-bt/m}\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow x(t) = v_0\cos\theta\frac{m}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt/m}\right)$$

και

$$\int_0^y \mathrm{d}y = -\frac{gm}{b}\int_0^t \mathrm{d}t + \left(v_0\sin\theta + \frac{gm}{b}\right)\int_0^t \mathrm{e}^{-bt/m}\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow y = -\frac{gm}{b}t + \frac{m}{b}\left(v_0\sin\theta + \frac{gm}{b}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-bt/m}\right)$$

(γ) Όταν το σώμα προσκρούσει τον στόχο, $y=-h$, θα έχουμε από την προηγούμενη σχέση

$$-h = -\frac{gm}{b}\tau + \frac{m}{b}\left(v_0\sin\theta + \frac{gm}{b}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-b\tau/m}\right)$$

(δ) Για $\tau \gg m/b \Rightarrow \tau b/m \gg 1 \Rightarrow \exp(-\tau b/m) \to 0$ και η σχέση της θέσης μας δίνει

$$-\tau + \frac{1}{g}\left(v_0\sin\theta + \frac{gm}{b}\right) = -\frac{bh}{gm}$$
$$\Rightarrow \tau = \frac{bh}{gm} + \frac{v_0\sin\theta}{g} + \frac{m}{b}$$

Πρόβλημα 2.52 Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}$ μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E_1\hat{\boldsymbol{x}} + E_2\hat{\boldsymbol{y}}$ και μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για τις συνιστώσες της ταχύτητας και δείξτε ότι

$$v_z = -\frac{E_2}{B} + A\sin(\omega t + \theta)$$

όπου A και θ σταθερές και $\omega = qB/m$ η κυκλοτρονική συχνότητα.

Λύση:

Το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης $q\boldsymbol{E} = qE_1\hat{\boldsymbol{x}} + qE_2\hat{\boldsymbol{y}}$ και της δύναμης Lorentz $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$. Επομένως η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου δίνεται από την εξίσωση του Newton και θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}E_1\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{q}{m}E_2\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{q}{m}\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ v_x & v_y & v_z\\ B & 0 & 0\end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{q}{m}E_1\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{q}{m}E_2\hat{\boldsymbol{y}} + \omega(v_z\hat{\boldsymbol{y}} - v_y\hat{\boldsymbol{z}})$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης για τις συνιστώσες της ταχύτητας, v_x, v_y, v_z, θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_1}{m}$$
$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{qE_2}{m} + \omega v_z \qquad (2.117)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -\omega v_y$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 v_z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

και αντικαθιστώντας την εξίσωση (2) για την έκφραση $\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_z}{\mathrm{d}t^2} = -\omega \left(\frac{qE_2}{m} + \omega v_z \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 v_z}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 v_z = -\omega \frac{qE_2}{m} \tag{2.118}$$

Η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_z}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 v_z = 0$$

είναι $v_z^o = A\sin(\omega t + \theta)$, όπου A και θ είναι δύο σταθερές που μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες. Εφόσον το δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (2) είναι μια σταθερά, η μερική λύση v_z^μ θα είναι της μορφής

$$v_z^\mu = -\frac{qE_2}{m\omega} = -\frac{E_2}{B}$$

και επομένως η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα είναι

$$v_z = v_z^\mu + v_z^o = -\frac{E_2}{B} + A\sin(\omega t + \theta)$$

Πρόβλημα 2.53 Φορτισμένο σωματίδιο φορτίου q και μάζας m κάνει μονοδιάστατη κίνηση ελκόμενο από κέντρο O με δύναμη $F = -m\Omega^2 x$. Αν στο φορτίο ασκηθεί και εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, $\omega \neq \Omega$, βρείτε τη θέση $x(t)$ και ταχύτητα $v(t)$ του σωματιδίου ως συναρτήσεις του χρόνου, δεδομένου ότι τη στιγμή $t = 0$, $x(0) = 0$ και $v(0) = v_0$.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του φορτισμένου σωματιδίου θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -m\Omega^2 x + qE_0 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \Omega^2 x = \frac{qE_0}{m}\sin(\omega t) \tag{2.119}$$

Η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \Omega^2 x = 0$$
$$\Rightarrow (D^2 + \Omega^2)x = 0$$

όπου $D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $D^2 + \Omega^2$ με ρίζες $\pm i\Omega$, και επομένως η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$x_{o\mu} = C_1' \mathrm{e}^{i\Omega t} + C_2' \mathrm{e}^{-i\Omega t} = C_1 \sin(\Omega t) + C_2 \cos(\Omega t)$$

όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης C_1, C_2 θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.
Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα έχει τη μορφή

$$x_\mu = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_\mu = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_\mu = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)$$

όπου οι σταθερές A, B θα βρεθούν με αντικατάστασης της μερικής λύσης στη διαφορική εξίσωση (2), δηλαδή

$$-A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) + \Omega^2 A\sin(\omega t) + \Omega^2 B\cos(\omega t) = \frac{qE_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow B(\Omega^2 - \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$

και

$$A(\Omega^2 - \omega^2) = \frac{qE_0}{m} \quad \Rightarrow A = \frac{qE_0}{m(\Omega^2 - \omega^2)}$$

Επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα είναι

$$x(t) = x_{o\mu} + x_\mu = C_1\sin(\Omega t) + C_2\cos(\Omega t) + \frac{qE_0}{m(\Omega^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)$$

και η ταχύτητα $\dot{x}(t) = v(t)$ είναι

$$v(t) = C_1\Omega\cos(\Omega t) - C_2\omega\sin(\Omega t) + \frac{qE_0\omega}{m(\Omega^2 - \omega^2)}\cos(\omega t)$$

Από τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$ θα έχουμε

$$x(0) = C_2 = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v(0) = \dot{x}(0) = C_1\Omega + \frac{qE_0\omega}{m(\Omega^2 - \omega^2)} = v_0 \qquad \Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{\Omega} - \frac{qE_0\omega}{m\Omega(\Omega^2 - \omega^2)}$$

Η θέση του σωματιδίου θα είναι

$$x(t) = \left[\frac{v_0}{\Omega} - \frac{qE_0\omega}{m\Omega(\Omega^2 - \omega^2)}\right]\sin(\Omega t) + \frac{qE_0}{m(\Omega^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)$$

και η ταχύτητα $v(t) = \dot{x}(t)$ θα είναι

$$v(t) = \dot{x}(t) = \left[\frac{v_0}{\Omega} - \frac{qE_0\omega}{m\Omega(\Omega^2 - \omega^2)}\right]\Omega\cos\Omega t + \frac{qE_0\omega}{m(\Omega^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

Πρόβλημα 2.54 Σωματίδιο μάζας m είναι υποχρεωμένο να κινείται χωρίς τριβή στην επιφάνεια κατακόρυφου κυλίνδρου ακτίνας R. Το σωματίδιο υπόκειται σε ελκτική δύναμη της μορφής $\boldsymbol{F}_1 = -m\Omega^2\boldsymbol{r}$, όπου το ελκτικό κέντρο βρίσκεται στον άξονα του κυλίνδρου. Στο σωματίδιο εκτός της βαρυτικής και ελκτικής δύναμης, ασκείται και μια κατακόρυφη δύναμη της μορφής $\boldsymbol{F}_2 = f_0\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$ με $\omega \neq \Omega$ και $f_0 =$ σταθερά > 0. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $\phi(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \lambda$, βρείτε την τροχιά του σωματιδίου, δηλαδή βρείτε τις συνιστώσες $\phi(t)$ και $z(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου.

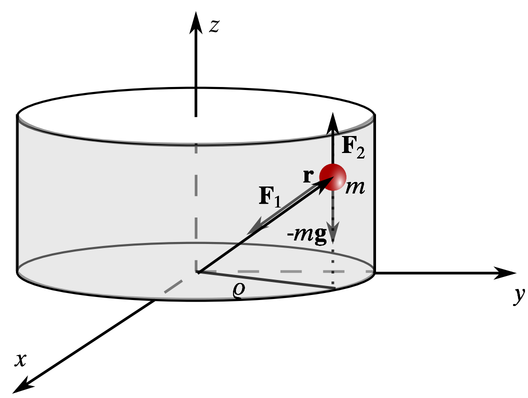
Λύση:

Η ολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα είναι

$$\boldsymbol{F} = -mg\hat{\boldsymbol{z}} - m\Omega^2(R\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}) + f_0\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπου η θέση του σωματιδίου $\boldsymbol{r} = R\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$. Ο δεύτερος νόμος του Newton εκφραζόμενος σε κυλινδρικές συντεταγμένες (βλ. ασκ. 1.15) είναι

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} + m\ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 2.18

Το σωματίδιο κινείται πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου και επομένως $\rho = R$ άρα $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Η εξίσωση κίνησης μας δίνει

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} + m\ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}} \\ \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= -mg\hat{\boldsymbol{z}} - m\Omega^2(R\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}) + f_0 \sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}} \\ \Rightarrow -mR\dot{\phi} &= -m\Omega^2 R \\ \Rightarrow R\lambda^2 &= \Omega^2 R \\ \Rightarrow \lambda &= \Omega \end{aligned} \tag{2.120}$$

όπου η αρχική κυκλική ταχύτητα $\dot{\phi} = \lambda$

$$\begin{aligned} m(R\ddot{\phi}) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= \text{σταθερό} = \dot{\phi}(0) = \lambda \\ \Rightarrow \phi(t) &= \phi(0) + \lambda t = \Omega t \end{aligned}$$

διότι από τη σχέση (2) το $\lambda = \Omega$.
Για την z-συνιστώσα θα έχουμε

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -mg - mz\Omega^2 + f_0 \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{z} + \Omega^2 z &= -g + \frac{f_0}{m}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{2.121}$$

Η ομογενής διαφορική εξίσωση $\ddot{z} + \Omega^2 z = 0$ έχει λύσεις της μορφής

$$z_{o\mu} = C_1 \sin(\Omega t) + C_2 \cos(\Omega t)$$

ενώ η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} z_\mu &= A \sin(\omega t) + B \\ \Rightarrow \dot{z}_\mu &= A\omega \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{z}_\mu &= -A\omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

όπου οι σταθερές A, B προσδιορίζονται όταν θέσουμε την προτεινόμενη μερική λύση στη σχέση (2). Σ αυτή τη περίπτωση θα έχουμε

$$-\omega^2 A \sin(\omega t) + \Omega^2 A \sin(\omega t) + \Omega^2 B = -g + \frac{f_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow A = \frac{f_0}{m(\Omega^2 - \omega^2)}, \qquad B = -\frac{g}{\Omega^2}$$

και επομένως η μερική λύση θα είναι

$$z_\mu(t) = \frac{f_0}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \sin(\omega t) - \frac{g}{\Omega^2}$$

Άρα η γενική λύση $z(t) = z_{o\mu}(t) + z_\mu(t)$, δηλαδή

$$z(t) = C_1 \sin(\Omega t) + C_2 \cos(\Omega t) + \frac{f_0}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \sin(\omega t) - \frac{g}{\Omega^2}$$

και οι σταθερές C_1, C_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $z(0) = \dot{z}(0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= z(0) = C_2 - \frac{g}{\Omega^2} \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{g}{\Omega^2} \\ 0 &= \dot{z}(0) = \Omega C_1 + \frac{f_0 \omega}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \\ \Rightarrow C_1 &= -\frac{f_0 \omega}{m\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

και επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα είναι

$$z(t) = -\frac{f_0 \omega}{m\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \sin(\Omega t) + \frac{g}{\Omega^2} \cos(\Omega t) + \frac{f_0}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \sin(\omega t) - \frac{g}{\Omega^2}$$

Πρόβλημα 2.55 Μια αλυσίδα μήκους L και σταθερής γραμμικής πυκνότητας, $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}x$, ολισθαίνει πάνω σ' ένα λείο τραπέζι και μέσα από ένα σωλήνα (που την καθοδηγεί) πέφτει από την άκρη του τραπεζιού λόγω της βαρύτητας.

(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης της αλυσίδας και βρείτε το χρόνο t_s όταν το πίσω μέρος της αλυσίδας έχει φύγει από το τραπέζι. Υποθέστε ότι το ποσοστό του μήκους της αλυσίδας που κρεμιέται από το τραπέζι την αρχική στιγμή $t = 0$ είναι f και η αρχική ταχύτητά του είναι μηδέν.

(β) Υποθέτοντας ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ της αλυσίδας και του τραπεζιού είναι μ, βρείτε τον χρόνο t_s που κάνει η αλυσίδα για να πέσει από το τραπέζι. Αποδείξτε ότι ο χρόνος t_s μπορεί να γραφτεί ως εξής

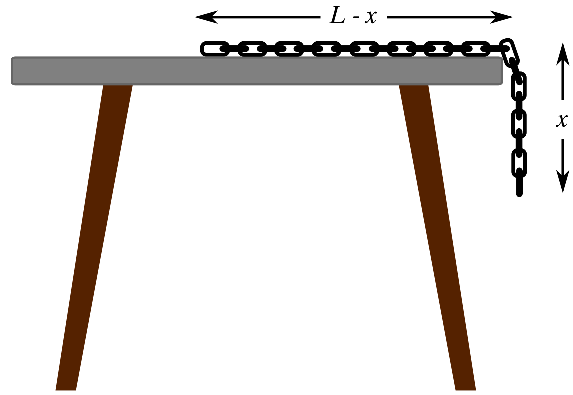
$$t_s = \tau \cosh^{-1}\left(\frac{1}{1 - s_0/g\tau^2}\right)$$

όπου $\tau = (L/g(1+\mu))^{1/2}$ είναι ένας χαρακτηριστικός χρόνος, και $s_0 = L - x_0 = L - fL = L(1-f)$ είναι το μήκος της αλυσίδας που βρίσκεται πάνω στο τραπέζι την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$.

Λύση:

(α) Ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή t, το μήκος της αλυσίδας που έχει εγκαταλείψει το τραπέζι είναι x όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ότι M είναι η ολική μάζα της αλυσίδας.
Η αλυσίδα θα αρχίσει να πέφτει λόγω της δύναμης βαρύτητας $F = mg = (M/L)gx$, που επιδρά στο μέρος της αλυσίδας που κρεμιέται, όπου η μάζα αυτού είναι $m = (M/L)x$. Επομένως η εξίσωση κίνησης της αλυσίδας μπορεί να γραφτεί

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L}xg \tag{2.122}$$



Σχήμα 2.19

όπου v είναι η ταχύτητα της αλυσίδας και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας Παρατηρούμε ότι $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t) = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)v$, άρα η σχέση (2) μπορεί να γραφτεί

$$
\begin{aligned}
v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \frac{g}{L}x \\
\Rightarrow \int_0^v v\mathrm{d}v &= \frac{g}{L}\int_{fL}^{x} x\mathrm{d}x \\
\Rightarrow v^2 &= \frac{g}{L}(x^2 - f^2L^2)
\end{aligned}
\tag{2.123}
$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = fL$, και $v(0) = 0$. Επιπλέον, ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση (2) θα έχουμε

$$\int_{fL}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(g/L)(x^2 - f^2L^2)}} = \int_0^{t_s} \mathrm{d}t$$

όπου t_s είναι ο ολικός χρόνος που κάνει η αλυσίδα να εγκαταλείψει το τραπέζι. Άρα

$$t_s = \sqrt{\frac{L}{g}}\left[\cosh^{-1}\left(\frac{1}{f}\right)\right]$$

(β) Αν εισάγουμε τη δύναμη της τριβής ολίσθησης, $-\mu N = -\mu(M/L)(L-x)g$ (N είναι η δύναμη της αντίδρασης του τραπεζιού), που θα ασκείται στο μέρος της αλυσίδας που βρίσκεται πάνω στο τραπέζι, η εξίσωση κίνησης θα είναι παρόμοια της σχέσης (2)

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L}xg - \frac{M}{L}(L-x)\mu g$$

με αρχικές συνθήκες ($x(0) = x_0 = fL$, και $\dot{x}(0) = 0$)

$$\Rightarrow \tau^2\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = x - \tau^2\mu g \tag{2.124}$$

όπου έχουμε ορίσει το χαρακτηριστικό χρόνο $\tau = (L/g(1+\mu))^{1/2}$.
Ορίζουμε το μετασχηματισμό της θέσης x σε x', όπου

$$x' = x - \tau^2\mu g$$

Άρα η σχέση (2) θα γραφτεί

$$\tau^2\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = x'$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{\tau^2}x' = 0$$

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$x'(t) = c_1 \mathrm{e}^{t/\tau} + c_2 \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης c_1, c_2, θα καθοριστούν από τις αρχικές συνθήκες: $x'(0) = x(0) - \tau^2 \mu g$ και $\dot{x}'(0) = 0$. Επομένως, έχουμε

$$c_1 = c_2 = \frac{x'(0)}{2}$$

και η εξίσωση κίνησης γράφεται ως εξής

$$x'(t) = x'(0)\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$
$$\Rightarrow x(t) = g\mu\tau^2 + (x_0 - g\mu\tau^2)\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

και επομένως ο ολικός χρόνος ολίσθησης t_s, θα βρεθεί όταν $x(t = \text{ολικός χρόνος}) = L$, ως

$$t_s = \tau\cosh^{-1}\left(\frac{L - g\mu\tau^2}{x_0 - g\mu\tau^2}\right) \tag{2.125}$$

Το όρισμα της συνάρτησης $\cosh^{-1}$ γράφεται

$$\frac{L - g\mu\tau^2}{x_0 - g\mu\tau^2} = \frac{L - g\mu\tau^2}{L - s_0 - g\mu\tau^2} = \frac{1}{1 - s_0/(L - g\mu\tau^2)} = \frac{1}{1 - s_0/g\tau^2}$$

όπου $L - g\mu\tau^2 = L/(1+\mu) = g\tau^2$ και τ είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος $\tau = [L/g(1+\mu)]^{1/2}$. Τελικώς η σχέση (2) γράφεται

$$t_s = \tau\cosh^{-1}\left(\frac{1}{1 - s_0/g\tau^2}\right)$$

Πρόβλημα 2.56 Σωματίδιο βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_0 και βρίσκεται υπό την επίδραση της βαρύτητας σε μέσο που προβάλλει αντίσταση μέτρου mkv^2. Δείξτε ότι το σωματίδιο φθάνει το μέγιστο ύψος h, πάνω από το σημείο εκτόξευσης και δίδεται από τη σχέση

$$h = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{g}\right)$$

Αν v_1, v_2 είναι οι ταχύτητες του σωματιδίου κατά τις δύο στιγμές που βρίσκεται στο ύψος $h/2$, δείξτε ότι

$$v_1^2 + v_2^2 = v_0^2 \mathrm{e}^{-kh}$$

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου καθώς κινείται προς τα πάνω θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - mkv^2$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -(g + kv^2)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v^2}{g + kv^2} = -\int_0^x \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_{\sqrt{k/g}\,v_0}^{\sqrt{k/g}\,v} \frac{(g/k)\mathrm{d}\omega^2}{1+\omega^2} = -\frac{2kx}{g}$$

όπου η νέα μεταβλητή $\omega = \sqrt{g/k}\,v$. Η παραπάνω ολοκλήρωση μας δίνει

$$\begin{aligned} \frac{g}{k}\ln\left(\frac{1+(k/g)v^2}{1+(k/g)v_0^2}\right) &= -\frac{2kx}{g} \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+(k/g)v_0^2}{1+(k/g)v^2}\right) \end{aligned} \tag{2.126}$$

Αυτή η εξίσωση θα μας δώσει το μέγιστο ύψος, h, του σωματιδίου όταν $v = 0$, δηλαδή

$$h = \frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{kv_0^2}{g}\right)$$

Η ταχύτητα v_1 κατά την άνοδό του θα βρεθεί από τη σχέση (2) όταν το $x = h/2$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} &= \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+(k/g)v_0^2}{1+(k/g)v_1^2}\right) \\ \Rightarrow 1+\frac{k}{g}v_1^2 &= \left(1+\frac{k}{g}v_0^2\right)\mathrm{e}^{-kh} \\ \Rightarrow v_1^2 &= \frac{g}{k}\left(1+\frac{k}{g}v_0^2\right)\mathrm{e}^{-kh} - \frac{g}{k} \end{aligned} \tag{2.127}$$

Κατά την κάθοδό του η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου θα είναι

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg - mkv^2 \\ \Rightarrow v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= g - kv^2 \end{aligned}$$

όπου έχουμε λάβει το άξονα y να είναι θετικός καθώς το σωματίδιο κινείται από το μέγιστο ύψος προς την επιφάνεια της Γης. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g}\int_0^{v_2} \frac{\mathrm{d}v^2}{1-(k/g)v^2} &= \int_0^{h/2}\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \frac{1}{2g}\int_0^{(k/g)v_2^2} \frac{(g/k)\mathrm{d}\omega}{1-\omega} &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

όπου η νέα μεταβλητή $\omega = (k/g)v^2$. Η ολοκλήρωση θα μας δώσει

$$\begin{aligned} -\ln\left(1-\frac{k}{g}v_2^2\right) &= hk \\ \Rightarrow 1-\frac{k}{g}v_2^2 &= \mathrm{e}^{-hk} \\ \Rightarrow v_2^2 &= \frac{g}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-kh}\right) \end{aligned} \tag{2.128}$$

Αν προσθέσουμε τις σχέσεις (2) και (2) θα έχουμε

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{g}{k}\left[1-\mathrm{e}^{-kh} - 1 + \left(1+\frac{k}{g}v_0^2\right)\mathrm{e}^{-kh}\right] = v_0^2\mathrm{e}^{-kh}$$

Πρόβλημα 2.57 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(0,0)$ και έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μια δύναμη τριβής $-mkv_y\hat{\boldsymbol{y}}$, ανάλογη της συνιστώσας v_y της ταχύτητας του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

(α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου;

(β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. Μετά πόσο χρόνο η κατακόρυφη συνιστώσα της γίνεται $v_0/2$;

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy;

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά;

Λύση:

(α) Η εξίσωση κίνησης για το σωματίδιο όταν δρα η δύναμη $-mkv_y\hat{\boldsymbol{y}}$ είναι

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -mkv_y\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -kv_y \end{cases}$$

(β) Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις κίνησης για τις συνιστώσες της ταχύτητας με τις αρχικές συνθήκες

$$\boldsymbol{v}(0) = v_0\cos\frac{\pi}{4}\hat{\boldsymbol{x}} + v_0\sin\frac{\pi}{4}\hat{\boldsymbol{y}} = v_0\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + v_0\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\boldsymbol{y}}$$

θα έχουμε

$$\int_{v_0\sqrt{2}/2}^{v_x} \mathrm{d}v_x = 0$$

$$\Rightarrow v_x = v_0\frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$\int_{v_0\sqrt{2}/2}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{v_y} = -k\int_0^t \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \ln\frac{v_y 2}{v_0\sqrt{2}} = -kt$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

Αν η συνιστώσα v_y της ταχύτητας είναι $v_0/2$, θα έχουμε

$$\frac{v_0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0\mathrm{e}^{-k\tau} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{-k\tau}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{2k}\ln 2$$

(γ) Η εξίσωση της τροχιάς στο επίπεδο xy θα βρεθεί από την ολοκλήρωση των εξισώσεων των συνιστωσών της ταχύτητας

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v_0\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow x = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} t$$

και

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \mathrm{e}^{-kt}$$
$$\Rightarrow \int_0^y \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \int_0^t \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow y = \frac{v_0\sqrt{2}}{2k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$$

Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου στο επίπεδο xy θα βρεθεί από την αντικατάσταση του χρόνου $t = 2x/(v_0\sqrt{2})$ (που υπολογίστηκε από τη συνιστώσα x) στη συνιστώσα y, δηλαδή

$$y = \frac{v_0\sqrt{2}}{2k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2kx/(\sqrt{2}v_0)}\right)$$

(δ) Η μέγιστη τιμή της συνιστώσας y θα βρεθεί αφού πρώτα θέσουμε την $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \mathrm{e}^{-kt} = 0 \quad \Rightarrow t \to \infty$$

και επομένως η $y_m = y(t \to \infty)$

$$y_m = \frac{v_0}{\sqrt{2}\,k}$$

Πρόβλημα 2.58 Σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0. Το σωματίδιο υπόκειται σε ολική αντίσταση μέτρου $F = kmxv$, όπου v, x, είναι το μέτρο της ταχύτητας και της θέσης του αντίστοιχα σε τυχούσα χρονική στιγμή και k θετική σταθερά.

(α) Υπολογίστε την απόσταση, s, που διανύει το σωματίδιο μέχρι να ηρεμήσει ως συνάρτηση των γνωστών μεγεθών.

(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) στην περίπτωση που η ολική αντίσταση είναι της μορφής $F = kmxv^2$.

Λύση:

(α) Η εξίσωση κίνησης για το σωματίδιο θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mkvx$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kxv$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kxv$$
$$\Rightarrow v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kxv$$
$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = -k\int_0^s x\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow v = v_0 - \frac{k}{2}s^2$$

Όταν το σώμα θα σταματήσει $v = 0$ και επομένως η σχέση της ταχύτητας και θέσης θα είναι

$$0 = v_0 - \frac{k}{2}s^2$$
$$\Rightarrow s = \sqrt{\frac{2v_0}{k}}$$

(β) Στην περίπτωση που η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι $F = -mkxv^2$, η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -mkxv^2 \\
\Rightarrow v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -kxv^2 \\
\Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -k\int_0^s x\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) &= -\frac{k}{2}s^2 \\
\Rightarrow v &= v_0 \mathrm{e}^{-ks^2/2}
\end{aligned}
$$

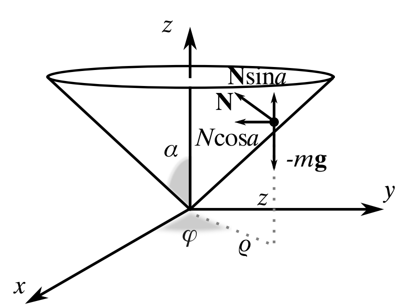
Για $v = 0$ έπεται ότι $s \to \infty$.

Πρόβλημα 2.59 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο εσωτερικό ορθού κυκλικού κώνου γωνίας 2α κάτω από την επίδραση της βαρύτητας.

(α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

(β) Βρείτε τη θέση του σωματιδίου για τη συνιστώσα $z(t)$ κάτω από τις αρχικές συνθήκες $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \dot{\phi}(0) = 0$.

Λύση:



Σχήμα 2.20

(α) Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N} - mg\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπου $\boldsymbol{F}$ η ολική δύναμη, $\boldsymbol{N} = -N\cos\alpha\hat{\boldsymbol{\rho}} + N\sin\alpha\hat{\boldsymbol{z}}$ η δύναμη αντίδρασης του κώνου που ασκείται στο σωματίδιο και $-mg\hat{\boldsymbol{z}}$ η δύναμη βαρύτητας.
Η επιτάχυνση σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα είναι

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Επειδή το σωματίδιο κινείται πάνω στο κώνο γωνίας 2α, οι συντεταγμένες ρ, z συνδέονται με τη σχέση

$$\rho = z\tan\alpha \Rightarrow \dot{\rho} = \dot{z}\tan\alpha \Rightarrow \ddot{\rho} = \ddot{z}\tan\alpha$$

και επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$m(\ddot{z}\tan\alpha - z\tan\alpha\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + m(z\tan\alpha\ddot{\phi} + 2\dot{z}\dot{\phi}\tan\alpha)\hat{\boldsymbol{\phi}} + m\ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}} = -N\cos\alpha\hat{\boldsymbol{\rho}} + (-mg + N\sin\alpha)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Για την ακτινική συνιστώσα έχουμε

$$\Rightarrow m\tan\alpha(\ddot{z} - z\dot{\phi}^2) = -N\cos\alpha \qquad (2.129)$$

Για την ϕ-συνιστώσα

$$\begin{aligned}
\frac{m}{z}\tan\alpha(z^2\ddot{\phi}+2z\dot{z}\dot{\phi}) &= 0\\
\Rightarrow \frac{\tan\alpha}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z^2\dot{\phi}) &= 0\\
\Rightarrow z^2\dot{\phi} &= \text{σταθερό} = L\\
\Rightarrow \dot{\phi} &= \frac{L}{z^2}
\end{aligned} \tag{2.130}$$

και για την z-συνιστώσα

$$\begin{aligned}
m\ddot{z} &= -mg + N\sin\alpha\\
\Rightarrow m\ddot{z} + mg - N\sin\alpha &= 0
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Απαλείφοντας το N από τις σχέσεις (2) και (2) θα έχουμε

$$m\ddot{z} + mg + m\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(\ddot{z} - z\dot{\phi}^2) = 0$$

και αντικαθιστώντας την έκφραση του $\dot{\phi}$ της σχέσης (2) θα έχουμε

$$\ddot{z} - \frac{\sin^2\alpha L^2}{z^3} + g\cos^2\alpha = 0 \tag{2.132}$$

(β) Αν η αρχική ταχύτητα $\dot{\phi}(0) = 0$ τότε από τη σχέση (2) θα έχουμε

$$L = z^2\dot{\phi} \quad \Rightarrow L = 0$$

Άρα η διαφορική εξίσωση (2) θα είναι

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= -g\cos\alpha\\
\Rightarrow \dot{z} &= -(g\cos\alpha)t\\
\Rightarrow z(t) &= z_0 - \frac{1}{2}(g\cos\alpha)t^2
\end{aligned}$$

δηλαδή το σωματίδιο θα κινείται πάνω σε μια γενέτειρα του κώνου με επιβράδυνση $-g\cos\alpha$.

Πρόβλημα 2.60 Παίκτης του μπάσκετ κέρδισε φάουλ και εκτελεί δύο ελεύθερες βολές. Το κέντρο του καλαθιού είναι σε οριζόντια απόσταση $4,21\,\mathrm{m}$ από το σημείο εκτέλεσης του φάουλ και σε ύψος $3,05$ m από το δάπεδο. Στην πρώτη προσπάθεια ο παίκτης ρίχνει την μπάλα υπό γωνία 35^o πάνω από την οριζόντια διεύθυνση και με ταχύτητα $v_0 = 4,88\,\mathrm{m/s}$. μπάλα ρίχνεται από ύψος $1,83\,\mathrm{m}$ πάνω από το δάπεδο. Αυτή η βολή αποτυγχάνει.

(α) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φθάνει η μπάλα;

(β) Σε τι οριζόντια απόσταση στο πάτωμα από το σημείο ελεύθερης βολής κτυπά η μπάλα το πάτωμα;

Για τη δεύτερη βολή η μπάλα περνά από το κέντρο του καλαθιού. Σε αυτή τη βολή ο παίκτης ρίχνει την μπάλα πάλι υπό γωνία 35^o και από ύψος $1,83\,\mathrm{m}$ από το δάπεδο.

(γ) Τι αρχική ταχύτητα έδωσε ο παίκτης στην μπάλα στην δεύτερη προσπάθεια;

(δ) Για τη δεύτερη προσπάθεια ποιο είναι το μέγιστο ύψος που έφτασε η μπάλα; Σ' αυτό το σημείο πόσο μακριά βρίσκεται η μπάλα από το καλάθι κατά την οριζόντια διεύθυνση;

Λύση:

Ο παίκτης ρίχνει την μπάλα και η ταχύτητα της μπάλας έχει τις εξής συντεταγμένες

$$v_{0x} = v_0 \cos a_0, \qquad v_{0y} = v_0 \sin a_0$$

(α) Στο μέγιστο ύψος έχουμε $v_y = 0$

$$\begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \sin a_0 = 4,88\,\mathrm{m/s} \sin 35^o = 2,80\,\mathrm{m/s} \\ a_y &= -9,80\,\mathrm{m/s}^2 \\ v_y^2 &= v_{0y}^2 + 2\,a_y(y - y_0) \\ \Rightarrow y - y_0 &= \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y} = 0,4\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Άρα το ύψος πάνω από το έδαφος είναι

$$0,4\,\mathrm{m} + 1,83\,\mathrm{m} = 2,23\,\mathrm{m}$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την κάθετη κίνηση για να βρούμε πόσο χρόνο βρίσκεται η μπάλα στον αέρα

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ \Rightarrow -1,83\,\mathrm{m} &= (2,8\,\mathrm{m/s})t - (4,9\,\mathrm{m/s}^2)t^2 \\ \Rightarrow 4,9t^2 - 2,8t - 1,83 &= 0 \end{aligned}$$

Από τη δευτεροβάθμια εξίσωση έχουμε

$$t = 0,286 \pm 0,675\,\mathrm{s}$$

Το t πρέπει να είναι θετικό, άρα $t = 0,961\,\mathrm{s}$.
Γι΄ αυτό το χρονικό διάστημα πρέπει να βρούμε την οριζόντια μετατόπιση

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 3,84\,\mathrm{m}$$

(γ) Δεν γνωρίζουμε ούτε το χρόνο ούτε την ταχύτητα v_0 ώστε η μπάλα να φτάσει στο καλάθι. Από τις εξισώσεις κίνησης της μπάλας κατά την οριζόντια και την κάθετη κατεύθυνση έχουμε

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_{0x}t \\ \Rightarrow 4,21\,\mathrm{m} &= (v_0 \sin 35^o)t \\ \Rightarrow v_0 t &= 5,139\,\mathrm{m} \\ y - y_0 &= v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ \Rightarrow 1,22\,\mathrm{m} &= (v_0 \sin 35^o)t - (4,9\,m/s^2)t^2 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} t &= 0,594\,\mathrm{s} \\ v_0 &= 8,65\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

(δ) Στο μέγιστο ύψος η y συντεταγμένη της ταχύτητας είναι μηδέν. Άρα

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_0y^2 + 2a_y(y - y_0) \\ \Rightarrow y - y_0 &= \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y} = \frac{0 - (4,96\,\mu/\varsigma)^2}{2(-9,8\mu/\varsigma^2)} = 1,26\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Άρα το μέγιστο ύψος είναι $1,83\,m+1,26\,m = 3,09\,m$. Μελετώντας την κάθετη μετατόπιση μπορούμε να βρούμε και τον χρόνο που χρειάστηκε η μπάλα για να φτάσει σ' αυτό το σημείο

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$
$$\Rightarrow t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = 0,506\,\mathrm{s}$$

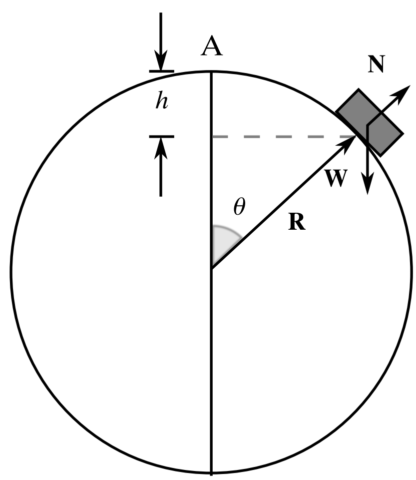
Γνωρίζοντας το χρόνο μπορούμε να βρούμε την οριζόντια απόσταση που βρίσκετε το σημείο από τον παίκτη

$$x - x_0 = v_{0x} t = 3,59\,\mathrm{m}$$

Άρα η απόσταση από το καλάθι είναι $4,21\,\mathrm{m} - 3,59\,\mathrm{m} = 0,62\,\mathrm{m}$

Πρόβλημα 2.61 Ένα σώμα ολισθαίνει προς τα κάτω, χωρίς αρχική ταχύτητα και χωρίς τριβές, από την κορυφή Α μιας σφαίρας ακτίνας Ρ. Σε ποια κατακόρυφη απόσταση από την κορυφή της σφαίρας θα ξεφύγει από την επιφάνειά της; Πόση θα είναι η ταχύτητα του σώματος στο σημείο αυτό;

Λύση:



Σχήμα 2.21

Όταν το σώμα γλιστρά πάνω στη σφαίρα ασκούνται πάνω του δύο δυνάμεις: το βάρος του και η αντίδραση της επιφάνειας της σφαίρας $\boldsymbol{N}$. Η ολική δύναμη κατά την ακτινική κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι

$$F = -mg\cos\theta + N$$

Επειδή όμως κινείται πάνω σε κύκλο ακτίνας R έχουμε

$$F = F_{\text{κεντρομόλος}} = -\frac{mv^2}{R}$$

Άρα

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

Η ταχύτητα του σώματος, v, εξαρτάται από την απόσταση $h = R(1-\cos\theta)$. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

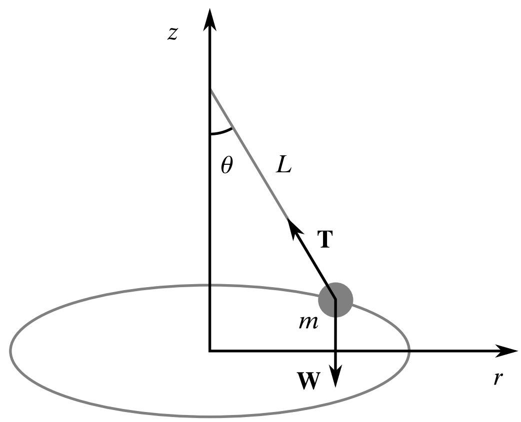
Άρα

$$N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$$

Στο σημείο διαφυγής η δύναμη $\boldsymbol{N}$ μηδενίζεται άρα $\cos\theta_\Delta = 2/3$ και $h = R(1-\cos\theta) = R/3$.

Πρόβλημα 2.62 Ένα μικρό σώμα μάζας m είναι αναρτημένο σ' ένα σχοινί μήκους L και περιστρέφεται πάνω σ' ένα οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα v. Ποιος είναι ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής;

Λύση:



Σχήμα 2.22

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει το σχοινί με την κατακόρυφο τότε η ακτίνα του κύκλου είναι

$$R = L\sin\theta$$

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα είναι το βάρος $\boldsymbol{W}$ και η τάση του νήματος $\boldsymbol{T}$. Αναλύουμε την τάση στις συνιστώσες της

$$T_r = T\sin\theta \quad \text{και} \quad T_z = T\cos\theta$$

Ισχύει

$$\begin{aligned} T_z - W &= 0 \\ \Rightarrow T\cos\theta &= mg \end{aligned} \tag{2.133}$$

Η ακτινική επιτάχυνση είναι ίση με v^2/R άρα

$$T_r = T\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \tag{2.134}$$

Διαιρώντας την (2) με την (2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{v^2}{Rg} \\ \Rightarrow v^2 &= Rg\tan\theta \end{aligned}$$

Έστω τ ο χρόνος περιστροφής.

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi R}{\tau} = \sqrt{Rg\tan\theta} \\ \Rightarrow \tau &= \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.63 Σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0. Το σωματίδιο υπόκειται σε ολική αντίσταση μέτρου $mk\sqrt{v}$, όπου v το μέτρο της ταχύτητας του σε τυχούσα χρονική στιγμή και k θετική σταθερά.

(α) Υπολογίστε την απόσταση, s, που διανύει το σωματίδιο μέχρις ότου ηρεμήσει.

(β) Υπολογίστε το χρόνο, $t_{1/2}$, που απαιτείται ώστε η ταχύτητα του σωματιδίου να γίνει $v_0/2$.

Λύση:

(α) Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -mk\sqrt{v} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -k\sqrt{v} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{k}{\sqrt{v}}
\end{aligned}
$$

Ολοκληρώνοντας από την αρχική ταχύτητα ως την τελική που είναι μηδέν έχουμε την απόσταση που θα διανύσει το σωματίδιο μέχρι να σταματήσει

$$
\begin{aligned}
\int_{v_0}^{0} \sqrt{v}\,\mathrm{d}v &= -\int_0^s k\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow s &= \frac{2}{3k}\sqrt{v_0^3}
\end{aligned}
$$

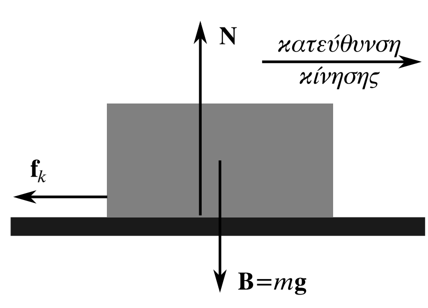
(β) Από την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -k\sqrt{v} \\
\Rightarrow \int_{v_0}^{v_0/2} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}} &= -\int_0^{t_{1/2}} k\mathrm{d}t \\
\Rightarrow t_{1/2} &= \frac{\sqrt{v_0}}{2k}\left(2-\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 2.64 Σε μια παγωμένη λίμνη κάποιος χτυπά ένα δίσκο και του δίνει αρχική ταχύτητα 20 m/s. Βρείτε το συντελεστή ολίσθησης ανάμεσα στο δίσκο και τον πάγο, εάν ξέρετε ότι ο δίσκος ολίσθησε συνολικά 120 m προτού σταματήσει. Δίνεται $g = 9,8$ m/s^2.

Λύση:

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο δίσκο είναι (α) το βάρος του $B = mg$, (β) η κάθετη αντίδραση του πάγου (N) και (γ) η δύναμη της τριβής (f_k), η οποία προκαλεί μια σταθερή επιβράδυνση πάνω στο δίσκο. Ο δίσκος ισορροπεί κατά την κατακόρυφη διεύθυνση ενώ κινείται επιβραδυνόμενος κατά την οριζόντια διεύθυνση. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, οι συνθήκες κίνησής του είναι



Σχήμα 2.23

$$
-f_k = ma \tag{2.135}
$$

$$N - mg = 0 \tag{2.136}$$

αλλά

$$f_k = \mu_k N \tag{2.137}$$

Από τις σχέσεις (2), (2) και (2) έπεται ότι η επιτάχυνση του δίσκου είναι

$$a = -\mu_k g \tag{2.138}$$

Θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο δίσκος βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ και έχει αρχική ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_0$, η εξίσωση ταχύτητας-χρόνου του δίσκου είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 - at \tag{2.139}$$

και η εξίσωση θέσης-χρόνου

$$x = \upsilon_0 t - a\frac{t^2}{2} \tag{2.140}$$

Απαλείφοντας το χρόνο από τις εξισώσεις (2) και (2) καταλήγουμε στη σχέση

$$x = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $\upsilon = 0$ (για την τελική ταχύτητα του δίσκου) και αντικαθιστώντας την επιτάχυνση από τη σχέση (2), προκύπτει ότι ο συντελεστής ολίσθησης είναι

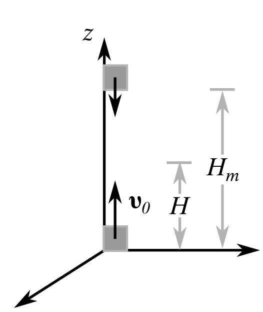
$$\mu_k = \frac{\upsilon_0^2}{2gx} = \frac{(20\ \mathrm{m/s^2})^2}{2 \times 9,8 \times\ \mathrm{m/s^2} \times 120\ \mathrm{m}} = 0,17$$

Πρόβλημα 2.65 Σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 30\,\mathrm{m/s^2}$. Ταυτόχρονα ένα δεύτερο σώμα αφήνεται από ύψος H_m να πέσει ελεύθερα. Τα δύο σώματα συναντιούνται όταν το πρώτο απέχει από το έδαφος το $1/3$ του μέγιστου ύψους στο οποίο μπορεί να ανεβεί. Να βρεθεί το ύψος H_m. Δίνεται $g = 10$ $\mathrm{m/s^2}$

Λύση:

Το πρώτο σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά τον άξονα z (βλ. σχήμα 2.24) με επιτάχυνση αντιπαράλληλη με τον άξονα z και μέτρο ίσο με την επιτάχυνση της βαρύτητας

$$a\hat{\boldsymbol{z}} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 2.24

Η ταχύτητά του κάθε χρονική στιγμή t δίδεται από τη σχέση

$$\upsilon\hat{\boldsymbol{z}} = (\upsilon_0 - gt)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.141}$$

και η θέση του από τη σχέση

$$h\hat{\boldsymbol{z}} = \left(\upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.142}$$

Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει είναι το σημείο στο οποίο η ταχύτητά του μηδενίζεται, άρα από τις σχέσεις (2) και (2) έπεται

$$h_{\max}\hat{\boldsymbol{z}} = \left(\frac{\upsilon_0^2}{2g}\right)\hat{\boldsymbol{z}} = 45 \text{ m} \tag{2.143}$$

Τα δύο σώματα συναντιούνται τη χρονική στιγμή t_1 όπου το πρώτο σώμα βρίσκεται σε ύψος $(h_{\max}/3)\hat{\boldsymbol{z}}$, άρα από τη σχέση (2) έπεται

$$\frac{h_{\max}}{3}\hat{\boldsymbol{z}} = \left(\upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2\right)\hat{\boldsymbol{z}} \overset{(2)}{\Longrightarrow} 15 = 30t_1 - 5t_1^2$$
$$\Rightarrow t_1^2 - 6t_1 + 3 = 0$$

Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι τα δύο σώματα συναντιούνται τις χρονικές στιγμές $t_1' = 0.55$ s και $t_1'' = 5.45$ s που αντιστοιχούν στην άνοδο και την κάθοδο του πρώτου σώματος. Η εξίσωση θέσης-χρόνου του δεύτερου σώματος είναι

$$H\hat{\boldsymbol{z}} = \left(H_m - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.144}$$

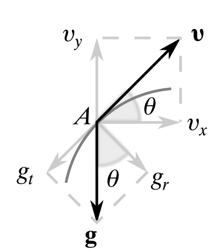
Τη χρονική στιγμή t_1 όπου τα δύο σώματα συναντιούνται ισχύει: $H = h_{\max}/3$, άρα λόγω της σχέσης (2)

$$H = \frac{h_{\max}}{3} = H_m - \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow H_m = \frac{h_{\max}}{3} + \frac{1}{2}gt_1^2$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει (με αριθμητική αντικατάσταση) ότι αν τα δύο σώματα συναντιούνται τη χρονική στιγμή $t_1 = t_1' = 0,55$ s (δηλαδή όταν το πρώτο σώμα ανεβαίνει), τότε το δεύτερο σώμα έχει αφεθεί από ύψος $H_m = 16,5$ m, ενώ εάν συναντιούνται τη χρονική στιγμή $t_1 = t_1'' = 5,45$ s, τότε το ύψος από το οποίο έχει αφεθεί το δεύτερο σώμα είναι $H_m = 164$ m.

Πρόβλημα 2.66 Σώμα εκτελεί βολή με αρχική ταχύτητα υ_0 υπό γωνία ϕ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σώματος (δηλαδή την απόσταση R από το εκάστοτε κέντρο περιστροφής καθώς το σώμα εκτελεί καμπυλόγραμμο κίνηση) ως συνάρτηση του χρόνου, t, αγνοώντας την αντίσταση του αέρα. *Υπόδειξη: Η συνιστώσα της βαρύτητας που είναι κάθετη στην τροχιά παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.*

Λύση:



Σχήμα 2.25

Έστω ότι μια τυχαία χρονική στιγμή t το σώμα βρίσκεται στη θέση A και έχει ταχύτητα υ, η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα. Το ρόλο της κεντρομόλου επιτάχυνσης (εφ όσον εκτελείται καμπυλόγραμμη κίνηση) δεν μπορεί παρά να τον παίζει η συνιστώσα της επιτάχυνσης της βαρύτητας που είναι κάθετη στο σημείο A της τροχιάς και επομένως σχηματίζει γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα (βλέπε σχήμα 2.25). Έτσι αν P είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς

$$g_r = \frac{\upsilon^2}{R} \tag{2.145}$$

Από το σχήμα επίσης βλέπουμε ότι

$$g_r = g\cos\theta, \quad \text{και} \quad \cos\theta = \upsilon_x/\upsilon$$

άρα

$$g_r = g\upsilon_x/\upsilon \tag{2.146}$$

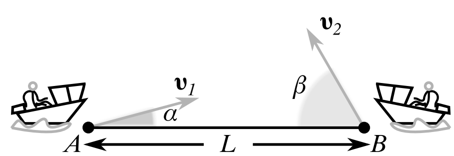
Από τις (2) και (2) έχουμε ότι

$$R = \upsilon^3/g\upsilon_x = (\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2)^{3/2}/g\upsilon_x \tag{2.147}$$

Για τη βολή ξέρουμε ότι: $\upsilon_x = \upsilon_0\cos\phi$ και $\upsilon_y = \upsilon_0\sin\phi - gt$ οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (2) έχουμε

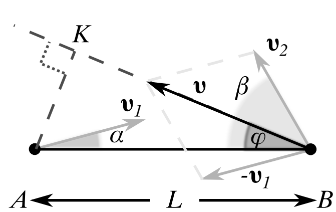
$$R = \frac{(\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 gt\sin\phi + g^2t^2)^{3/2}}{\upsilon_0 g\cos\phi}$$

Πρόβλημα 2.67 Από τον Άλιμο και τη Βουλιαγμένη (απόσταση L) ξεκινούν ταυτόχρονα δύο ταχύπλοα κινούμενα ευθύγραμμα και ομαλά, ένα από τα οποία κινείται με ταχύτητα υ_1 και το άλλο με ταχύτητα υ_2. Η ταχύτητα του ενός σχηματίζει συνεχώς γωνία a με την ευθεία AB που συνδέει τα σημεία εκκίνησης ενώ της δεύτερης σχηματίζει γωνία β. Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσουν τα ταχύπλοα;
(*Υπόδειξη: η άσκηση λύνεται εύκολα θεωρώντας παρατηρητή που βρίσκεται στο ένα από τα δύο ταχύπλοα και θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο*)



Σχήμα 2.26

Λύση:



Σχήμα 2.27

Οι συνθήκες που περιγράφονται στην εκφώνηση της άσκησης αυτής αναφέρονται, προφανώς, σε ακίνητο παρατηρητή. Έστω, όμως, σύστημα Ο το οποίο κινείται μαζί με το πρώτο ταχύπλοο (αυτό που ξεκινά από το σημείο Α και τρέχει με ταχύτητα υ_1). Σε αυτό το σύστημα αναφοράς το πρώτο ταχύπλοο είναι ακίνητο, ενώ το δεύτερο ταχύπλοο τρέχει με ταχύτητα

$$\upsilon = -\upsilon_1 + \upsilon_2$$

Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους θα είναι ίση με το μήκος της καθέτου, AK, που μπορούμε να φέρουμε στην ευθεία BK, κατά μήκος της οποίας θα κινηθεί το δεύτερο ταχύπλοο στο σύστημα Ο.

Επομένως από το σχήμα έχουμε (όπου τα υ_1 και υ_2 είναι τα μέτρα των ανυσμάτων $\boldsymbol{\upsilon}_1$ και $\boldsymbol{\upsilon}_2$)

$$AK = L\sin\phi \tag{2.148}$$

Επίσης από το σχήμα 2.27

$$\upsilon\cos\phi = \upsilon_2\cos\beta + \upsilon_1\cos a \tag{2.149}$$

$$\upsilon\sin\phi = \upsilon_2\sin\beta - \upsilon_1\sin a \tag{2.150}$$

Από τις (2) και (2), απαλείφοντας το υ, προκύπτει

$$\tan\phi = \frac{\upsilon_2\sin\beta - \upsilon_1\sin\alpha}{\upsilon_2\cos\beta + \upsilon_1\cos\alpha} \tag{2.151}$$

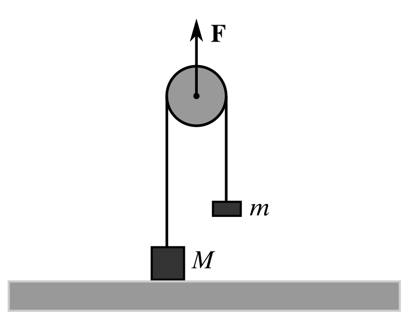
οπότε, καθώς από την τριγωνομετρία ισχύει

$$\sin\phi = \frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$$

η (2) γίνεται με τη βοήθεια της (2)

$$AK = L\frac{\dfrac{\upsilon_2\sin\beta - \upsilon_1\sin\alpha}{\upsilon_2\cos\beta + \upsilon_1\cos\alpha}}{1+\left(\dfrac{\upsilon_2\sin\beta - \upsilon 1\sin\alpha}{\upsilon_2\cos\beta + \upsilon_1\cos\alpha}\right)^2}$$

Πρόβλημα 2.68 Οι μάζες m και M ενώνονται όπως στο σχήμα (2.28). Η τροχαλία θεωρείται αβαρής και χωρίς τριβές. Ποια είναι η μέγιστη προς τα πάνω δύναμη $\boldsymbol{F}$, που θα πρέπει να εφαρμοστεί στην τροχαλία χωρίς η μάζα M να ξεκολλήσει από το έδαφος; Ποια η επιτάχυνση της μάζας m; Το σκοινί θεωρείται επίσης αβαρές και παραμένει τεντωμένο.



Σχήμα 2.28

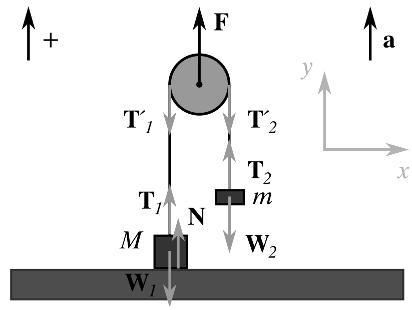
Λύση:

Πάνω στο πρώτο σώμα μάζας M ασκούνται οι εξής δυνάμεις (α) Το βάρος του $\boldsymbol{W}_1 = M\boldsymbol{g}$, (β) η τάση του νήματος $\boldsymbol{T}_1$ και (γ) η αντίδραση του δαπέδου $\boldsymbol{N}$.
Πάνω στο δεύτερο σώμα μάζας m ασκούνται οι δυνάμεις (α) Το βάρος του $\boldsymbol{W}_2 = m\boldsymbol{g}$ και (β) η τάση του νήματος T_2.
Πάνω στην τροχαλία ασκούνται οι δυνάμεις (α) η δύναμη F, (β) η $\boldsymbol{T}_1' = \boldsymbol{T}_1$ και (γ) $\boldsymbol{T}_2' = \boldsymbol{T}_2$. Καθώς το σύστημα σκοινί-τροχαλία θεωρείται αβαρές έχουμε

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 = 0$$

και

$$T_1 = T_2 \equiv T \tag{2.152}$$



Σχήμα 2.29

επομένως

$$\Rightarrow F - T_1 - T_2 = 0 \xrightarrow{(2)} F = 2T$$

Το πρώτο σώμα, μάζας M, ισορροπεί άρα

$$\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{N} = 0$$

$$\Rightarrow -W_1 + T_1 + N = 0 \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} F = 2(W_1 - N) \tag{2.153}$$

Η μέγιστη δύναμη εφαρμόζεται πάνω στην τροχαλία όταν $N = 0$, δηλαδή όταν το σώμα μάζας M ισορροπεί χωρίς ταυτόχρονα να αγγίζει το έδαφος. Άρα από τη σχέση (2) έπεται

$$F_{\max} = 2W_1 = 2Mg$$

Το δεύτερο σώμα, μάζας m, επιταχύνεται κατά τον κατακόρυφο άξονα, με επιτάχυνση a, άρα

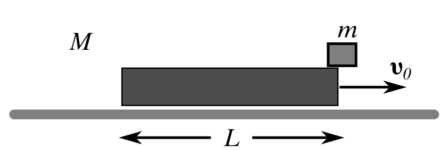
$$\boldsymbol{W}_2 + \boldsymbol{T}_2 = m\boldsymbol{a}$$

$$\Rightarrow -W_2 + T_2 = ma \stackrel{((2))}{\Longrightarrow} a = \frac{T - W_2}{m} \quad \text{ή} \quad a = \frac{F/2 - W_2}{m}$$

Όταν η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι $F_{\max}$, τότε

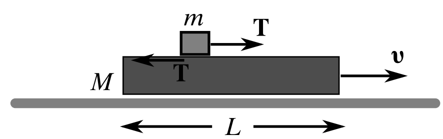
$$a_{\max} = \frac{\frac{2Mg}{2} - mg}{m} = \frac{M - m}{m} g$$

Πρόβλημα 2.69 Μικρό σώμα μάζας m βρίσκεται τοποθετημένο στο άκρο δοκού μήκους L και μάζας M (βλέπε σχήμα 2.30). Στη δοκό δίνουμε, ακαριαία, αρχική ταχύτητα υ_0. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δοκού είναι μ, ενώ μεταξύ δοκού και οριζοντίου δαπέδου ο συντελεστής τριβής είναι μηδέν, να υπολογίσετε πόση πρέπει να είναι η υ_0 έτσι ώστε το σώμα m να πέσει από τη δοκό.



Σχήμα 2.30

Λύση:



Σχήμα 2.31

Λόγω της δύναμης της τριβής μεταξύ του μικρού σώματος και της δοκού, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.31, το m θα επιταχύνεται ενώ το M θα επιβραδύνεται. Αν οι ταχύτητες εξισωθούν πριν το m πέσει, τότε η δύναμη τριβής θα εκλείψει και τα δύο σώματα θα κινούνται μαζί στη συνέχεια. Για τα δύο σώματα ισχύει

$$\mu m g = T = m a_m, \qquad \text{δηλαδή } a_m = \mu g$$

$$T = -M a_M, \qquad \text{δηλαδή } a_M = -\mu g m/M$$

Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων δίνονται από

$$\upsilon_m = a_m t \qquad \text{και} \qquad \upsilon_M = \upsilon_0 + a_M t$$

Οι ταχύτητες αυτές θα εξισωθούν σε χρόνο t, όπου

$$\tau = \frac{\upsilon_0}{\mu g \left(1 + m/M\right)}$$

Στο χρόνο αυτό τα σώματα θα έχουν διανύσει διαστήματα

$$S_M = \upsilon_0 \tau + a_M \frac{\tau^2}{2}$$
$$S_m = a_m \frac{\tau^2}{2}$$

Για να πέσει το m θα πρέπει να ισχύει

$$S_M - S_m > L$$

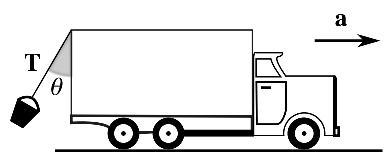
ώστε

$$\upsilon_0 > \sqrt{2\mu g L(1 + m/M)}$$

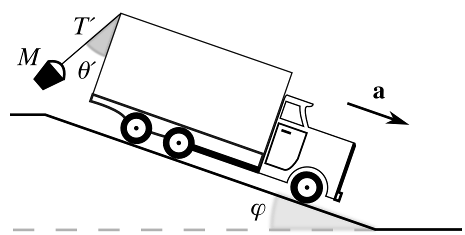
Πρόβλημα 2.70 Ένα φορτηγό κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση a. Ένα σχοινί (χωρίς μάζα και μη εκτατό) είναι δεμένο στο πίσω μέρος του φορτηγού. Στο άλλο άκρο του σχοινιού είναι δεμένος ένας κουβάς μάζας M που κρέμεται κατακόρυφα όταν το φορτηγό ηρεμεί. Ο κουβάς κινείται γρήγορα όταν το φορτηγό αρχίζει να επιταχύνεται αλλά σύντομα ισορροπεί σε μια σταθερή απόσταση πίσω από το φορτηγό όπου το σχοινί σχηματίζει μια σταθερή γωνία θ με το φορτηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.32.
Θεωρώντας ότι η τριβή είναι αμελητέα,

(α) βρείτε τη γωνία θ στην οποία θα ισορροπήσει το σχοινί

(β) ποια είναι η τάση T του σχοινιού από τη στιγμή που θα ισορροπήσει σχηματίζοντας γωνία θ με το φορτηγό;



Σχήμα 2.32



Σχήμα 2.33

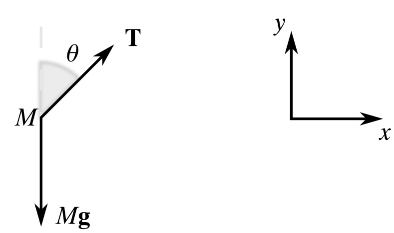
(γ) Υποθέστε ότι το φορτηγό κινείται σε κατηφορικό δρόμο που σχηματίζει γωνία ϕ με το οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.33, και ότι συνεχίζει να επιταχύνεται με επιτάχυνση a.

Σε ποια γωνία θ' σε σχέση με το φορτηγό θα ισορροπήσει τώρα το σχοινί; Ποια θα είναι η καινούργια τάση T' του σχοινιού;

(δ) Τι παρατηρείτε για τις σχέσεις των δύο παραπάνω περιπτώσεων;

Λύση:

(α) Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω στον κουβά είναι το βάρος του Mg και η τάση του νήματος T.



Σχήμα 2.34

Χρησιμοποιώντας σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα x στη διεύθυνση της επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}$ και τον άξονα y κάθετα προς τα πάνω, έχουμε για την τάση του νήματος T (στο αδρανειακό σύστημα)

$$T\sin\theta = Ma \tag{2.154}$$

$$T\cos\theta = Mg \tag{2.155}$$

Από τις σχέσεις (2) και (2) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι

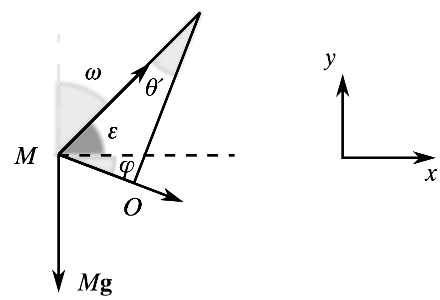
$$\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

(β) Από τις σχέσεις (2) και (2)

$$T^2 \sin^2\theta + T^2\cos^2\theta = M^2a^2 + M^2g^2$$
$$\Rightarrow T = M\sqrt{a^2+g^2}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας το ίδιο σύστημα συντεταγμένων με το ερώτημα (α) έχουμε

$$\omega + \epsilon = 90^o, \qquad \epsilon + \phi + \theta' = 90^o, \qquad \omega = 90^o - \epsilon = 90^o - (90^o - \theta' - \phi) = \theta' + \phi$$



Σχήμα 2.35

$$T'\sin\omega = T'\sin(\theta'+\phi) = Ma\cos\phi \tag{2.156}$$
$$T'\cos\omega = T'\cos(\theta'+\phi) = Mg - Ma\sin\phi \tag{2.157}$$

Από τις σχέσεις (2) και (2) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$\tan(\theta'+\phi) = \frac{a\cos\phi}{g-a\sin\phi} \Rightarrow \theta' = \tan^{-1}\left(\frac{a\cos\phi}{g-a\sin\phi}\right) - \phi \tag{2.158}$$

και

$$T' = M\sqrt{a^2\cos^2\phi + g^2 + a^2\sin^2\phi - 2ag\sin\phi} = M\sqrt{a^2+g^2-2ag\sin\phi} \tag{2.159}$$

Παρατήρηση. Θα μπορούσαμε να λύσουμε το ερώτημα επιλέγοντας σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα x κατά τη διεύθυνση της επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}$ και τον άξονα y κάθετα στο δρόμο. Τότε έχουμε

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}$$
$$[T'\sin\theta' + Mg\sin\phi,\ T'\cos\theta' - Mg\cos\phi] = [Ma, 0]$$

από όπου

$$T'\cos\theta' = Mg\cos\phi \tag{2.160}$$
$$T'\sin\theta' = Ma - Mg\sin\phi \tag{2.161}$$

Από τις σχέσεις (2) και (2) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$\tan\theta' = \frac{Ma - Mg\sin\phi}{Mg\cos\phi} = \frac{a-g\sin\phi}{g\cos\phi}$$
$$\Rightarrow \theta' = \tan'\left(\frac{a-g\sin\phi}{g\cos\phi}\right)$$

και

$$T' = M\sqrt{(Mg\cos\phi)^2 + M^2a^2 + M^2g^2\sin^2\phi - 2M^2ag\sin\phi} = M^2\sqrt{a^2+g^2-2ag\sin\phi}$$

Για να δείξουμε ότι η γωνία θ' είναι η ίδια με αυτή της σχέσης (2), χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$$

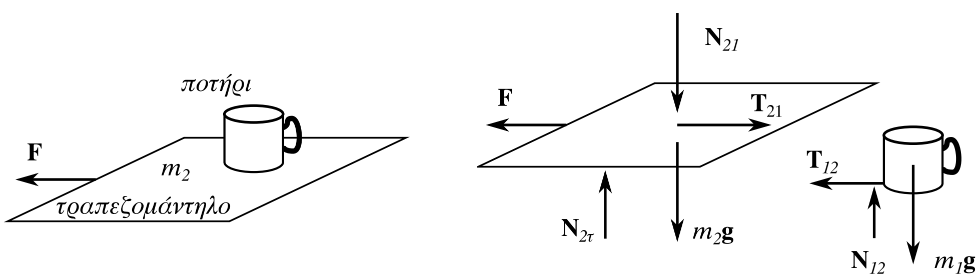
(δ) Παρατηρούμε ότι για $\phi = 0$ οι σχέσεις (2) και (2) του (γ) ερωτήματος γίνονται

$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right) \quad \text{και} \quad T' = M\sqrt{a^2 + g^2}$$

δηλαδή βρίσκονται σε συμφωνία με τα (α) και (β) όπως αναμένεται!

Πρόβλημα 2.71 Ένα γυάλινο ποτήρι μάζας m_1 ισορροπεί πάνω σε ένα τραπέζι με τραπεζομάντηλο μάζας m_2. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του τραπεζομάντηλου και του ποτηριού είναι μ_s και το τραπέζι είναι πολύ γυαλισμένο ώστε να μην υπάρχουν τριβές, ποια είναι η μέγιστη οριζόντια δύναμη με την οποία μπορούμε να τραβήξουμε το τραπεζομάντηλο έτσι ώστε το ποτήρι και το τραπεζομάντηλο να κινηθούν μαζί χωρίς να ολισθήσουν; (*Υπόδειξη*: σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για κάθε σώμα.)

Λύση:



Σχήμα 2.36

- *Στο τραπεζομάντηλο* ασκούνται η εξωτερική δύναμη F, το βάρος του $m_2 g$, η δύναμη N_{21} από το ποτήρι, η δύναμη $N_{2\tau}$ από το τραπέζι και η τριβή T_{21}.

  Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $\sum \boldsymbol{F}_2 = m_2 \boldsymbol{a}_2$,

  ◇ στον άξονα x

  $$F - T_{21} = m_2 a_{2x} \tag{2.162}$$

  ◇ στον άξονα y

  $$N_{2\tau} - N_{21} - m_2 g = 0$$

- *Στο ποτήρι* ασκούνται το βάρος του $m_1 g$, η δύναμη N_{12} από το τραπεζομάντηλο και η τριβή T_{12}.

  Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $\sum \boldsymbol{F}_1 = m_1 \boldsymbol{a}_1$,

  ◇ στον άξονα x

  $$T_{12} = m_1 a_{1x}$$

  ◇ στον άξονα y

  $$N_{12} - m_1 g = 0 \tag{2.163}$$

  Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, $T_{12} = T_{21}$.

Οι οριακές συνθήκες ολίσθησης είναι οι εξής:

1. $a = a_{1x} = a_{2x}$
2. Η στατική τριβή είναι μέγιστη όταν

$$T_{12} = \mu_s N_{12} = (T_{12})_{\max}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει

$$N_{12} = m_1 g \Rightarrow T_{12} = \mu_s m_1 g$$

Άρα η σχέση (2) γίνεται

$$F_{\max} - \mu_s m_1 g = m_2 a$$

$$\mu_s m_1 g = m_1 a \Rightarrow a = \mu_s g$$

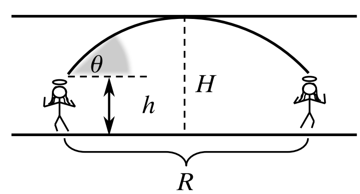
και άρα

$$F_{\max} = \mu_s m_1 g + m_2 a = \mu_s m_1 g + m_2 \mu_s g = \mu_s (m_1 + m_2) g$$

Πρόβλημα 2.72 Δύο παιδιά παίζουν πετόσφαιρα με μια μπάλα σε ένα μακρύ διάδρομο. Το ύψος της οροφής είναι H. Τα παιδιά πετούν και αρπάζουν την μπάλα στο ύψος των ώμων τους h. Αν τα παιδιά μπορούν να πετάνε τη μπάλα με μια ταχύτητα υ_0, σε πόση απόσταση μεταξύ τους μπορούν να παίζουν;

Λύση:

Η μπάλα μόλις που θα ακουμπήσει το ταβάνι, αν από το σημείο ρίψης ανέβει σε ύψος $y_{\max} = H - h$ στο μέσο της διαδρομής ανάμεσα στα δύο παιδιά.



Σχήμα 2.37

Γνωρίζουμε ότι

$$y_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

και το βεληνεκές είναι

$$R = \frac{2\upsilon_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \tag{2.164}$$

Άρα η μπάλα μόλις θα ακουμπήσει το ταβάνι εάν

$$y_{\max} = H - h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{2g}{\upsilon_0^2}(H - h) \tag{2.165}$$

Η σχέση (2) με αντικατάσταση της (2) γίνεται

$$R = \frac{2\upsilon_0^2}{g}\sqrt{\frac{2g}{\upsilon_0^2}(H-h)}\sqrt{1 - \frac{2g}{\upsilon_o^2}(h-h)} = 4\sqrt{(H-h)\left[\frac{\upsilon_0^2}{2g} - (H-h)\right]}$$

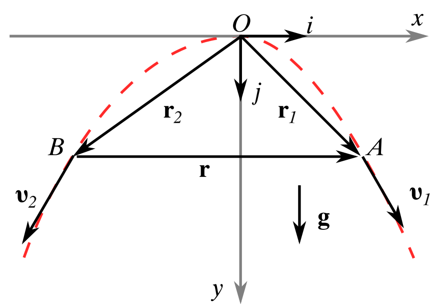
Το μέγιστο βεληνεκές $R = \upsilon_0^2/g$ επιτυγχάνεται για $\theta = 45^o$ δηλαδή $\sin^2\theta = 1/2$ οπότε από τη σχέση (2)

$$H - h = \frac{\upsilon_0^2}{4g}$$

Αν $H - h > \upsilon_0^2/4g$ το ταβάνι είναι τόσο ψηλό ώστε η μπάλα να μη φτάνει στο ταβάνι για γωνίες βολής $\theta < 45^o$.

Πρόβλημα 2.73 Δύο σωματίδια κινούνται στο πεδίο βαρύτητας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s τα σωματίδια βρίσκονταν στο ίδιο σημείο και είχαν ταχύτητες υ_1 και υ_2 οριζόντιες και με αντίθετες φορές. Να βρεθεί η απόσταση ανάμεσα στα σωματίδια τη χρονική στιγμή που τα διανύσματα των ταχυτήτων τους θα είναι κάθετα.

Λύση:



Σχήμα 2.38

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ s τα σωματίδια βρίσκονται στο σημείο O, το οποίο θεωρούμε αρχή των αξόνων. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t που οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι κάθετες μεταξύ τους αυτά βρίσκονται στις θέσεις A και B. Τότε οι ταχύτητές τους θα είναι

$$\boldsymbol{\upsilon}_1 = \upsilon_1\hat{\boldsymbol{x}} + gt\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_2 = \upsilon_2\hat{\boldsymbol{x}} + gt\hat{\boldsymbol{y}}$$

Ξέρουμε όμως ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη καθετότητας δύο ανυσμάτων είναι $\boldsymbol{\upsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\upsilon}_2 = 0$. Δηλαδή

$$\upsilon_1\upsilon_2 = \upsilon_1\upsilon_2 + g^2t^2 = 0$$

Άρα τα $\boldsymbol{\upsilon}_1$ και $\boldsymbol{\upsilon}_2$ είναι κάθετα τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{\sqrt{\upsilon_1\upsilon_2}}{g} \tag{2.166}$$

Η απόσταση AB ορίζεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \boldsymbol{r}$ για το οποίο ισχύει $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$\boldsymbol{r}_1 = \upsilon_1 t\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}gt^2\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \upsilon_2 t\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}gt^2\hat{\boldsymbol{y}}$$

και από την εξίσωση τροχιάς βρίσκουμε

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = (\upsilon_1 + \upsilon_2)t\hat{\boldsymbol{x}}$$

Δηλαδή το r θα είναι πάντα παράλληλο με τον άξονα Ox. Αντικαθιστώντας τώρα το t από τη σχέση (2) βρίσκουμε

$$\boldsymbol{r} = (\upsilon_1 + \upsilon_2)\frac{\sqrt{\upsilon_1\upsilon_2}}{g}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Πρόβλημα 2.74 Σωματίδιο αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Όταν διανύσει απόσταση L αρχίζει να κινείται με επιβράδυνση a μέχρι να σταματήσει. Πόση πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου ώστε ο ολικός χρόνος κίνησης να είναι ελάχιστος;

Λύση:

Για την κίνηση στο διάστημα L ισχύει

$$L = \upsilon t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{\upsilon}$$

Για το διάστημα που επιβραδύνεται

$$t_2 = \frac{\upsilon}{a}$$

Άρα ο ολικός χρόνος

$$t_0 = t_1 + t_2 = \frac{L}{\upsilon} + \frac{\upsilon}{a} = t(\upsilon)$$

Για να είναι ο χρόνος ελάχιστος

$$\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}\upsilon} = 0 \Rightarrow -\frac{L}{\upsilon^2} + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow \upsilon^2 = La \Rightarrow \upsilon = \sqrt{La}$$

Πρόβλημα 2.75 Από ακίνητο σύννεφο πέφτουν 2 σταγόνες μάζας m με διαφορά χρόνου τ. Πώς θα μεταβάλλεται η μεταξύ τους υψομετρική απόσταση ως συνάρτηση του χρόνου, αν

(α) οι τριβές είναι αμελητέες και

(β) η δύναμη της τριβής είναι $f = -k\upsilon$ όπου υ η ταχύτητα της σταγόνας, και k γνωστή σταθερά.

Λύση:

(α) Στην περίπτωση αυτή έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Επομένως σε χρόνο t από την πτώση της πρώτης σταγόνας θα έχουμε

$$S_1 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{και} \qquad S_2 = \frac{1}{2}g(t-\tau)^2$$

Οπότε

$$\Delta S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}g(2t\tau - \tau^2)$$

(β) Για κάθε σταγόνα ισχύει

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = mg - k\upsilon$$

Ολοκληρώνοντας για την πρώτη σταγόνα

$$\int_0^{\upsilon_1} \frac{\mathrm{d}\upsilon}{mg - k\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{k}\ln\frac{mg - k\upsilon_1}{mg} = \frac{t}{m}$$
$$\Rightarrow \upsilon_1 = \frac{mg}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}) = \frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}$$

και από εδώ

$$S_1 = \frac{mg}{k}\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right)\right]$$

Ακριβώς ανάλογα

$$S_2 = \frac{mg}{k}\left[t - \tau - \frac{m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-k(t-\tau)/m}\right)\right]$$

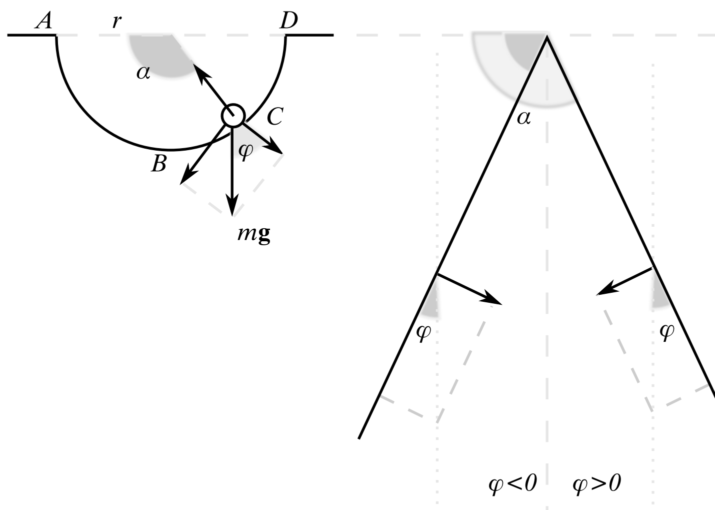
και τελικά

$$\Delta S = \frac{mg}{k}\left[\tau - \frac{m}{k}\mathrm{e}^{-kt/m}\left(\mathrm{e}^{k\tau/m} - 1\right)\right]$$

Πρόβλημα 2.76 Μια μικρή μπάλα μάζας m, αρχικά στο A, ολισθαίνει στη λεία εσωτερική επιφάνεια μιας ημισφαιρικής επιφάνειας ABD. Όταν η μπάλα βρίσκεται στο σημείο C, δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα και η δύναμη που ασκείται από την επιφάνεια είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{r}\sin a} \qquad \text{και} \qquad F = 3mg\sin a$$

Λύση:



Σχήμα 2.39

Στο σώμα ασκείται το βάρος mg και η αντίδραση από την επιφάνεια F. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε εφαπτομενική και ακτινική συνιστώσα. Γράφουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την ακτινική διεύθυνση

$$\begin{aligned} F - mg\cos\phi &= \frac{mu^2}{r} \\ \Rightarrow F - mg\sin a &= \frac{mu^2}{r} \end{aligned} \tag{2.167}$$

και για την εφαπτομενική διεύθυνση

$$\begin{aligned} F_T &= m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow mg\sin\phi &= m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow g\cos a &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{2.168}$$

Οι γωνίες ϕ και a συνδέονται με τη σχέση $a = \pi/2 - \phi$. Η a μεταβάλλεται από 0 έως π ενώ η ϕ από $\pi/2$ έως $-\pi/2$. Η γωνιακή ταχύτητα ορίζεται $\omega = \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$. Ακόμα ισχύει ότι $v = \omega r$. Με τα παραπάνω, η σχέση (2) γράφεται

$$g\cos a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\omega r)}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}a}\,\omega \tag{2.169}$$

Από τη σχέση (2) μπορούμε να υπολογίσουμε την ω συναρτήσει της γωνίας a αν χωρίσουμε τις μεταβλητές και ολοκληρώσουμε έπεται

$$\frac{r}{g}\omega\mathrm{d}\omega = \cos a\mathrm{d}a$$

$$\Rightarrow \frac{r}{g}\int_0^{\omega}\omega \mathrm{d}\omega = \int_0^{a}\cos a \mathrm{d}a$$
$$\Rightarrow \frac{r}{g}\frac{1}{2}\omega^2\bigg|_0^{\omega} = \sin a\bigg|_0^{a}$$
$$\Rightarrow \frac{r}{2g}\omega^2 = \sin a \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{r}\sin a} \tag{2.170}$$

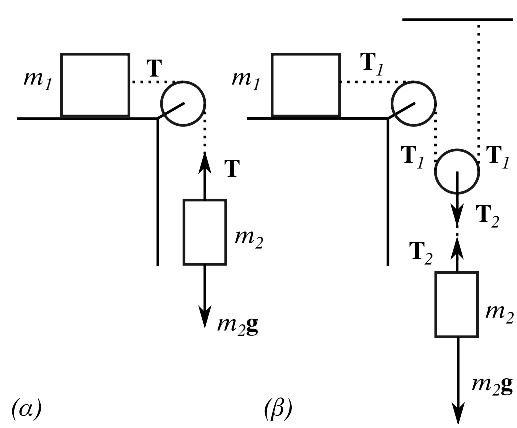
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) η γραμμική ταχύτητα, v, δίνεται από

$$v = \omega r \Rightarrow v = \sqrt{2gr\sin a} \tag{2.171}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας την (2), η σχέση (2) γίνεται

$$F = mg\sin a + \frac{m(2gr\sin a)}{r} \Rightarrow F = 3mg\sin a$$

Πρόβλημα 2.77 Υπολογίστε την επιτάχυνση των σωμάτων m_1 και m_2 και την τάση των σχοινιών στις περιπτώσεις (α) και (β) του σχήματος 2.40. Οι τροχαλίες είναι αβαρείς και λείες και τα σώματα ολισθαίνουν χωρίς τριβή. Ποια διαμόρφωση μπορεί να επιταχύνει το m_1 γρηγορότερα από ότι στην ελεύθερη πτώση;



Σχήμα 2.40

Λύση:

(α) Το σώμα 1 επιταχύνεται υπό την επίδραση της τάσης του νήματος T. Το βάρος του και η αντίδραση του δαπέδου είναι κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης και δεν μας απασχολούν. Στο σώμα 2 ασκούνται η τάση του νήματος που είναι ίδια σε όλο το μήκος του, και το βάρος. Οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων είναι η ίδια α. Γράφουμε λοιπόν το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τα δύο σώματα

$$T = m_1 a \tag{2.172}$$

και

$$m_2 g - T = m_2 a \tag{2.173}$$

Από τις εξισώσεις (2) και (2) συνάγουμε ότι

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \tag{2.174}$$

(β) Βάζουμε και πάλι τις δυνάμεις στο σχήμα. Στο σώμα 1 ασκείται μόνο η τάση του νήματος στην κατεύθυνση της κίνησης. Η τάση του νήματος είναι σταθερή σε όλο το μήκος του νήματος. Για το νήμα που περνάει από τις τροχαλίες η τάση είναι T_1 ενώ η τάση του νήματος από το οποίο κρέμεται το σώμα 2 είναι T_2. Η χαμηλότερη τροχαλία επιταχύνεται. Επειδή όμως είναι αβαρής, το άθροισμα των δυνάμεων πάνω της είναι μηδέν. Έχουμε λοιπόν ότι

$$T_2 = 2T_1 \tag{2.175}$$

και για τις επιταχύνσεις

$$a_1 = 2a_2$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τα δύο σώματα μας δίνει

$$T_1 = m_1 a_1$$

και

$$m_2 g - T_2 = m2a_2 \tag{2.176}$$

Από τις εξισώσεις (2)-(2) παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2m_2}{4m_1 + m_2} g \\ a_2 &= \frac{m_2}{4m_1 + m_2} g \\ T_1 &= \frac{2m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g \\ T_2 &= m_2 \left(1 - \frac{m_2}{4m_1 + m_2}\right) g = \frac{4m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g \end{aligned} \tag{2.177}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2) και (2) φαίνεται ότι στην περίπτωση (α) η επιτάχυνση του m_1 δε μπορεί ποτέ να είναι μεγαλύτερη από g. Στην περίπτωση (β), αν ισχύει ότι $2m_2 > 4m_1 + m_2$, δηλαδή $m_2 > 4m_1$ τότε $a_1 > g$.

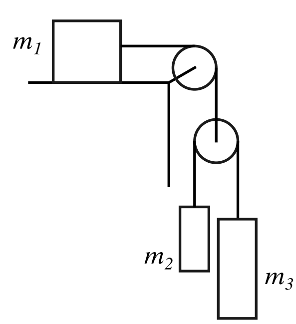
Πρόβλημα 2.78 Στο σχήμα 2.41 να αποδείξετε ότι οι επιταχύνσεις των τριών σωμάτων δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_1 &= 4m_2 m_3 P \\ a_2 &= -(m_1 m_3 - m_1 m_2 - 4m_2 m_3) P \\ a_3 &= (m_1 m_3 - m_1 m_2 + 4m_2 m_3) P \end{aligned}$$

όπου

$$P = \frac{g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3}$$

Οι τροχαλίες είναι αβαρείς και λείες και τα σώματα ολισθαίνουν χωρίς τριβή.

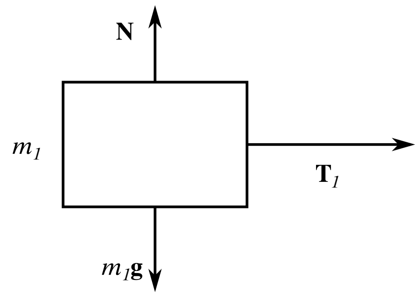


Σχήμα 2.41

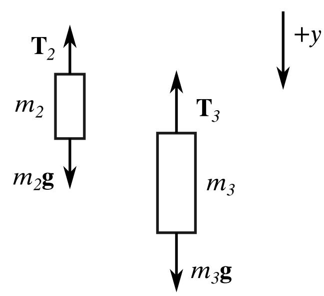
Λύση:

Για να διευκολυνθούμε στη μελέτη μας, χωρίζουμε το σχήμα μας στα επί μέρους στοιχεία του και κάνουμε ένα διάγραμμα ξεχωριστά για το κάθε ένα από αυτά με τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω τους. Αυτού του τύπου τα διαγράμματα λέγονται «διαγράμματα ελεύθερου σώματος» Ας δούμε πρώτα το σώμα m_1. Στον κατακόρυφο άξονα ασκούνται το βάρος του $m_1 g$ και η κάθετη αντίδραση του δαπέδου N. Αυτές οι δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται και δεν θα μας απασχολήσουν άλλο. Στον οριζόντιο άξονα ασκείται η τάση του νήματος T_1. Ισχύει

$$\boldsymbol{T}_1 = m_1 \boldsymbol{a}_1$$



Σχήμα 2.42



Σχήμα 2.43

Αφού η τάση και η επιτάχυνση είναι ομόρροπα διανύσματα μπορούμε να γράψουμε

$$T_1 = m_1 a_1$$

Στο σώμα m_2 ασκείται το βάρος $m_2\boldsymbol{g}$ και η τάση του νήματος $\boldsymbol{T}_2$. Ισχύει

$$\boldsymbol{T}_2 + m_2\boldsymbol{g} = m_2\boldsymbol{a}_2$$

Η ταχύτητα του αέρα ως προς το έδαφος είναι

$$\boldsymbol{w}_{\alpha,\varepsilon} = -w\cos a\hat{\boldsymbol{x}} - w\sin a\hat{\boldsymbol{y}}$$

και του αεροπλάνου ως προς τον αέρα είναι

$$\boldsymbol{V}_{\pi,\alpha} = V\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + V\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$

Άρα, η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς το έδαφος είναι

$$\boldsymbol{V}_{\pi,\varepsilon} = \boldsymbol{V}_{\pi,\alpha} + \boldsymbol{w}_{\alpha,\varepsilon} = (V\cos\theta - w\cos a)\hat{\boldsymbol{x}} + (V\sin\theta - w\sin a)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2.178}$$

Για να φτάσει το αεροπλάνο στο αεροδρόμιο θα πρέπει να μηδενιστεί η y συνιστώσα της ταχύτητάς του ως προς το έδαφος, αφού το αεροδρόμιο έχει $y = 0$. Άρα από τη σχέση (2) έχουμε

$$V\sin\theta - w\sin a = 0 \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{w}{V}\sin a\right)$$

Για τη x συνιστώσα της ταχύτητας θα έχουμε

$$\begin{aligned} V_{\pi,\epsilon,x} &= V\cos\theta - w\cos a = V\sqrt{1-\sin^2\theta} - w\cos a \\ &= V\sqrt{1-\left(\frac{w}{V}\right)^2\sin^2 a} - w\cos a = \sqrt{V^2 - w^2\sin^2 a} - w\cos a \end{aligned}$$

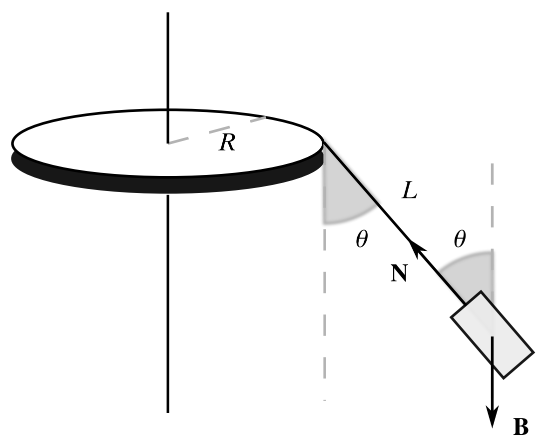
Το χρονικό διάστημα το οποίο θα χρειαστεί για να φτάσει στο αεροδρόμιο είναι ίσο με

$$t = \frac{L}{V_{\pi,\epsilon,x}} = \frac{L}{\sqrt{V^2 - w^2 \sin^2 a} - w \cos a}$$

Πρόβλημα 2.79 Ένας οριζόντιος δίσκος, ακτίνας R, περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Μικρά βαγόνια είναι συνδεδεμένα με σκοινιά, μήκους L και αμελητέας μάζας, στην περιφέρεια του δίσκου. Δεδομένου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g και ότι η διεύθυνση κάθε αλυσίδας σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ να υπολογίσετε την περίοδο περιστροφής του δίσκου.

Λύση:

Οι δυνάμεις (N και B) που ασκούνται στο βαγόνι φαίνονται στο σχήμα 2.44



Σχήμα 2.44

Το βαγόνι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας

$$R' = R + L \sin\theta \tag{2.179}$$

και ταχύτητας

$$V = \frac{2\pi R'}{T} \tag{2.180}$$

Στον x άξονα ισχύει

$$F_x = -N \sin\theta = -\frac{mV^2}{R'} \overset{(2)}{=} -\frac{4\pi^2 R' m}{T^2} \tag{2.181}$$

Στον y άξονα ισχύει

$$F_y = N\cos\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{2.182}$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (2) στην (2) έχουμε

$$-mg\tan\theta = -\frac{4\pi^2 (R + L\sin\theta) m}{T^2}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \left(\frac{R + L\sin\theta}{g\tan\theta}\right)^{1/2}$$

Πρόβλημα 2.80 Ένα άδειο όχημα που αρχικά έχει μάζα M_0 και αρχική ταχύτητα u_0 κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να πέφτει στο όχημα άμμος με σταθερό ρυθμό $\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$. Βρείτε τη θέση του οχήματος ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση:

Έστω ότι κάποια τυχαία χρονική στιγμή η μάζα της άμμου που βρίσκεται στο όχημα είναι m. Επειδή στο σύστημα δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις, από το δεύτερο νόμο του Newton ισχύει για την ορμή $\boldsymbol{p} = (M_0 + m)\,\boldsymbol{u}$ του συστήματος όχημα-άμμος ($\boldsymbol{u}$ =ταχύτητα του οχήματος την τυχαία χρονική στιγμή t)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left[(M_0+m)\,\boldsymbol{u}\right]}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{(M_0+m)\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\boldsymbol{u}\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Rightarrow -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}} &= \frac{\mathrm{d}m}{M_0+m} \\
\Rightarrow -\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int_0^m \frac{\mathrm{d}m}{M_0+m} \\
\Rightarrow u &= \frac{M_0}{M_0+m}u_0
\end{aligned} \tag{2.183}$$

Γνωρίζουμε ότι $u = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, και από τις συνθήκες του προβλήματος έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \lambda \Rightarrow m = \lambda t$$

Άρα η σχέση (2) γράφεται

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{M_0}{M_0+\lambda t}u_0 \\
\Rightarrow \mathrm{d}x &= M_0 u_0 \frac{\mathrm{d}t}{M_0+\lambda t} \\
\Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x &= M_0 u_0 \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{M_0+\lambda t} \\
\Rightarrow x(t) &= \frac{M_0 u_0}{\lambda}\ln\left(\frac{M_0+\lambda t}{M_0}\right)
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.81 Το σχήμα δείχνει μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ που δρα σε ένα σώμα μάζας M. Το σώμα βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια ανώμαλη επιφάνεια με συντελεστή στατικής τριβής μ.

(α) Υποθέτοντας ότι $F \gg Mg$, βρείτε τη μέγιστη γωνία θ για την οποία η δύναμη F δε μπορεί να κάνει το σώμα να ολισθήσει, όσο μεγάλη κι αν είναι.

(β) Βρείτε το λόγο F/Mg, σα συνάρτηση των θ και μ, για τον οποίο το σώμα, μόλις αρχίζει να ολισθαίνει.

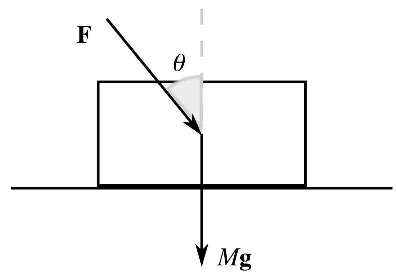
Λύση:

(α) Αναλύουμε τις δυνάμεις κατά τη διεύθυνση του βάρους και κάθετα σάυτήν. Το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει όταν

$$F\sin\theta \geq \mu N, \quad \text{και} \quad N = F\cos\theta + Mg$$

Άρα

$$F\sin\theta \geq \mu F\cos\theta + \mu Mg \tag{2.184}$$



Σχήμα 2.45

ή διαιρώντας με F έχουμε

$$\sin\theta \geq \mu\cos\theta \ \ (\text{γιατί } Mg/F \text{ είναι πολύ μικρή ποσότητα})$$

Επομένως

$$\sin\theta \geq \mu\cos\theta \Rightarrow \tan\theta \geq \mu$$

Άρα αν $\theta \leq \arctan\mu$ το σώμα δε μπορεί να ολισθήσει όσο μεγάλη κι αν είναι η F.

(β) Από τη σχέση (2) έχουμε

$$F\sin\theta = \mu F\cos\theta + \mu Mg$$
$$\Rightarrow \frac{F}{Mg} = \frac{\mu}{\sin\theta - \mu\cos\theta}$$

Πρόβλημα 2.82 Δύο κεκλιμένα επίπεδα που σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 με το οριζόντιο επίπεδο έχουν μη λείες επιφάνειες. Δύο σώματα με μάζες M_1 και M_2 συνδέονται μέσω αβαρούς νήματος και τροχαλίας που περιστρέφεται χωρίς τριβές όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι συντελεστές στατικής τριβής μεταξύ των επιπέδων με τις βάσεις των δύο σωμάτων είναι μ_1 και μ_2 αντίστοιχα. Βρείτε τη σχέση μεταξύ των μεγεθών M_1, M_2, θ_1, θ_2, μ_1 και μ_2, έτσι ώστε η μάζα M_1, μόλις να αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω στο επίπεδο 1.

Λύση:

Ανάλυση δυνάμεων σε άξονες (παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και κάθετο σ' αυτόν) και για τα δύο σώματα. Αν το M_1 αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω η δύναμη $M_1 g\sin\theta_1$ θα είναι ίση με την τάση του νήματος T και τη δύναμη τριβής, δηλαδή

$$M_1 g\sin\theta_1 = T + \mu_1 M_1 g\cos\theta_1 \tag{2.185}$$

Σε αυτή την περίπτωση το M_2 θα αρχίζει να ολισθαίνει προς τα πάνω και τότε η τάση του νήματος T θα είναι ίση με την $M_2 g\sin\theta_2$ συνιστώσα του βάρους και τη δύναμη τριβής, δηλαδή

$$T = M_2 g\sin\theta_2 + \mu_2 M_2 g\cos\theta_2 \tag{2.186}$$

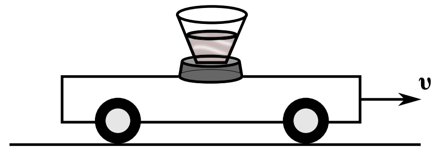
Άρα τελικά από τις σχέσεις (2) και (2) ισχύει

$$M_1\sin\theta_1 - \mu_1 M_1\cos\theta_1 = M_2\sin\theta_2 + \mu_2\cos\theta_2$$

Πρόβλημα 2.83 Βαγόνι κινείται με σταθερή ταχύτητα και χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο βαγόνι υπάρχει θερμαντήρας που ζεσταίνει ένα δοχείο με νερό όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή το νερό αρχίζει να βράζει και οι ατμοί του νερού εγκαταλείπουν το δοχείο με μηδενική σχεδόν ταχύτητα ως προς ακίνητο παρατηρητή. Βρείτε αν θα αλλάξει η ταχύτητα του οχήματος στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις

(α) η αρχική ταχύτητα του οχήματος είναι μηδέν,

(β) η αρχική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη του μηδενός.



Σχήμα 2.46

Λύση:

Αν υποθέσουμε ότι δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις (εκτός του βάρους και της αντίδρασης του δαπέδου που δεν έχουν συνισταμένη μηδέν) τότε η ολική ορμή διατηρείται. Αν m η μάζα του συστήματος πριν το νερό αρχίσει να βράζει και m' η μάζα του συστήματος αφού έχει απομακρυνθεί μια ποσότητα ατμών τότε

$$mv = m'v'$$

Επειδή όμως $m' < m$ συμπεραίνουμε ότι $v' > v$. Πιο αναλυτικά θα μπορούσε να πει κανείς Αν υποθέσουμε ότι M είναι η μάζα του βαγονιού και m η μάζα του νερού και ότι ο ρυθμός με τον οποίο απομακρύνονται οι ατμοί είναι σταθερός ρ $(\rho > 0)$ έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\rho \Rightarrow m = m_0 - \rho t$$

$$t_f = \frac{m_0}{\rho}$$

Δηλαδή από χρόνο 0 έως t_f η μάζα του συστήματος μεταβάλλεται. Αν δεν εφαρμοστούν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα έχουμε για την ορμή p

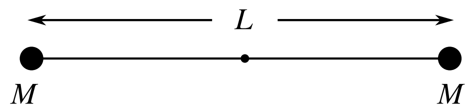
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left[(M+m)\,\upsilon\right]}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\upsilon + \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}(M+m) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\upsilon}{(M+m)}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow \frac{1}{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon &= \frac{1}{(M+m)}\rho\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \ln\upsilon &= -\int\frac{(-\rho)}{(M+m_0-\rho t)} \\
\Rightarrow \ln\upsilon &= -\ln(M+m_0-\rho t) + C' \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{\ln\upsilon} &= C\,\mathrm{e}^{-\ln(M+m_0-\rho t)} \\
\Rightarrow \upsilon &= C\,\frac{1}{M+m_0-\rho t} \\
\Rightarrow \upsilon &= \frac{(M+m_0)}{M+m_0-\rho t}v \quad \text{για} \quad t_f \leq t
\end{aligned}$$

Η ταχύτητα παραμένει σταθερή και ίση με

$$u = \frac{M+m_0}{M}v$$

Προφανώς όταν η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν η ταχύτητα δεν αλλάζει.

Πρόβλημα 2.84 Διπλό αστέρι το οποίο αποτελείται από δυο μάζες, M, περιστρέφεται περί το κέντρο μάζας με τρόπο ώστε οι δυο μάζες να απέχουν απόσταση L. (α)



(α) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητάς τους καθώς και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ως συνάρτηση των σταθερών μεγεθών G, M, L, όπου G είναι η παγκόσμια βαρυτική σταθερά ή σταθερά της παγκόσμιας έλξης.

(β) Να υπολογίσετε τα ίδια μεγέθη (ταχύτητα και γωνιακή ταχύτητα) αν οι δυο μάζες είναι ανόμοιες μάζες M_1 και M_2.

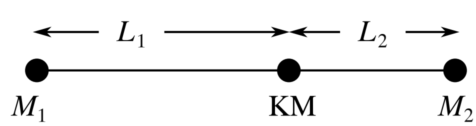
(γ) Να υπολογίσετε τα ίδια μεγέθη (ταχύτητα και γωνιακή ταχύτητα) αν έχουμε τρία όμοια αστέρια μάζας M τα οποία περιστρέφονται περί το κέντρο μάζας, ενώ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς L.

Λύση:

Το κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται στο μέσον της απόστασης L. Επομένως αν εξισώσουμε τη δύναμη βαρύτητας με τη κεντρομόλο δύναμη θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{GM^2}{L^2} &= \frac{Mv^2}{L/2} \\ \Rightarrow \frac{GM}{L} &= 2v^2 \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{GM}{2L} \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{GM}{2L(L^2/4)} = \frac{2GM}{L^3} \end{aligned}$$

(β)

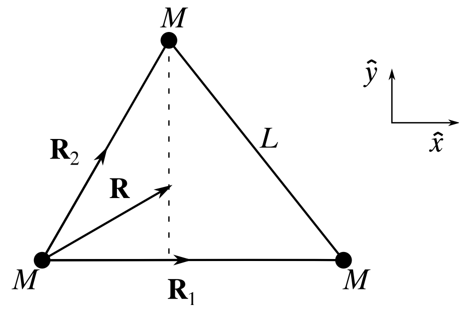


Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να προσδιορίσουμε το κέντρο μάζας ΚΜ ως ακολούθως

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L_1 + L &=& L \\ M_1 L_1 &=& M_2 L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} L_1 &=& \dfrac{M_2 L}{M_1 + M_2} \\ L_2 &=& \dfrac{M_1 L}{M_1 + M_2} \end{array} \right\}$$

και επομένως αν εξισώσουμε τη δύναμη βαρύτητας με τη κεντρομόλο δύναμη θα έχουμε

$$\begin{aligned} G\frac{M_1 M_2}{L^2} &= \frac{M_1 v_1^2}{L_1} = \frac{M_2 v_2^2}{L_2} = M_1 \omega^2 L_1 = M_2 \omega^2 L_2 \\ \frac{GM_2}{L^2} &= \omega^2 L_1 \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{GM_2}{L^2 L_1} = \frac{GM_2}{L^2 \dfrac{M_2 L}{M_1 + M_2}} = \frac{G(M_1 + M_2)}{L^3} \end{aligned}$$



(γ) Τα διάφορα διανύσματα θέσης των μαζών θα είναι

$$\boldsymbol{R} = \frac{M\boldsymbol{R}_1 + M\boldsymbol{R}_2}{3M} = \frac{\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_1 &= L\hat{\boldsymbol{x}} \\
\boldsymbol{R}_2 &= L\left(\cos\frac{\pi}{3}\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\frac{\pi}{3}\hat{\boldsymbol{y}}\right) \\
\boldsymbol{R} &= \frac{1}{3}L\Big[\Big(1 + \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{1/2}\Big)\hat{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}/2}\hat{\boldsymbol{y}}\Big] = \frac{1}{3}L\left(\frac{3}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{y}}\right) = L\left(\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\hat{\boldsymbol{y}}\right) \\
|\boldsymbol{R}| &= L\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = L\sqrt{\frac{3+1}{12}} = \frac{L}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Άρα η ακτίνα περιστροφής είναι $R = L/\sqrt{3}$. Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι

$$\boldsymbol{F} = \frac{GM^2}{L^3}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2) = \frac{3GM^2}{L^3}\left(\frac{\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2}{3}\right) = \frac{3GM^2}{L^3}\boldsymbol{R}$$

με μέτρο

$$\frac{3GM^2}{L^3}\frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2}$$

που θα ισούται με $M\omega^2 R$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2} &= M\omega^2\frac{L}{\sqrt{3}} \\
\Rightarrow \omega^2 &= \frac{3GM}{L^3}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.85 Σωματίδιο περιστρέφεται γύρω από ακίνητο άξονα έστι ώστε για τη γωνιακή ταχύτητά του να ισχύει $\omega = \omega_0 - k\phi$, όπου ϕ η γωνία που έχει διαγράψει, ω_0 και k γνωστές σταθερές. Για $t = 0$ έχουμε $\phi = 0$. Να υπολογισθούν η γωνία περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα ως συναρτήσεις του χρόνου.

Λύση:

Έχουμε για τη γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \omega_0 - k\phi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 - k\phi \qquad \Rightarrow \int_0^{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\omega_0 - k\phi} = \int_0^t \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow -\frac{1}{k}\ln(\omega_0 - k\phi)\Big|_0^{\phi} = t \qquad \Rightarrow \ln\frac{\omega_0 - k\phi}{\omega_0} = -kt$$

$$\Rightarrow \omega_0 - k\phi = \omega_0 e^{-kt} \qquad \Rightarrow \phi = \frac{\omega_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Επομένως για τη γωνιακή ταχύτητα έπεται

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{k}\left(-e^{-kt}\right)(-k) \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-kt}.$$

Πρόβλημα 2.86 Σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της δύναμης

$$\boldsymbol{F} = k\frac{\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3}, \qquad \text{όπου} \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} = \text{ταχύτητα}, \quad \text{και} \quad k = \text{θετική σταθερά}$$

(α) Να αποδειχτεί ότι η κινητική ενέργεια είναι σταθερή.
(β) Να δειχθεί ότι η ποσότητα $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} + k\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι σταθερά της κίνησης, όπου $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r,\ r = |\boldsymbol{r}|, \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} =$ ορμή
(γ) Να δειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης, $\boldsymbol{r}$, του σωματιδίου διαγράφει κωνική επιφάνεια και να υπολογιστεί η γωνία του κώνου.
Υπόδειξη: Να δειχθεί ότι ισχύει $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J} = k$.

Λύση:

(α) Αν παραγωγίσουμε την κινητική ενέργεια $T = (1/2)mv^2 = (1/2)m\dot{\boldsymbol{r}}^2$ θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot(m\ddot{\boldsymbol{r}}) = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot k\frac{\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \boldsymbol{r}\cdot k\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3} = 0$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα του τριπλού γινομένου $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

(β) Παραγωγίζοντας την ποσότητα $\boldsymbol{J}$ έπεται

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \cancelto{0}{\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}} + k\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = m\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} + k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \boldsymbol{r}\times\frac{\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3} + \frac{k}{r}\dot{\boldsymbol{r}} - k\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\dot{r}$$

$$= \frac{k}{r^3}\left((\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{r}}\right) + \frac{k}{r}\dot{\boldsymbol{r}} - k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}r\dot{r} = k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\underbrace{\cancel{-k\frac{r^2}{r^3}\dot{\boldsymbol{r}}} + \cancel{k\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}}}_{0} - k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = 0 \quad \text{επομένως} \quad \boldsymbol{J} = \text{σταθερά}$$

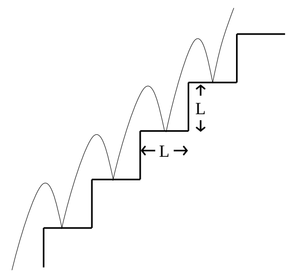
αφού $\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v} = 0$.

(γ) Θα υπολογίσουμε την ποσότητα $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}$

$$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J} = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J} = \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) + k\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{r}kr = k\right] = k \qquad \Rightarrow J\cos\theta = k \qquad \Rightarrow \cos\theta = \frac{k}{J}$$

όπου $J = |\boldsymbol{J}|$. Επομένως η γωνία θ ανάμεσα στα διανύσματα $\boldsymbol{J}$ και $\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι σταθερή, δηλαδή το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου θα διαγράφει κωνική επιφάνεια με γωνία $\theta = \arccos\left(k/J\right)$.

Πρόβλημα 2.87 Μια μπίλια πέφτει από μια σκάλα κτυπώντας το κάθε σκαλοπάτι στο ίδιο σημείο και ανεβαίνοντας στο ίδιο ύψος πάνω από κάθε σκαλοπάτι. Το ύψος L κάθε σκαλοπατιού ισούται με το πλάτος του. Ορίζουμε την παράμετρο $\lambda = -v_{\mathrm{fk}}/v_{\mathrm{ik}}$, όπου v_{ik} και v_{fk} είναι οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας ακριβώς πριν και μετά την κρούση. Βρείτε την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας και το ύψος που ανεβαίνει η μπίλια μετά από κάθε κρούση ως συνάρτηση των γνωστών μεγεθών λ και L.



Λύση:

Οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση σ'ένα σκαλοπάτι θα είναι

$$\boldsymbol{v}_1 = v_h\hat{\boldsymbol{x}} + v_{\text{ik}}\hat{\boldsymbol{y}} \qquad\qquad \boldsymbol{v}_2 = v_h\hat{\boldsymbol{x}} + v_{\text{fk}}\hat{\boldsymbol{y}}$$

όπου οι οριζόντιες ταχύτητες v_h είναι οι ίδιες πριν και μετά την κρούση καθότι η μπίλια κτυπάει το κάθε σκαλοπάτι στο ίδιο σημείο και ανεβαίνει στο ίδιο ύψος. Από τη διατήρηση της ενεργείας έπεται

$$\frac{1}{2}mv_{\text{ik}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{fk}}^2 + mgL \qquad \Rightarrow v_{\text{ik}}^2 = v_{\text{fk}}^2 + 2gL \quad \text{ή} \quad v_{\text{ik}}^2 = \frac{2gL}{1-\lambda^2}, \quad \text{αφού} \quad \lambda = -v_{\text{fk}}/v_{\text{ik}}$$

καθότι το ύψος κάθε σκαλοπατιού είναι L.
Ο χρόνος πτήσης t εκφράζεται μέσω της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας, v_h, αλλά και και των κατακόρυφων συνιστωσών ως ακολούθως

$$t = \frac{v_{\text{ik}} - v_{\text{fk}}}{g} = \frac{L}{v_h} \qquad \Rightarrow v_h = \frac{gL}{\text{ik} - \text{fk}} = \frac{gL}{(1+\lambda)v_{\text{ik}}} = \left(\frac{gL}{2}\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{1/2}$$

Το ύψος H που ανεβαίνει η μπίλια μετά από κάθε κρούση θα βρεθεί από την απλή διατήρηση της ενέργειας

$$mgH = \frac{1}{2}v_{\text{fk}} \qquad \Rightarrow H = \frac{v_{\text{fk}}^2}{2g} = \lambda^2\frac{2gL}{2g(1-\lambda^2)} = \frac{\lambda^2 L}{1-\lambda^2}$$

2.0.1 Γενικευμένη γραμμική ορμή

Γνωρίσουμε ότι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $V(\boldsymbol{r})$ εισάγεται διαμέσου του θεωρήματος έργου-ενέργειας. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εισάγουμε την έννοια του "δυναμικού" της γραμμικής ορμής. Με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στην ολοκληρωτική μορφή

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_{\boldsymbol{p}_1}^{\boldsymbol{p}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \Rightarrow \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{2.187}$$

Αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να γράψουμε τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ ως την πρώτη παράγωγο ενός διανύσματος $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)$, δηλαδή

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \boldsymbol{C} = -\int\boldsymbol{F}\mathrm{d}t + \boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{D} \text{ αυθαίρετη σταθερά} \tag{2.188}$$

τότε η σχέση (2.0.1) μας δίνει

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = -(\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_1) \Rightarrow \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{C}_1$$

δηλαδή η $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{C}$ είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα, που θα την ονομάζουμε γενικευμένη γραμμική ορμή

$$\boldsymbol{p}_q = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)$$

όπου η συνάρτηση $\boldsymbol{C}$ είναι το «δυναμικό» της γραμμικής ορμής, που θα προσδιορίζεται από τη σχέση (2.0.1).

Παράδειγμα 1

Αν ένα σώμα μάζας m κινείται στο πεδίο βαρύτητας κατά μήκος του άξονα z, όπου δέχεται μια δύναμη τριβής $-b\boldsymbol{v}$, δηλαδή η ολική δύναμη έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{F} = -b\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{g} = -b|\boldsymbol{v}|\hat{\boldsymbol{z}} - mg\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \text{με } |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|$$

Από τη σχέση (2.0.1), το «δυναμικό» της γραμμικής ορμής είναι

$$\boldsymbol{C} = -\int \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = -\int (-b|v| - mg)\hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}t = -b\int \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\hat{\boldsymbol{z}} + mgt\hat{\boldsymbol{z}} = -bz\hat{\boldsymbol{z}} + mgt\hat{\boldsymbol{z}}$$

διότι

$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right| = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Επομένως, διατηρήσιμη γενικευμένη γραμμική ορμή είναι

$$\boldsymbol{P}_g = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{C} = (m\hat{\boldsymbol{z}} - bz + mgt)\hat{\boldsymbol{z}} = \text{ σταθερή ποσότητα}$$

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και φορτίου q σε ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ και ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$. Η ολική ορμή του σωματιδίου είναι

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E}(t)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός. Από τη σχέση (2.0.1), το "δυναμικό" της γραμμικής ορμής είναι

$$\boldsymbol{C} = -\int \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = -q\left(\int \dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}t\right) \times \boldsymbol{B} + q\int \boldsymbol{E}(t)\mathrm{d}t = -q\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} + q\int \boldsymbol{E}(t)\mathrm{d}t$$

Επομένως, η διατηρήσιμη γενικευμένη ορμή είναι

$$\boldsymbol{p}_g = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{C} = m\boldsymbol{v} - q\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} - q\int \boldsymbol{E}(t)\mathrm{d}t = m\dot{\boldsymbol{r}} - q\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} - q\int \boldsymbol{E}(t)\mathrm{d}t = \text{ σταθερή ποσότητα}$$

Στην περίπτωση που έχουμε ένα τυχαίο μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{B}$, και το ηλεκτρικό, $\boldsymbol{E}$, πεδίο, γνωρίζουμε ότι αυτά προέρχονται από ένα διανυσματικό πεδίο, $\boldsymbol{A}$, και ένα βαθμωτό πεδίο Φ

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\Phi$$

Από τη δύναμη του Lorentz θα έχουμε

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + q\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\Phi\right)$$

με

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$$

Επειδή η ταχύτητα εξαρτάται από το χρόνο και όχι από τη θέση,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{και} \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = 0$$

Άρα

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\left[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}\right] - q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - q\boldsymbol{\nabla}\Phi = -q\left[\underbrace{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}}_{\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t}\right] + q\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}}{c} - \Phi\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{p}+q\boldsymbol{A}\right)=q\boldsymbol{\nabla}\left[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}-\Phi\right] \tag{2.189}$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (2.0.1) ότι η ποσότητα $q\boldsymbol{A}$ αναγνωρίζεται ως το «δυναμικό» της γραμμικής ορμής αν η ποσότητα

$$\boldsymbol{\nabla}\left[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}-\Phi\right]=0$$

Αν αυτή η ποσότητα δε μηδενίζεται αλλά μπορεί να εκφραστεί ως η ολική χρονική παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{D}$

$$q\boldsymbol{\nabla}\left[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}-\Phi\right]=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}$$

τότε η σχέση (2.0.1) θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{p}+q\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}\right]=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p}+q\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}= \text{ σταθερή ποσότητα}$$

Στην περίπτωση ενός ομογενούς χρονοανεξάρτητου μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}_0$, μια εκλογή του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{A}$ είναι $\boldsymbol{A}=(1/2)\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{r}$, και επομένως έπεται από τη σχέση (2.0.1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{p}+\frac{q}{2}\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{r}\right)=q\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})=-q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=-\frac{q}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{r}) \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{p}+q\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{r}\right)=0$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{p}+q\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{r}= \text{ σταθερή ποσότητα}$$

Αυτό είναι το διάνυσμα του Landau, που διατηρείται, όπου ο πρώτος όρος $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=m\dot{\boldsymbol{r}}$ είναι η γραμμική ορμή του σωματιδίου και ο δεύτερος όρος $q\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{r}=-q\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}_0$ προέρχεται από την αλληλεπίδραση του φορτισμένου σωματιδίου q με το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}_0$. Αυτός ο όρος θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει ένα χαρακτήρα «δυναμικού», σε αναλογία με τη δυναμική ενέργεια που έχει ένα σωματίδιο όταν αλληλεπιδρά με ένα διατηρητικό πεδίο.

2.0.2 Γενικευμένη στροφορμή

Αν θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται κάτω από τη δράση μιας ροπής, $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$, τότε η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{2.190}$$

όπου $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ είναι η αποκτούμενη στροφορμή του σωματιδίου.
Αν θεωρήσουμε ότι η ροπή, $\boldsymbol{\tau}$, της δύναμης, $\boldsymbol{F}$, μπορεί να γραφτεί ως η ολική χρονική παράγωγος ενός νέου διανύσματος, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\tau}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}=-\left[\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}\right] \tag{2.191}$$

τότε θα έχουμε από τις σχέσεις (2.0.2) και (2.0.2)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\tau}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{G}\right)=0$$

μια διατηρήσιμη ποσότητα $\boldsymbol{L}_g=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{G}$ που θα την ονομάσουμε γενικευμένη στροφορμή, και το διάνυσμα $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)$ θα παίζει το ρόλο του «δυναμικού» της στροφορμής, και θα το προσδιορίζουμε από τη σχέση (2.0.2)

$$\boldsymbol{G}=-\int\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}t \tag{2.192}$$

Παράδειγμα 1

Αν θεωρήσουμε την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μάζας m, και φορτίου q, μέσα σε ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο της κίνησής του, τότε η δύναμη Lorentz, και η ροπή $\boldsymbol{\tau}$, που ασκείται στο σωματίδιο θα είναι

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = q\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = q\Big[\underbrace{\cancelto{0}{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})}\boldsymbol{v}}_{\text{διότι } \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{B}} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B}\Big] = -q(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B} = -qrv\boldsymbol{B}$$

διότι

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = r\dot{r} = rv \tag{2.193}$$

Το δυναμικό $\boldsymbol{G}$ που αντιστοιχεί στη ροπή $\boldsymbol{\tau}$, υπολογίζεται από τη σχέση (2.0.2)

$$G = -\int \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}t = q\int r\underbrace{v\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}r} B\hat{\boldsymbol{z}} = q\int r\,\mathrm{d}rB\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{qB}{2}r^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

Επομένως η γενικευμένη ορμή του προβλήματος θα είναι

$$\boldsymbol{L}_g = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} + \frac{qB}{2}r^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{L}_g = m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{qB}{2}r^2\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.194}$$

Για κίνηση στο επίπεδο (x,y), το $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}},\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{y}}$, και το $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = (x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{\boldsymbol{z}}$, και επομένως η σχέση (2.0.2) είναι

$$\boldsymbol{L}_g = \left[m(x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{qB}{2}(x^2+y^2)\right]\hat{\boldsymbol{z}}$$

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε την αλληλεπίδραση ενός φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και φορτίου q, με το μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{B}$, ενός μαγνητικού μονόπολου g (αν βέβαια υπάρχει!)

$$\boldsymbol{B} = \frac{g}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Η ροπή της δύναμης Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, που ασκείται στο σωματίδιο, θα είναι

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = qg\frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})}{r^3}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη διανυσματική ταυτότητα (11.5) στη σελίδα (534)

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = qg\frac{r^2\boldsymbol{v} - \overbrace{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})}^{rv}\boldsymbol{r}}{r^3} = qg\frac{r^2\dot{\boldsymbol{r}} - r\dot{r}\boldsymbol{r}}{r^3}$$

όπου $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = rv$ από τη σχέση (2.0.2)

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = qg\frac{r\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{r}\boldsymbol{r}}{r^2} = qg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

Επομένως το δυναμικό $\boldsymbol{G}$ της στροφορμής θα είναι (βλ. σχέση (2.0.2))

$$\boldsymbol{G} = -\int\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}t = -qg\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -qg\int d\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -qg\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Άρα η γενικευμένη στροφορμή του προβλήματος θα είναι

$$\boldsymbol{L}_g = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} - qg\frac{\boldsymbol{r}}{r} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} - qg\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η διατήρηση της γενικευμένης γραμμικής ορμής, $\boldsymbol{P}_g$, και της γενικευμένης στροφορμής, $\boldsymbol{L}_g$, παράγονται αυτόματα από το φορμαλισμό του Lagrange της αναλυτικής μηχανικής με τη βοήθεια του θεωρήματος της Noether από τη μεταφορική και στροφική συμμετρία της λαγκρανζιανής συνάρτησης ενός συστήματος, αντίστοιχα.

3

Συστήματα Αναφοράς

Πρόβλημα 3.1 Πάρτε ένα αδρανειακό πλαίσιο $O_I x_I y_I z_I$ και ένα στρεφόμενο πλαίσιο $O_R x_R y_R z_R$ πλαίσιο με κοινή αρχή και κοινό τον κατακόρυφο άξονα z (θεωρούμε ως ω μια σταθερή κυκλική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής).

(α) Δείξτε ότι με αναφορά στο στρεφόμενο πλαίσιο η δυναμική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

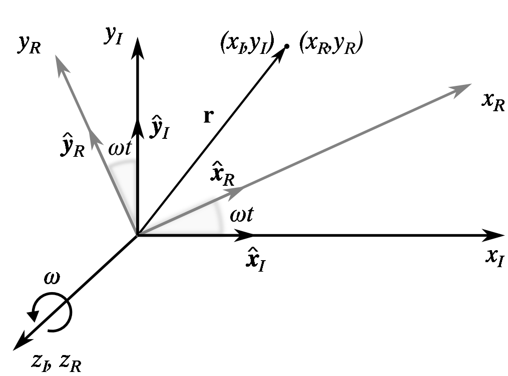
όπου $m\ddot{\boldsymbol{r}}$ και $\boldsymbol{F}$ είναι η δύναμη στο αδρανειακό και στο περιστρεφόμενο πλαίσιο αντιστοίχως. Εξηγήστε τα διάφορα μεγέθη που υπεισέρχονται στην εξίσωση.

(β) Εφαρμόστε κατάλληλα τον παραπάνω τύπο για σωματίδιο κοντά στην επιφάνεια της Γης για να βρείτε την πραγματική επιτάχυνση της βαρύτητας g' (την οποία θα πάρετε όταν $\dot{\boldsymbol{r}} = 0$)

$$\boldsymbol{g'} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

Να υπολογίσετε τη διαφορά των μέτρων των g και g' σε σημείο του Ισημερινού, δεδομένου ότι η ακτίνα στον ισημερινό είναι περίπου $R = 6370\,\mathrm{km}$ και ότι η Γη κάνει σε 365 μέρες 366 στροφές.

Λύση:



Σχήμα 3.1

(α) Από το σχήμα μπορούμε να εκφράσουμε τα μοναδιαία διανύσματα του περιστρεφόμενου συστήματος ως προς τους τρεις άξονες ως εξής

$$\hat{\boldsymbol{x}}_R = \hat{\boldsymbol{x}}_I \cos(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}_I \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{y}}_R &= -\hat{\boldsymbol{x}}_I \sin(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}_I \cos \omega t\\ \hat{\boldsymbol{z}}_R &= \hat{\boldsymbol{z}}_I\end{aligned}$$

Ένα σημείο στο χώρο μπορεί να προσδιοριστεί μέσω του διανύσματος $\boldsymbol{r}$ με τις καρτεσιανές συντεταγμένες του στο περιστρεφόμενο και αδρανειακό σύστημα

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_R &= \boldsymbol{x}_I\\ \Rightarrow x_I\hat{\boldsymbol{x}}_I + y_I\hat{\boldsymbol{y}}_I + z_I\hat{\boldsymbol{z}}_I &= x_R\hat{\boldsymbol{x}}_R + y_R\hat{\boldsymbol{y}}_R + z_R\hat{\boldsymbol{z}}_R\\ &= x_R\left[\hat{\boldsymbol{x}}_I\cos(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}_I\sin(\omega t)\right] + y_R\left[-\hat{\boldsymbol{x}}_I\sin(\omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}_I\cos(\omega t)\right] + z_R\hat{\boldsymbol{z}}_R\\ &= \hat{\boldsymbol{x}}_I\left[x_R\cos(\omega t) - y_R\sin(\omega t)\right] + \hat{\boldsymbol{y}}_I(x_R\sin(\omega t) + y_R\cos(\omega t)) + z_I\hat{\boldsymbol{r}}\\ &\Rightarrow \begin{cases} x_I = x_R\cos(\omega t) - y_R\sin(\omega t)\\ y_I = x_R\sin(\omega t) + y_R\cos(\omega t)\\ z_I = z_R\end{cases}\end{aligned}$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας στο αδρανειακό σύστημα θα είναι

$$\begin{aligned}\dot{x}_I &= \dot{x}_R\cos(\omega t) - \omega x_R\sin(\omega t) - \dot{y}_R\sin(\omega t) - \omega y_R\cos(\omega t)\\ \dot{y}_I &= \dot{x}_R\sin(\omega t) + \omega x_R\cos(\omega t) + \dot{y}_R\cos(\omega t) - \omega y_R\sin(\omega t)\\ \dot{z}_I &= \dot{z}_R\end{aligned}$$

και οι αντίστοιχες επιταχύνσεις θα είναι

$$\begin{aligned}\ddot{x}_I &= \ddot{x}_R\cos(\omega t) - \omega\dot{x}_R\sin(\omega t) - \omega\dot{x}_R\sin(\omega t) - \omega^2 x_R\cos(\omega t)\\ &\quad - \ddot{y}_R\sin(\omega t) - \dot{y}_R\omega\cos(\omega t) - \omega\dot{y}_R\cos(\omega t) + \omega^2 y_R\sin(\omega t) \qquad (3.1)\\ \ddot{y}_I &= \ddot{x}_R\sin(\omega t) + 2\omega\dot{x}_R\cos(\omega t) - \omega^2 x_R\sin(\omega t)\\ &\quad + \ddot{y}_R\cos(\omega t) - 2\omega\dot{y}_R\sin(\omega t) - \omega^2 y_R\cos(\omega t) \qquad (3.2)\\ \ddot{z}_I &= \ddot{z}_R\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (3) με $\cos(\omega t)$ και την (3) με $\sin(\omega t)$ και προσθέτοντας τις νέες αυτές σχέσεις, θα έχουμε

$$\ddot{x}_I\cos(\omega t) + \ddot{y}_I\sin(\omega t) = \ddot{x}_R - \omega^2 x_R - 2\omega^2\dot{y}_R$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_R = \ddot{x}_I\cos(\omega t) + \ddot{y}_I\sin(\omega t) + \omega^2 x_R + 2\omega^2\dot{y}_R \tag{3.3}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (3) με $-\sin(\omega t)$ και την (3) με $\cos(\omega t)$ και προσθέτουμε τις νέες αυτές σχέσεις, θα έχουμε

$$-\ddot{x}_I\sin(\omega t) + \ddot{y}_I\cos(\omega t) = \ddot{y}_R - \omega^2 y_R + 2\omega^2\dot{x}_R$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_R = -\ddot{x}_I\sin(\omega t) + \ddot{y}_I\cos(\omega t) + \omega^2 y_R - 2\omega^2\dot{x}_R \tag{3.4}$$

Η περιστροφή του $Ox_Ry_Rz_R$ πλαισίου είναι περί τον άξονα των z και συνεπώς η γωνιακή ταχύτητα θα είναι: $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Με αυτή την παρατήρηση της γωνιακής ταχύτητας βλέπουμε ότι θα ισχύει

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_R = \begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_R & \hat{\boldsymbol{y}}_R & \hat{\boldsymbol{z}}_R\\ 0 & 0 & \omega\\ \dot{x}_R & \dot{y}_R & \dot{z}_R\end{vmatrix} = -\omega\dot{y}_R\hat{\boldsymbol{x}}_R + \omega\dot{x}_R\hat{\boldsymbol{y}}_R \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_R = \begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_R & \hat{\boldsymbol{y}}_R & \hat{\boldsymbol{z}}_R\\ 0 & 0 & \omega\\ x_R & y_R & z_R\end{vmatrix} = -\omega y_R\hat{\boldsymbol{x}}_R + \omega x_R\hat{\boldsymbol{y}}_R$$

και με τη βοήθεια της εξίσωσης (3) θα έχουμε

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_R)=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_R & \hat{\boldsymbol{y}}_R & \hat{\boldsymbol{z}}_R\\ 0 & 0 & \omega\\ -\omega\dot{y}_R & \omega\dot{x}_R & 0\end{vmatrix}=-\omega^2\dot{x}_R\hat{\boldsymbol{x}}_R+\omega^2\dot{y}_R\hat{\boldsymbol{y}}_R \tag{3.6}$$

Η επιτάχυνση στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς θα είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_R&=\ddot{x}_R\hat{\boldsymbol{x}}_R+\ddot{y}_R\hat{\boldsymbol{y}}_R+\ddot{z}_R\hat{\boldsymbol{z}}_R\\ &=\ddot{x}_I\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}}_R+\ddot{y}_I\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}}_R+\omega^2x_R\hat{\boldsymbol{x}}_R+2\omega^2\dot{y}_R\hat{\boldsymbol{x}}_R\\ &\quad-\ddot{x}_I\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}_R+\ddot{y}_I\cos\omega t\hat{\boldsymbol{y}}_R+\omega^2y_R\hat{\boldsymbol{y}}_R-2\omega^2\dot{x}_R\hat{\boldsymbol{y}}_R+\ddot{z}_R\hat{\boldsymbol{z}}_R\\ &=\ddot{x}_I(\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}}_R-\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}_R)+\ddot{y}_I(\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}}_R+\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}_R)\\ &\quad+\ddot{z}_R\hat{\boldsymbol{z}}_R+(\omega^2x_R\hat{\boldsymbol{x}}_R+\omega^2y_R\hat{\boldsymbol{y}}_R)-2(\omega\dot{x}_R\hat{\boldsymbol{y}}_R-\omega\dot{y}_R\hat{\boldsymbol{x}}_R)\end{aligned}$$

όπου οι σχέσεις (3), (3) για τις εκφράσεις $\ddot{x}_R,\ddot{y}_R$ χρησιμοποιήθηκαν. Επιπλέον αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3), (3) η επιτάχυνση, $\boldsymbol{a}_R$, στο περιστρεφόμενο πλαίσιο θα γραφτεί

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_R&=\ddot{x}_I\hat{\boldsymbol{x}}_I+\ddot{y}_I\hat{\boldsymbol{y}}_I+\ddot{z}_I\hat{\boldsymbol{z}}_I-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}\\ m\ddot{\boldsymbol{r}}&=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}\end{aligned} \tag{3.7}$$

όπου η δύναμη $\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}}_I$ είναι η δύναμη εκφραζόμενη στο αδρανειακό σύστημα, που είναι η πραγματική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο. Ο όρος $m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ είναι η φυγόκεντρος δύναμη και ο όρος $\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ είναι η δύναμη Coriolis.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι στην περίπτωση που η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο ($\boldsymbol{\omega}=\omega t$), στο στρεφόμενο πλαίσιο η δυναμική εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

όπου $m\ddot{\boldsymbol{r}}$ και $\boldsymbol{F}$ είναι η δύναμη στο αδρανειακό και στο περιστρεφόμενο πλαίσιο αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε την εμφάνιση μιας νέας υποθετικής δύναμης $-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$.

(β) Με τη βοήθεια της εξίσωσης (3) η πραγματική επιτάχυνση, $\boldsymbol{g}'$, της βαρύτητας σε ένα σημείο του Ισημερινού θα είναι

$$\boldsymbol{g}'=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})$$

όπου η $\boldsymbol{g}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο περιστρεφόμενο σύστημα, $|\boldsymbol{R}|$ είναι η ακτίνα της Γης και $\boldsymbol{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα με μέτρο

$$\omega=2\pi\times\frac{366}{365\times24\times60\times60}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}=0,73\times10^{-4}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Άρα η απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων των g και g' στο Ισημερινό θα είναι

$$|g'-g|=\omega^2R=0,034\,\mathrm{m/s^2}$$

Πρόβλημα 3.2 Υποθέτουμε ότι σε ένα κύκλοτρο έχουμε $\boldsymbol{B}=B\hat{\boldsymbol{z}}$ και

$$E_x=E\cos(\omega_c t),\quad E_y=-E\sin(\omega_c t),\quad E_z=0$$

με E μια θετική σταθερά. Βλέπουμε ότι το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κινείται κυκλικά με κυκλοτρονική συχνότητα ω_c Να δείξετε ότι, μέσα στο πεδίο αυτό, η κίνηση ενός σωματιδίου με φορτίο q εκφράζεται με τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{qE}{m\omega_c^2}\left[\omega_c t\sin(\omega_c t)+\cos(\omega_c t)-1\right]\\ y(t)&=\frac{qE}{m\omega_c^2}\left[\omega_c t\cos\omega_c t-\sin(\omega_c t)\right]\end{aligned}$$

όταν για $t=0$ το σωματίδιο ηρεμεί στην αρχή των συντεταγμένων. Σχεδιάστε τις πρώτες στροφές αυτής της κίνησης.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton, όπου η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι το διανυσματικό άθροισμα της ηλεκτρικής δύναμης και της δύναμης Lorentz

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} &= \frac{qE}{m}\Big(\cos(\omega_c t)\,\hat{\boldsymbol{x}} - \sin(\omega_c t)\,\hat{\boldsymbol{y}}\Big) + \frac{q}{m}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

όπου η ταχύτητα, $\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{y}}$, το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E\cos(\omega_c t)\hat{\boldsymbol{x}} - E\sin(\omega_c t)\hat{\boldsymbol{y}}$ και η κυκλοτρονική γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega_c = qB/m$. Άρα η εξίσωση κίνησης αναλύεται στις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες θα είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= a\cos(\omega_c t) - \omega_c v_y \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -a\sin(\omega_c t) + \omega_c v_x \\
\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= 0
\end{aligned}
$$

όπου $a = qE/m$. Από την τελευταία εξίσωση, για τη συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα των z θα έχουμε

$$
\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_z(t) = 0 \quad \Rightarrow z(t) = 0
$$

όπου οι αρχικές συνθήκες $z(0) = v_z(0) = 0$ έχουν χρησιμοποιηθεί. Άρα η κίνηση του σωματιδίου γίνεται πάνω στο επίπεδο $x - y$.
Ορίζουμε μια νέα μιγαδική μεταβλητή $w(t) = v_y(t) + iv_x(t)$ και αφού πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση που μας δίνει την $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, με τη μιγαδική μονάδα i και την προσθέσουμε με την εξίσωση της $\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= a\mathrm{e}^{i\omega_c t} + i\omega_c w \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - i\omega_c w &= a\mathrm{e}^{i\omega_c t}
\end{aligned}
$$

Η λύση της πρώτου βαθμού ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - i\omega_c w = 0
$$

είναι

$$
w_o(t) = A\mathrm{e}^{i\omega_c t}
$$

που βρίσκεται με τη βοήθεια της ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D - i\omega_c = 0$ της διαφορικής εξίσωσης της ομογενούς

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - i\omega_c w &= 0 \\
\Rightarrow (D - i\omega_c)w(t) &= 0
\end{aligned}
$$

όπου ο τελεστής $D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$
w_\mu(t) = Bt\mathrm{e}^{i\omega_c t}
$$

εφ' όσον ο εκθέτης της συνάρτησης $Bt\mathrm{e}^{i\omega_c t}$ είναι ίσος με τη ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D - i\omega_c = 0$ της διαφορικής εξίσωσης της ομογενούς.

Άρα η γενική λύση θα είναι

$$w(t) = w_o(t) + w_\mu(t) = A\mathrm{e}^{i\omega_c t} + Bt\mathrm{e}^{i\omega_c t}$$

όπου οι σταθερές A, B θα ορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $v_x(0) = v_y(t) = x(0) = y(0) = 0$. Συνεπώς οι αρχικές συνθήκες θα μας δώσουν

$$A = 0 \quad \text{και} \quad B = ai$$

Επομένως οι καρτεσιανές συντεταγμένες της ταχύτητας θα είναι

$$w(t) = iat\mathrm{e}^{i\omega_c t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = at\cos(\omega_c t), \\ v_y(t) = -at\sin(\omega_c t). \end{cases}$$

Η τροχιά του σωματιδίου, $\big(x(t), y(t)\big)$, μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις των συνιστωσών της ταχύτητας

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = at\cos\omega_c t$$

$$\Rightarrow \int_0^t \mathrm{d}x = a\int_0^t t\cos\omega_c t\mathrm{d}t = \frac{a}{\omega_c}\left[t\sin(\omega_c t) - \int_0^t \sin(\omega_c t)\mathrm{d}t\right] = \frac{a}{\omega_c}\left[t\sin(\omega_c t) + \frac{1}{\omega_c}\big(\cos(\omega_c t) - 1\big)\right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{\omega_c^2}(\cos\omega_c t + \omega_c t\sin\omega_c t - 1)$$

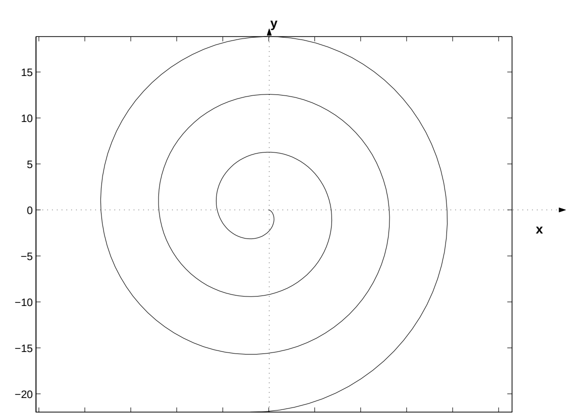
και

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -at\sin(\omega_c t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \mathrm{d}y = -a\int_0^t t\sin(\omega_c t)\mathrm{d}t = \frac{a}{\omega_c}\left[t\cos\omega_c t - \int_0^t \cos\omega_c t\mathrm{d}t\right] = \frac{a}{\omega_c}\left[t\cos\omega_c t - \frac{1}{\omega_c}\sin(\omega_c t)\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{a}{\omega_c^2}\left[\omega_c t\cos(\omega_c t) - \sin(\omega_c t)\right]$$

όπου $a = qE/m$ και $\omega_c = qB/m$. Παρατηρούμε ότι τα $x(t)$, $y(t)$ αυξάνονται γραμμικά με το χρόνο ενώ συγχρόνως το σωματίδιο εκτελεί κυκλική κίνηση, με αποτέλεσμα την σπειροειδή κίνηση όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 για $\omega_c = 1$, $a = 1$ και χρόνο $0 < t < 7\pi$.



Σχήμα 3.2

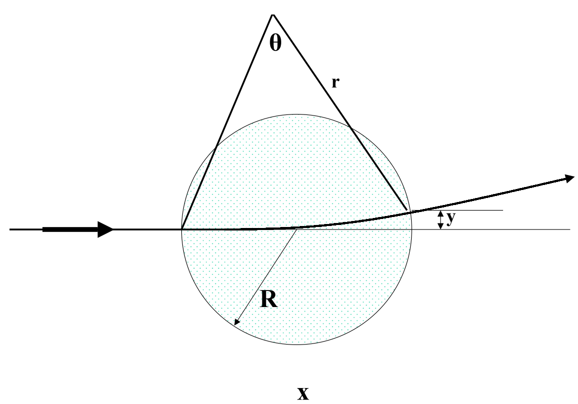
Πρόβλημα 3.3 Η εκτροπή μιας ηλεκτρονικής δέσμης μέσα σε έναν καθοδικό σωλήνα μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα τόσο με μαγνητικό όσο και με ηλεκτροστατικό τρόπο. Μια δέσμη ηλεκτρονίων ενέργειας W, μπαίνει σε ένα χώρο όπου επικρατεί ένα ομοιόμορφο εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο με ένταση B (η ανομοιομορφία προς τα άκρα της περιοχής του πεδίου αμελείται, σχήμα 3.3).

(α) Αν x είναι η οριζόντια απόσταση ανάμεσα στο σημείο όπου το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο και το σημείο όπου βγαίνει, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$y = r\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]$$

όπου r η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς των ηλεκτρονίων μέσα στο εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο. Η ακτίνα καμπυλότητας είναι η ακτίνα του κύκλου του οποίου ένα τόξο ταυτίζεται με το καμπύλο τμήμα της τροχιάς των ηλεκτρονίων.

(β) Αν R είναι η ακτίνα των μαγνητικών πόλων, τότε $x = 2R$ όταν $r \gg R$. Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα του διωνύμου για να αποδείξετε ότι $y = 2R^2/r$.



Σχήμα 3.3

Λύση:

(α) Από το σχήμα έχουμε ότι

$$y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

και

$$x = r\sin\theta = r\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις θα έχουμε

$$y = r\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right] \tag{3.8}$$

(β) Αν $r \gg R$ η γωνία θ είναι πολύ μικρή και επομένως το $x \simeq 2R$, συνεπώς θα ισχύει

$$\frac{x}{r} = \frac{2R}{r} \ll 2$$

και από το ανάπτυγμα της $\left[1-\left(x/r\right)^2\right]^{1/2}$ σε σειρά Taylor θα έχουμε

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\cdots\simeq 1-\frac{2R^2}{r^2}$$

και επομένως η σχέση (3) θα γίνει

$$y=r\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]=r\frac{2R^2}{r^2}=\frac{2R^2}{r}$$

Πρόβλημα 3.4 Στην ιατρική υπηρεσία της αεροπορίας χρησιμοποιείται φυγοκεντρική μηχανή, που αποτελείται από ένα οριζόντιο βραχίονα, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα. Στο άκρο του βραχίονα κάθεται ο άνθρωπος που πρόκειται να εξεταστεί. Αν η απόσταση του επιβάτη από το κέντρο περιστροφής είναι $7\,\mathrm{m}$, πόσο γρήγορα πρέπει να περιστρέφεται ο βραχίονας, ώστε ο επιβάτης να υφίσταται επιτάχυνση ίση με $5g$; (*g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.*)

Λύση:

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι

$$a=\omega^2 r=5g \quad \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{5g}{r}}$$

επομένως η γωνιακή ταχύτητα του ανθρώπου θα είναι

$$\omega=2,65\,\mathrm{rad/s}$$

και η ταχύτητα του θα είναι

$$v=\omega r=18,6\,\mathrm{m/s}$$

Πρόβλημα 3.5 Μια μάζα m κρέμεται από το άκρο νήματος το οποίο είναι δεμένο σε μια δοκό. Το σύστημα είναι τοποθετημένο σε πλατφόρμα με ρόδες όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4. Βρείτε τη γωνία θ που κάνει το νήμα με την κατακόρυφο, καθώς και την τάση T του νήματος όταν η πλατφόρμα κινείται:

(α) με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{x}}$

(β) με σταθερή επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_0=a_0\hat{\boldsymbol{x}}$.

Σχεδιάστε τις δυνάμεις για την κάθε περίπτωση.

Σχήμα 3.4

Λύση:

(α) Έχουμε σταθερή ταχύτητα άρα

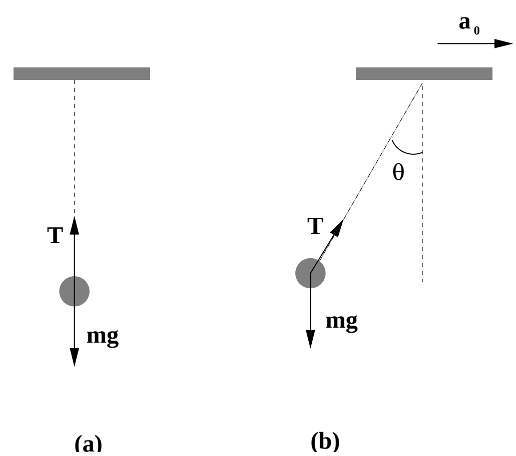
$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{a}_0 = 0$$

Επειδή το σώμα ισορροπεί έχουμε: Στον άξονα x επειδή δεν υπάρχει καμία επιτάχυνση $F_x = 0$. Στον άξονα y η τάση του νήματος ισορροπεί το βάρος του σώματος, άρα $F_y = m\,\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} = 0$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.5(α). Άρα το νήμα παραμένει κατακόρυφο.

(β) Έχουμε σταθερή επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_0 = a_0\hat{\boldsymbol{x}}$ Στον άξονα x έχουμε $F_x = m\boldsymbol{a}_0$ ενώ στον άξονα y έχουμε $F_y = 0$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5(β)

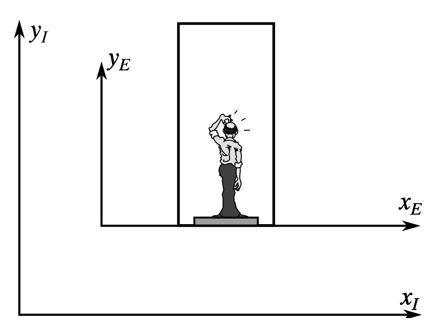
$$\hat{\boldsymbol{x}}: \quad T\sin\theta = ma_0, \qquad \hat{\boldsymbol{y}}: \quad T\cos\theta = mg$$

άρα $\tan\theta = a_0/g$.



Σχήμα 3.5

Πρόβλημα 3.6 Ένας άνθρωπος με μάζα $70\,kg$ πατάει επάνω σε μια ζυγαριά η οποία βρίσκεται σε ασανσέρ που κινείται κατακόρυφα με κάποια επιτάχυνση. Πόσο βάρος θα δείξει η ζυγαριά αν η επιτάχυνση του ασανσέρ είναι: (α) $0\,\mathrm{m/s^2}$, (β) $1,2\,\mathrm{m/s^2}$, (γ) $-9,8\,\mathrm{m/s^2}$.
Να περιγράψτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο αυτό για ένα παρατηρητή που βρίσκεται (i) ακίνητος στο έδαφος και (ii) ακίνητος στο ασανσέρ.



Σχήμα 3.6

Λύση:

Ας θεωρήσουμε ότι $\boldsymbol{a}_I$, $\boldsymbol{a}$ είναι η επιτάχυνση μετρούμενη στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S, και στο σύστημα του ασανσέρ S' αντίστοιχα. Από το μετασχηματισμό των επιταχύνσεων θα έχουμε

$$\boldsymbol{a}_I = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_0 \tag{3.9}$$

όπου $\boldsymbol{a}_0$ είναι η επιτάχυνση του ασανσέρ. Αν πολλαπλασιάσουμε με τη μάζα m και τις δύο πλευρές της εξίσωσης (3) θα έχουμε

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{a}_I &= m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}_0 \\ \Rightarrow m\boldsymbol{a} &= m\boldsymbol{a}_I - m\boldsymbol{a}_0 \end{aligned}$$

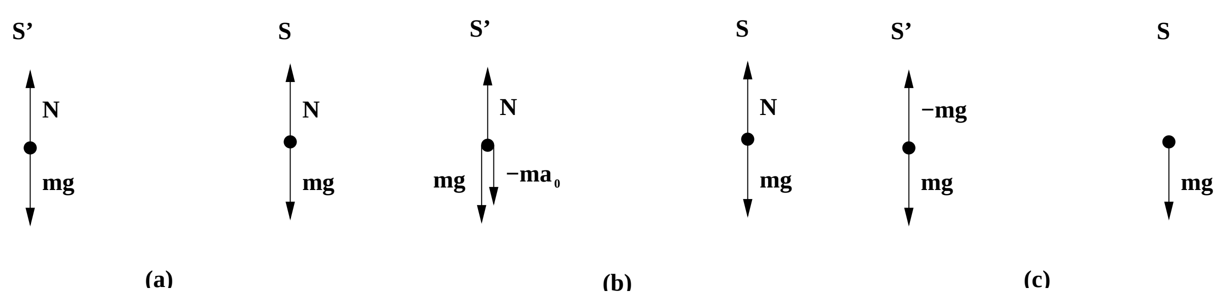
Αν $\boldsymbol{N}$ είναι η δύναμη που εξασκεί το δάπεδο στον άνθρωπο, τότε η συνολική δύναμη στον άνθρωπο μέσα στο ασανσέρ θα είναι μηδέν (ώστε να υπάρχει ισορροπία)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N} + m(\boldsymbol{a}_I - \boldsymbol{a}_0) = 0$$

(α) Αν η επιτάχυνση στο ασανσέρ είναι $\boldsymbol{a}_0 = 0$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_0 &= 0 \\ \Rightarrow \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}_I \\ \Rightarrow \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{a}_I &= 0 \\ \Rightarrow \boldsymbol{N} &= -m\boldsymbol{a}_I \\ \Rightarrow N\hat{\boldsymbol{y}} &= mg\hat{\boldsymbol{y}} \\ \Rightarrow N &= 686\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{a}_I = -g\hat{\boldsymbol{y}}$ είναι η επιτάχυνση μετρούμενη από έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος (δηλαδή είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, g). Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος και για έναν που είναι ακίνητος στο ασανσέρ δείχνονται στο σχήμα (3.7a), όπου θα έχουμε τη δύναμη της βαρύτητας $m\boldsymbol{g}$ και τη δύναμη του δαπέδου $\boldsymbol{N}$.



Σχήμα 3.7

(β) Αν $\boldsymbol{a}_0 = 1,2\hat{\boldsymbol{y}}\, m/s^2$, θα έχουμε από τη σχέση (3)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_I - \boldsymbol{a}_0 = -(9,8 + 1,2)\hat{\boldsymbol{y}} = -11\hat{\boldsymbol{y}}$$

και επομένως η δύναμη $\boldsymbol{N}$ θα είναι

$$\boldsymbol{N} = m\boldsymbol{a} = 770\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{N}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο ασανσέρ οι δυνάμεις είναι:

- η δύναμη $\boldsymbol{N}$ που ασκεί το δάπεδο του ασανσέρ
- η δύναμη βαρύτητας $m\boldsymbol{g}$
- η υποθετική δύναμη $-m\boldsymbol{a}_0$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος θα είναι όπως φαίνονται στο σχήμα (3.7b), δηλαδή δεν θα υπάρχει η υποθετική δύναμη $-m\boldsymbol{a}_0$.
(γ) Αν $\boldsymbol{a}_0 = -9,8\hat{\boldsymbol{y}}\, m/s^2$ δηλαδή έχουμε ελεύθερη πτώση, τότε η επιτάχυνση για τον άνθρωπο μέσα στο ασανσέρ θα είναι

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_I - \boldsymbol{a}_0 = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{N} = 0$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος θα είναι όπως φαίνονται στο σχήμα 3.7c, δηλαδή θα υπάρχει μόνο η δύναμη της βαρύτητας.

Πρόβλημα 3.7 Δυο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι

$$\boldsymbol{r}_1 = (t^2 + 3t - 5)\hat{\boldsymbol{x}} + (3t + 7)\hat{\boldsymbol{y}} + (21 - 2t^2)\hat{\boldsymbol{z}}$$

και

$$\boldsymbol{r}_2 = (25 - t - t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (5t + 1)\hat{\boldsymbol{y}} + (2t^2 - 5t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και υπολογίστε πότε θα συμβεί η κρούση.

(β) Διατηρείται η ορμή του συστήματος;

(γ) Αν η κρούση είναι πλαστική, να βρείτε την ταχύτητά τους μετά την κρούση και την κατοπινή τους θέση συναρτήσει του χρόνου.

Λύση:

(α) Για να συγκρουσθούν τα δύο σωματίδια θα πρέπει $\boldsymbol{r_1}(t_\Sigma) = \boldsymbol{r_2}(t_\Sigma)$, όπου t_Σ ο χρόνος της σύγκρουσης. Για τις τρεις συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}: \qquad & x_1(t_\Sigma) = x_2(t_\Sigma)\\ &\Rightarrow t_\Sigma^2 + 3t_\Sigma - 5 = -t_\Sigma^2 - t_\Sigma + 25\\ &\Rightarrow t_\Sigma^2 + 2t_\Sigma - 15 = 0\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{y}}: \qquad & y_1(t_\Sigma) = y_2(t_\Sigma)\\ &\Rightarrow 3t_\Sigma + 7 = 5t_\Sigma + 1\\ &\Rightarrow t_\Sigma = 3\text{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}}: \qquad & z_1(t_\Sigma) = z_2(t_\Sigma)\\ &\Rightarrow -2t_\Sigma^2 + 21 = 2t_\Sigma^2 - 5t_\Sigma\\ &\Rightarrow 4t_\Sigma^2 - 5t_\Sigma - 21 = 0\end{aligned} \tag{3.11}$$

Από τη σχέση (3) παίρνουμε

$$t_\Sigma = \begin{cases} 3\text{s} \\ -5\text{s} \quad \text{μη φυσική λύση}\end{cases}$$

ενώ από τη σχέση (3)

$$t_\Sigma = \begin{cases} 3\text{s} \\ -\dfrac{7}{4}s \quad \text{μη φυσική λύση}\end{cases}$$

Άρα τα σωματίδια θα συγκρουσθούν μετά από $t_\Sigma = 3$s.

(β) Οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι αντίστοιχα

$$\boldsymbol{v}_1(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1(t)}{\mathrm{d}t} = (2t + 3)\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} - 4t\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{v}_2(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2(t)}{\mathrm{d}t} = (-2t-1)\hat{\boldsymbol{x}} + 5\hat{\boldsymbol{y}} + (4t-5)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.13}$$

Οι επιταχύνσεις και οι δυνάμεις που δρουν πάνω στα δύο σωματίδια είναι αντίστοιχα

$$\boldsymbol{a}_1(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1(t)}{\mathrm{d}t} = 2\hat{\boldsymbol{x}} - 4\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F}_1 = m\boldsymbol{a}_1 = m(2\hat{\boldsymbol{x}} - 4\hat{\boldsymbol{z}}) \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{a}_2(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2(t)}{\mathrm{d}t} = -2\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F}_2 = m\boldsymbol{a}_2 = m(-2\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{z}}) \tag{3.15}$$

Από τις (3) και (3) έχουμε

$$\boldsymbol{F}_{\text{ΟΛ}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$$

Άρα δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη στο σύστημα των δύο σωματιδίων και επειδή

$$\boldsymbol{F}_{\text{ΟΛ}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_{\text{ΟΛ}}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Άρα η ορμή του συστήματος είναι σταθερή.
Άλλος τρόπος:

$$\boldsymbol{P}_{\text{ΟΛ}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2$$

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες από τις (3) και (3) βρίσκουμε

$$\boldsymbol{P}_{\text{ΟΛ}} = m(2\hat{\boldsymbol{x}} + 8\hat{\boldsymbol{y}} - 5\hat{\boldsymbol{z}})$$

απ' όπου βλέπουμε ότι η ορμή είναι σταθερή.

(γ)

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$\boldsymbol{P}_{\text{Πριν}} = \boldsymbol{P}_{\text{Μετα}}$$

Επειδή έχουμε πλαστική κρούση ισχύει

$$\boldsymbol{P}_{\text{Μετα}} = 2m\boldsymbol{v}'$$

$$\Rightarrow m(2\hat{\boldsymbol{x}} + 8\hat{\boldsymbol{y}} - 5\hat{\boldsymbol{z}}) = 2m\boldsymbol{v}'$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}' = \hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{5}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Στο σημείο της κρούσης έχουμε

$$\boldsymbol{r}(3s) = \boldsymbol{r}_1(3s) = \boldsymbol{r}_2(3s) = 13\hat{\boldsymbol{x}} + 16\hat{\boldsymbol{y}} + 3\hat{\boldsymbol{z}}$$

Για το σύστημα των δύο σωματιδίων μετά την πλαστική κρούση $(t \geq 3s)$ έχουμε

$$\boldsymbol{r}'(t \geq 3s) = \boldsymbol{r}(3s) + \boldsymbol{v}'(t-3) = (10+t)\hat{\boldsymbol{x}} + 4(1+t)\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}(21-5t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Πρόβλημα 3.8 Δυο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι

$$\boldsymbol{r}_1 = (6t^2 - 4t - 7)\hat{\boldsymbol{x}} + (-2t^2 + 3t + 5)\hat{\boldsymbol{y}} + (3t - 1)\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = (-2t^2 + 4t + 9)\hat{\boldsymbol{x}} + (2t^2 + 3t - 11)\hat{\boldsymbol{y}} + (2t + 1)\hat{\boldsymbol{z}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και να βρείτε πότε θα συμβεί η κρούση.

(β) Να βρείτε την ολική ορμή του συστήματος πριν την κρούση, καθώς και τη δύναμη που ασκείται σε κάθε ένα από τα δύο σωματίδια. Διατηρείται η ολική ορμή του συστήματος των δύο σωματιδίων;

(γ) Αν η κρούση είναι πλαστική, δηλαδή τα σωματίδια κολλούν, να βρείτε την ταχύτητά και ορμή τους σε χρόνο $3s$ μετά την κρούση.

Λύση:

(α) Για να συγκρουσθούν τα δύο σωματίδια θα πρέπει $\boldsymbol{r}_1(t_\Sigma) = \boldsymbol{r}_2(t_\Sigma)$ όπου t_Σ ο χρόνος της σύγκρουσης. Για τις τρεις συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}: \quad & x_1(t_\Sigma) = x_2(t_\Sigma) \\
& \Rightarrow 6t_\Sigma^2 - 4t_\Sigma - 7 = -2t_\Sigma^2 + 4t_\Sigma + 9 \\
& \Rightarrow t_\Sigma^2 - t_\Sigma - 2 = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{y}}: \quad & y_1(t_\Sigma) = y_2(t_\Sigma) \\
& \Rightarrow -2t_\Sigma^2 + 3t_\Sigma + 5 = 2t_\Sigma^2 + 3t_\Sigma - 11 \\
& \Rightarrow t_\Sigma^2 = 4
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{z}}: \quad & z_1(t_\Sigma) = z_2(t_\Sigma) \\
& \Rightarrow 3t_\Sigma - 1 = 2t_\Sigma + 1 \\
& \Rightarrow t_\Sigma = 2\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (3) παίρνουμε

$$t_\Sigma = \begin{cases} 2s \\ \\ -1s & \text{μη φυσική λύση} \end{cases}$$

Από τη σχέση (3) παίρνουμε

$$t_\Sigma = \begin{cases} 2s \\ -2s & \text{μη φυσική λύση} \end{cases}$$

Άρα τα σωματίδια θα συγκρουσθούν μετά από $t_\Sigma = 2\mathrm{s}$.

(β) Οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι αντίστοιχα

$$\boldsymbol{v_1}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1(t)}{\mathrm{d}t} = (12t - 4)\hat{\boldsymbol{x}} + (-4t + 3)\hat{\boldsymbol{y}} + 3\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.18}$$
$$\boldsymbol{v_2}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2(t)}{\mathrm{d}t} = (-4t + 4)\hat{\boldsymbol{x}} + (4t + 3)\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.19}$$

Οι επιταχύνσεις και οι δυνάμεις που δρουν πάνω στα δύο σωματίδια είναι αντίστοιχα

$$\boldsymbol{a_1}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1(t)}{\mathrm{d}t} = 12\hat{\boldsymbol{x}} - 4\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{a_2}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2(t)}{\mathrm{d}t} = -4\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}}$$

Για την ολική ορμή έχουμε

$$\boldsymbol{P}_{\text{ΟΛ}} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2$$

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες από τις (3) και (3) βρίσκουμε

$$\boldsymbol{P}_{\text{ΟΛ}} = m(8t\hat{\boldsymbol{x}} + 6\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}})$$

απ' όπου βλέπουμε ότι η ορμή εξαρτάται από το χρόνο. Άρα, η ολική ορμή του συστήματος δεν διατηρείται. Για τις δυνάμεις έχουμε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= m\boldsymbol{a}_1 = m(12\hat{\boldsymbol{x}} - 4\hat{\boldsymbol{y}}) \\ \boldsymbol{F}_2 &= m\boldsymbol{a}_2 = m(-4\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}}) \\ \Rightarrow \boldsymbol{F}_{\text{ΟΛ}} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 8m\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

(γ) Είδαμε ότι τα σώματα συγκρούονται όταν $t_\Sigma = 2s$. Η θέση σύγκρουσης είναι

$$\boldsymbol{r}_1(t_1) = \boldsymbol{r}_2(t_1) = 9\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.20}$$

Η ορμή είναι

$$\boldsymbol{P}_{\text{ΟΛ}}(t = 2s) = m(16\hat{\boldsymbol{x}} + 6\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}})$$

και η αρχική ταχύτητα του συσσωματώματος είναι

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{P}_{\text{ΟΛ}}(t = 2s)}{2m} = 8\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{5}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα κινείται υπό την επίδραση της $\boldsymbol{F}_{\text{ΟΛ}}$ με επιτάχυνση

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{ΟΛ}}/2m = 4\hat{\boldsymbol{x}}$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t \\ \Rightarrow \boldsymbol{v}(t = 3s) &= 20\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{5}{2}\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

και η ορμή του

$$\boldsymbol{p}(t = 3s) = 2m\boldsymbol{v}(t = 3s) = 40m\hat{\boldsymbol{x}} + 6m\hat{\boldsymbol{y}} + 5m\hat{\boldsymbol{z}}$$

Η αρχική θέση του συσσωματώματος, $\boldsymbol{r}_0$, είναι η θέση της σύγκρουσης που δίνεται από την (3). Το διάνυσμα θέσης του συσσωματώματος, $\boldsymbol{r}(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

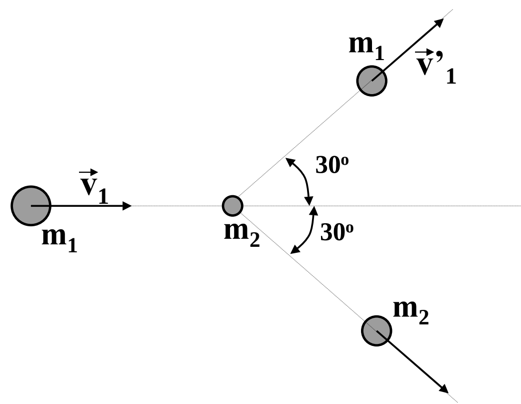
$$\boldsymbol{r}(t = 3s) = 20\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{5}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Πρόβλημα 3.9 Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται στον άξονα x με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_1$, συγκρούεται με ακίνητο σώμα του οποίου η μάζα m_2 δεν είναι γνωστή. Μετά την κρούση, το σώμα που έχει μάζα m_1 παρεκκλίνει από την πορεία του προς τα επάνω κατά 30^o, ενώ το δεύτερο σώμα κινείται υπό γωνία 30^o κάτω από τον άξονα x, όπως δείχνει το σχήμα 3.8. Η κρούση είναι ελαστική.

(α) Να βρείτε τη μάζα m_2 συναρτήσει της m_1 καθώς και τις τελικές ταχύτητες $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$.

(β) Να βρείτε τις ταχύτητες των δύο σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.

Λύση:



Σχήμα 3.8

(α) Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

- στον άξονα των x:

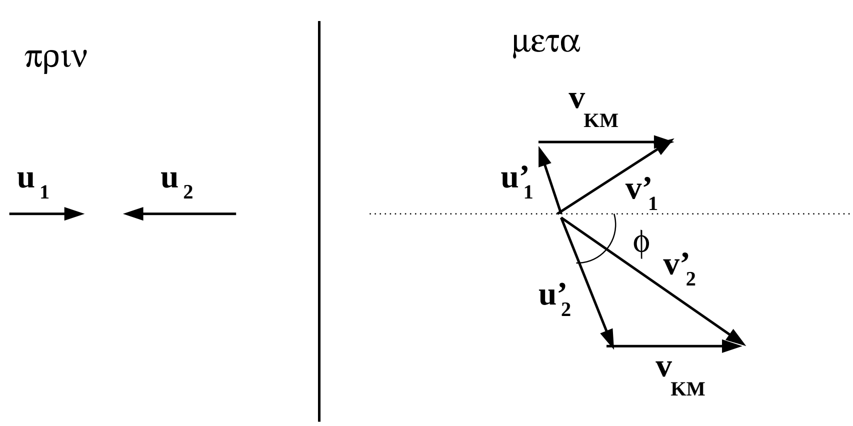
$$
\begin{aligned}
m_1 v_1 &= m_1 v_1' \cos 30^o + m_2 v_2' \cos 30^o \\
\Rightarrow m_1 v_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 v_1' + m_2 v_2')
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

- στον άξονα των y:

$$
\begin{aligned}
0 &= m_1 v_1' \sin 30^o - m_2 v_2' \sin 30^o \\
\Rightarrow \frac{m_1 v_1'}{2} &= \frac{m_2 v_2'}{2} \\
\Rightarrow v_2' &= \frac{m_1}{m_2} v_1'
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Χρησιμοποιώντας την (3) από την (3) βρίσκουμε

$$m_1 v_1 = \sqrt{3} m_1 v_1'$$



Σχήμα 3.9

$$\Rightarrow v_1' = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \tag{3.23}$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{3.24}$$

Χρησιμοποιώντας την (3) από την (3) βρίσκουμε

$$m_1 v_1^2 = \frac{m_1 v_1^2}{3} + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}\frac{v_1^2}{3}$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{2} \tag{3.25}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) βρίσκουμε

$$v_2' = 2v_1' = \frac{2}{\sqrt{3}}v_1$$

Συνεπώς έχουμε

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{v_1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{y}}\right)$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \frac{2v_1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{y}}\right)$$

(β) Από την αρχή διατήρησης της ορμής μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.

$$m_1\boldsymbol{v_1} + 0 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{KM}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_{KM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v_1}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \boldsymbol{v}_{KM} = \frac{2}{3}\boldsymbol{v_1}$$

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του συστήματος έχουμε:

$$\text{πριν την κρούση :}\quad \begin{cases} \boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \boldsymbol{v_1} - \frac{2}{3}\boldsymbol{v_1} = \frac{v_1}{3}\hat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v}_{\text{KM}} = 0 - \frac{2}{3}\boldsymbol{v_1} = -\frac{2v_1}{3}\hat{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

$$\text{μετά την κρούση :}\quad \begin{cases} \boldsymbol{u_1'} = \boldsymbol{v_1'} - \boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \left(\frac{v_1}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{v_1}{2\sqrt{3}}\hat{\boldsymbol{y}}\right) - \frac{2}{3}v_1\hat{\boldsymbol{x}} = -\frac{v_1}{6}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{v_1}{2\sqrt{3}}\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{u_2'} = \boldsymbol{v_2'} - \boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \left(v_1\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{v_1}{\sqrt{3}}\hat{\boldsymbol{y}}\right) \end{cases}$$

Για να βρούμε τη γωνία μεταξύ των ταχυτήτων μετά την κρούση παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

$$\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u_2'} = u_{1x}'u_{2x}' + u_{1y}'u_{2y}' = \left|\boldsymbol{u}_1'\right|\left|\boldsymbol{u}_2'\right|\cos\left(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'\right)$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι

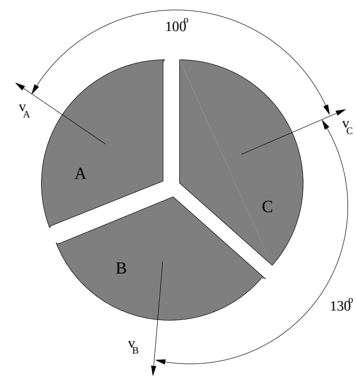
$$\cos\left(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'\right) = -1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{u}_2' \parallel -\boldsymbol{u}_1'$$

Η γωνία στο κέντρο μάζας είναι

$$\tan\phi = \frac{u'_{2y}}{u'_{2x}} = -\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \phi = -60^o$$

Πρόβλημα 3.10 Μια κροτίδα εκρήγνυται μέσα σε μία καρύδα μάζας M που σπάει σε 3 κομμάτια όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτά τα κομμάτια κινούνται χωρίς τριβή πάνω σε μία επιφάνεια. Το κομμάτι C έχει μάζα $m_C = 0,3\,M$ και ταχύτητα $v_C = 5\,m/s$. Το κομμάτι B έχει μάζα $m_B = 0,2\,M$. Υπολογίστε την ταχύτητα των τμημάτων A και B.



Σχήμα 3.10

Λύση:

Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε η κατεύθυνση του κομματιού A να είναι κατά την αρνητική φορά του άξονα των x. Οι συντεταγμένες των ορμών των τριών κομματιών στον άξονα των y είναι

$$p_A^y = 0$$
$$p_B^y = 0,2Mv_B^y = 0,2Mv_B\sin 50^o$$
$$p_C^y = 0,3Mv_C^y = 0,3Mv_C\sin 80^o$$

Όταν η καρύδα ήταν σε ακινησία είχαμε:

$$p_A^y + p_B^y + p_C^y = 0$$

Χρησιμοποιώντας ότι $v_C = 5\,m/s$ βρίσκουμε

$$v_B = 9,64\,\mathrm{m/s}$$

Οι συντεταγμένες των ορμών των τριών κομματιών στον άξονα των x είναι

$$p_A^x = -0,5Mv_A$$
$$p_B^x = -0,2Mv_B^x = -0,2Mv_B\cos 50^o$$
$$p_C^x = 0,3Mv_C^x = 0,3Mv_C\cos 80^o$$

Όταν η καρύδα ήταν σε ακινησία είχαμε:

$$p_A^x + p_B^x + p_C^x = 0$$

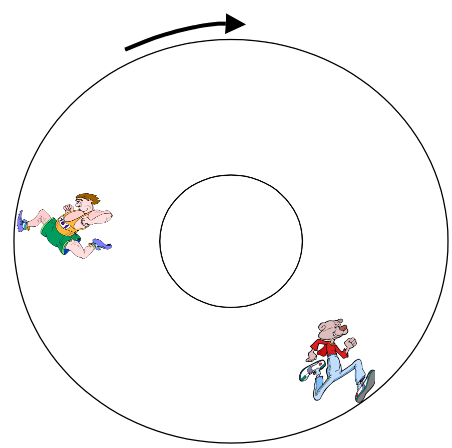
Αντικαθιστώντας την v_C και v_B βρίσκουμε

$$v_A = 3\,\mathrm{m/s}$$

Πρόβλημα 3.11 Ένας διαστημικός σταθμός έχει σχήμα κυκλικού δακτυλίου και περιστρέφεται γύρω από τον κεντρικό του άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

(α) Εάν η εσωτερική ακτίνα είναι R_1 και η εξωτερική R_2 να υπολογίσετε την περίοδο περιστροφής του σταθμού, ως προς ακίνητο παρατηρητή, ώστε ο επιβάτης μάζας m που στέκεται στον εξωτερικό τοίχο να αισθάνεται ότι ζυγίζει όσο ζύγιζε και στην επιφάνεια της γης (mg, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας).

(β) Ένας αστροναύτης στο εσωτερικό του σταθμού, τρέχει κατά μήκος του εξωτερικού τοίχου με ταχύτητα V ως προς τον τοίχο. Αλλάζει το φαινομενικό βάρος του (όπως το αντιλαμβάνεται στο δικό του σύστημα αναφοράς); Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας V και την διεύθυνση κατά την οποία πρέπει να τρέχει ώστε το φαινομενικό του βάρος να αυξάνεται κατά 20. Θεωρήστε ότι ο σταθμός ευρίσκεται πολύ μακριά από ουράνια σώματα ώστε οποιαδήποτε βαρυτική έλξη είναι πρακτικά μηδέν.



Σχήμα 3.11

(Υπόδειξη: Ένας αδρανειακός (ακίνητος) παρατηρητής βλέπει τους επιβάτες του σταθμού που στέκονται στον εξωτερικό τοίχο να περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Αντίθετα, οι επιβάτες βλέπουν ο ένας τον άλλο να στέκονται ακίνητοι υπό την επίδραση της αντίδρασης του επιπέδου και του φαινομενικού τους βάρους. Ποια είναι αυτή η δύναμη του φαινομενικού βάρους που αντιλαμβάνονται οι μη αδρανειακοί παρατηρητές; Εξαρτάται από την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σταθμού; Στην περίπτωση όπου ο επιβάτης τρέχει κατά μήκος του εξωτερικού τοίχου με σταθερή ταχύτητα ως προς τον τοίχο, συνεχίζει να φαίνεται (στον αδρανειακό παρατηρητή) ότι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Πόση είναι η γωνιακή του ταχύτητα ως προς τον ακίνητο παρατηρητή;)

Λύση:

(α) Στεκούμενος στον εξωτερικό τοίχο, ο επιβάτης εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε κύκλο ακτίνας R_2, με ταχύτητα

$$u = \frac{2\pi R_2}{T} \tag{3.26}$$

και επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{R_2} = \frac{4\pi^2 R_2}{T^2}$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι αυτή που του ασκεί ο τοίχος και τη συμβολίζουμε με N. Έτσι

$$N = ma = \frac{4\pi^2 R_2 m}{T^2}$$

Για να αισθάνεται το ίδιο βάρος με αυτό στη γη, θα πρέπει

$$\frac{r\pi^2 R_2 m}{T^2} = mg \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R_2}{g}}$$

(β) Ο αστροναύτης εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα υ, ως προς αδρανειακό παρατηρητή, ίση με

$$\upsilon = V - u \quad \text{(η διεύθυνση της } V \text{ όπως στο σχήμα)} \tag{3.27}$$

Το φαινομενικό του βάρος αλλάζει καθώς είναι ανάλογο της επιτάχυνσής τους. Έστω B και B' το φαινομενικό βάρος στην περίπτωση (α) και (β), αντίστοιχα. Θέλουμε

$$\begin{aligned} B' &= 1,2B \\ \Rightarrow ma' &= 1,2ma \\ \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{R_2} &= 1,2\frac{u^2}{R_2} \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} (V-u)^2 &= 1,2u^2 \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} V &= \left(\sqrt{1,2}+1\right)\frac{2\pi R_2}{T} \end{aligned}$$

4

Διατήρηση της Ενέργειας

Πρόβλημα 4.1 Δείξτε ότι για ένα σωματίδιο με σταθερή μάζα, m, η εξίσωση κίνησης μας δίνει μια σχέση για την κινητική ενέργεια, K

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

Επιπλέον, στην περίπτωση που η μάζα του σωματιδίου μεταβάλλεται με το χρόνο, η αντίστοιχη σχέση μας δίνει

$$\frac{\mathrm{d}(mK)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}$$

Λύση:

Η κινητική ενέργεια, K, του σωματιδίου είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$$

άρα η πρώτη παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς το χρόνο, t, είναι

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}$$

όπου η εξίσωση κίνησης δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton, $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$, και η ορμή είναι $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.
Αν η μάζα, m, μεταβάλλεται με το χρόνο θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}(mK)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{F}$$

όπου $mK = m^2v^2/2 = p^2/2$.

Πρόβλημα 4.2 Ένα μη αρμονικό ελατήριο υπακούει στο νόμο $F = -Dx^3$, όπου $D > 0$ θετική σταθερά. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια ως συνάρτηση της θέσης x, όταν $U(0) = 0$ και πόσο έργο πρέπει να καταβληθεί στο ελατήριο για να τεντωθεί σιγά από τη θέση $x = 0$ έως τη θέση x_1;

Λύση:

Η δύναμη F δίνεται από τη σχέση

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow U(x) = -\int_0^x F dx = -\int_0^x -Dx^3 = \frac{1}{4}Dx^4$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου για μια συγκεκριμένη αύξηση του μήκους του ισούται με το έργο που του έχουμε προσφέρει μέχρι εκείνη τη στιγμή, άρα $W = U\left(x_1\right)$

Πρόβλημα 4.3 Θεωρήστε μια δυναμική ενέργεια η οποία εξαρτάται και από το χρόνο, δηλαδή $V = V(\boldsymbol{r}, t)$. Αν η χρονικά εξαρτώμενη δύναμη $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$ μπορεί να γραφτεί ως $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r}, t)$, τότε να δείξετε ότι η ολική ενέργεια $E = K + V$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K + V) = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Λύση:

Έστω $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$, τότε το διαφορικό της δυναμικής ενέργειας θα είναι

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t = \boldsymbol{\nabla} V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}V = -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

Από τον ορισμό της κινητικής ενέργειας $K = \dfrac{1}{2}m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$, έπεται

$$\mathrm{d}K = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.2}$$

Από τις σχέσεις (4) και (4) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= -\mathrm{d}K + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \mathrm{d}(K + V) &= \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K + V) &= \frac{\partial V}{\partial t}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 4.4 Να δείξετε ότι η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = -kyz\hat{\boldsymbol{x}} - kxz\hat{\boldsymbol{y}} - kxy\hat{\boldsymbol{z}}, \quad k > 0 \text{ σταθερά}$$

είναι μια διατηρητική δύναμη. Βρείτε τη δυναμική ενέργεια $V(\boldsymbol{r})$.

Λύση:

Θα υπολογίσουμε το $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} &= -k \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \\
&= -k\left[\hat{\boldsymbol{x}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z}}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial(yz)}{\partial z} - \frac{\partial(xy)}{\partial x}}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y}}\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

Επομένως η $\boldsymbol{F}$ μπορεί να εκφραστεί μέσω της δυναμικής ενέργειας V,

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = kyz \Rightarrow V = kxyz + f'(y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = kxz \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = kxy \tag{4.4}$$

όπου η $f(y,z)$ προσδιορίζεται από την (4) ως

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0$$
$$\Rightarrow f(y,z) = g(z)$$

Η $g(z)$ θα προσδιοριστεί από την (4), όπου αντικαθιστούμε τη V με την έκφραση $V(x,y,z) = kxyz + g(z)$

$$\xRightarrow{(4)} \frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z} = 0$$
$$\Rightarrow g(z) = g_0 = \text{σταθερά}$$

και επομένως έχουμε για τη δυναμική ενέργεια

$$V(x,y,z) = kxyz + g_0$$

Πρόβλημα 4.5 Βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 που κάνει γωνία ϕ με την οριζόντια. Η κίνηση γίνεται κοντά στην επιφάνεια της Γης, θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας g σταθερά. Βρείτε, κάνοντας εφαρμογή της αρχής της διατήρησης της ενέργειας, την κατακόρυφο συνιστώσα της ταχύτητας όταν το βλήμα ευρίσκεται στο μισό του μεγίστου ύψους της τροχιάς του

Λύση:

Όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο μισό του μεγίστου ύψους του $(h/2)$, η ολική ενέργεια του είναι το άθροισμα της κινητικής, $T = (1/2)mv^2 = (1/2)m(v_x^2 + v_y^2)$ και δυναμικής, $U = mgh/2$

$$E\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mg\frac{h}{2}$$

όπου η συνιστώσα v_x της ταχύτητας του σωματιδίου είναι ίση με την x-συνιστώσα της αρχική ταχύτητα, $v_x = v_0 \cos\phi$ (δεν υπάρχει δύναμη κατά την διεύθυνση του άξονα x). Το v_y είναι η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας στο $h/2$. Η ολική ενέργεια του σωματιδίου στο μέγιστο ύψος, h θα είναι

$$E(h) = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh$$

διότι η συνιστώσα της ταχύτητας στο άξονα του y είναι μηδέν.
Λόγω της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε

$$E\left(\frac{h}{2}\right) = E(h) \qquad \Rightarrow v_y = (gh)^{1/2}$$

όπου το μέγιστο ύψος στο πρόβλημα της βολής είναι

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g}$$

Άρα η v_y στο μισό του μεγίστου ύψους της τροχιάς θα είναι

$$v_y = \frac{v_0 \sin\phi}{\sqrt{2}}$$

Πρόβλημα 4.6 Η ταχύτητα διαφυγής ενός σωματιδίου, v_δ, από την επιφάνεια της Γης είναι η ελάχιστη ταχύτητα που χρειάζεται να έχει το σωματίδιο για να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης. Παραλείψετε την αντίσταση του αέρα. Να δείξετε ότι η ταχύτητα διαφυγής είναι: $v_\delta = 11,2\,\mathbf{km/sec}$.

Λύση:

Η ολική ενέργεια της μάζας m στην επιφάνεια της Γης είναι

$$E_1 = T_1 + V_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R}$$

όπου G είναι η σταθερά της βαρύτητας, και M, R είναι η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα. Η ολική ενέργεια της μάζας m σε ένα τυχαίο σημείο στο χώρο σε απόσταση r_2 από το κέντρο της Γης είναι

$$E_2 = T_2 + V_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{r_2}$$

Η ταχύτητα διαφυγής $v_1 = v_\delta$ στην επιφάνεια της Γης αντιστοιχεί στην κατάσταση όπου η ταχύτητα $v_2 = 0$ και η αντίστοιχη θέση του σωματιδίου θα είναι στο άπειρο, $r_2 = \infty$. Λόγω διατήρησης της ενέργειας, έχουμε

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

όπου $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $GM = gR^2$, που προκύπτει από την ισορροπία δυνάμεων ενός σώματος μάζας m στην επιφάνεια της γης (δύναμη βάρους = δύναμη του Newton της παγκόσμιας έλξης)

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$
$$\Rightarrow GM = gR^2$$

Η ακτίνα της Γης είναι $R = 6400\,\mathrm{km}$, επομένως η ταχύτητα διαφυγής είναι

$$v_\delta = 11,2\,\mathrm{km/s}$$

Πρόβλημα 4.7 Πύραυλος μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης με ταχύτητα ίση με το μισό της ταχύτητας διαφυγής από τη γη. Να υπολογιστούν:
(α) η ταχύτητα του πυραύλου όταν αυτός θα απέχει απόσταση r από το κέντρο της γης και
(β) η μέγιστη απόσταση $r_{\max}$ από το κέντρο της γης στην οποία μπορεί να φτάσει ο πύραυλος αυτός.
(Δίνονται: η ακτίνα της γης, R και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης, g).

Λύση:

(α) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στο πεδίο βαρύτητας της γης (μάζας M και ακτίνας R), θεωρώντας την αρχική κατάσταση στην επιφάνεια της γης και ως τειλική κατάσταση στην τυχαία απόσταση r, θα έχουμε

$$U_1 + T_1 = U(r) + T(r),$$

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mV^2(r)}{2} - \frac{GMm}{r}, \tag{4.5}$$

όπου αν θεωρήσουμε την ταχύτητα διαφυγής $\sqrt{1GM/R}$, τότε η ταχύτητα εκτόξευσης του πυραύλου V_1 θα είναι (από τα δεδομένα)

$$V_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{4.6}$$

Τότε η σχέση (4) λόγω της (4) γίνεται

$$V(R) = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r/3R}\right)} \tag{4.7}$$

και επειδή

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2,$$

η σχέση (4) γίνεται

$$V(r) = \sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4/3R}\right)} \tag{4.8}$$

(β)

Για να είναι $r = r_{\max}$ πρέπει $V(r_{\max}) = 0$, τότε από τη σχέση (4) προκύπτει ότι

$$r_{\max} = \frac{4}{3}R$$

Πρόβλημα 4.8 Ένα σώμα με μάζα m κινείται στον άξονα x σε πεδίο δύναμης που κατευθύνεται κατά το $\hat{\boldsymbol{x}}$. Αν η κινητική ενέργεια του σώματος είναι λt^2 (λ σταθερά, ανεξάρτητη του t), να υπολογιστεί η δύναμη F που ασκείται στο σώμα. Είναι διατηρητική;

Λύση:

Η κινητική ενέργεια, K, του σώματος είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \lambda t^2$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\,t$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\,t\hat{\boldsymbol{x}}$$

εφ'όσον η κίνηση είναι κατά τη διεύθυνση του $\hat{\boldsymbol{x}}$. Η επιτάχυνση του σώματος θα είναι

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

και η δύναμη, $\boldsymbol{F}$, που ασκείται πάνω στο σώμα θα είναι

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\,\hat{\boldsymbol{x}} = \sqrt{2\lambda m}\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

Το έργο, W, που παράγεται από τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ όταν υπάρχει μια μετακίνηση από ένα αρχικό σημείο $\boldsymbol{r}_a = (x_a, y_a)$ σε ένα τελικό σημείο $\boldsymbol{r}_b = (x_b, y_b)$, θα είναι

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \sqrt{2\lambda m}\,\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sqrt{2\lambda m}\int_{x_a}^{x_b}\mathrm{d}x = \sqrt{2\lambda m}\,(x_b - x_a)$$

όπου το $\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}}\cdot(\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}}) = \mathrm{d}x$. Παρατηρούμε ότι η δύναμη είναι ανεξάρτητη της διαδρομής αλλά εξαρτάται από τα όρια της διαδρομής, άρα η $\boldsymbol{F} = \sqrt{2\lambda m}\hat{\boldsymbol{x}}$ είναι μια διατηρητική δύναμη.

Πρόβλημα 4.9 Ένα σώμα που έχει μάζα m διαγράφει κάποια τροχιά στο χώρο, που δίνεται από το διάνυσμα θέσης

$$\boldsymbol{r}(t) = \beta_0\hat{\boldsymbol{x}} - \gamma_0\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}(\beta\hat{\boldsymbol{x}} - \gamma\hat{\boldsymbol{y}})t^2$$

όπου $\beta_0, \gamma_0, \beta, \gamma$ είναι σταθερές.
Να βρείτε:

(α) Τη δύναμη που ασκείται στο σώμα και να δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

(β) Το έργο που θα κάνει η δύναμη αυτή για να κινήσει το σώμα από τη θέση $\boldsymbol{r}_1 = 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\hat{\boldsymbol{y}}$ ως τη θέση $\boldsymbol{r}_2 = 2\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}}$.

(γ) Τη δυναμική ενέργεια, U, θεωρώντας ότι $U(\boldsymbol{r} = 0) = 0$.

Λύση:

(α) Η ταχύτητα του σώματος είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\beta\hat{\boldsymbol{x}} - \gamma\hat{\boldsymbol{y}})t$$

και η επιτάχυνση είναι

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \beta\hat{\boldsymbol{x}} - \gamma\hat{\boldsymbol{y}}$$

άρα η δύναμη είναι

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m(\beta\hat{\boldsymbol{x}} - \gamma\hat{\boldsymbol{y}})$$

Ο στροβιλισμός της δύναμης είναι

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ m\beta & -m\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$$

άρα η δύναμη είναι διατηρητική εφ'οσον ο στροβιλισμός της δύναμης είναι μηδέν.

(β) Το έργο, W, που θα κάνει η δύναμη $\boldsymbol{F}$ για να κινήσει το σώμα από τη θέση $\boldsymbol{r}_1 = 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\hat{\boldsymbol{y}}$ στη θέση $\boldsymbol{r}_2 = 2\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}}$ δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2) &= \int_{(0,0,0)}^{(2,3,0)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{(0,0,0)}^{(2,3,0)} m(\beta\hat{\boldsymbol{x}} - \gamma\hat{\boldsymbol{y}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x + \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y + \hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z) \\ &= m\beta \int_0^2 \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x - m\gamma \int_0^3 \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y = m(2\beta - 3\gamma) \end{aligned}$$

(γ) Η δυναμική ενέργεια, $U(\boldsymbol{r})$, δίδεται από τη σχέση

$$U(\boldsymbol{r}) - U(0) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -m \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (\beta\hat{\boldsymbol{x}} - \gamma\hat{\boldsymbol{y}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x + \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y + \hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z)$$

και αντικαθιστώντας το $U(\boldsymbol{r} = 0) = 0$ θα έχουμε

$$U(\boldsymbol{r}) = -m\beta \int_0^x \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x + m\gamma \int_0^y \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y = -m(\beta x - \gamma y)$$

άρα η δυναμική ενέργεια είναι: $U(\boldsymbol{r}) = -m(\beta x - \gamma y)$.

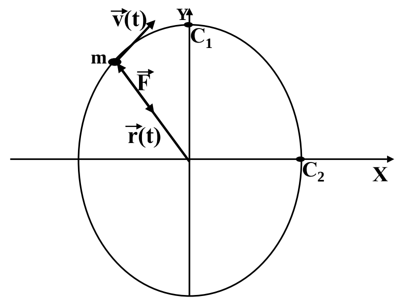
Πρόβλημα 4.10 Ένα σώμα με μάζα m κινείται σε ελλειπτική τροχιά στο επίπεδο (x, y). Το διάνυσμα θέσης είναι $\boldsymbol{r}(t) = \left[a\sin(\omega t)\right]\hat{\boldsymbol{x}} + (b\cos(\omega t))\hat{\boldsymbol{y}}$, όπου a, b, ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο σώμα και δείξτε ότι είναι διατηρητική.

(β) Βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του σώματος. Θεωρήστε ότι η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται στο $\boldsymbol{r} = 0$.

(γ) Βρείτε την ολική ενέργεια του σώματος και να δείξετε ότι είναι σταθερή.

(δ) Να υπολογίστε το έργο που κάνει η δύναμη $\boldsymbol{F}$ για να μετακινήσει το σώμα από τη θέση C_1 έως τη θέση C_2.



Σχήμα 4.1

Λύση:

(α) Η ταχύτητα του σώματος θα είναι

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \omega(a\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} - b\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}})$$

ενώ η επιτάχυνση θα είναι

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\left[a\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + b\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right] = -\omega^2\boldsymbol{r}(t)$$

Άρα η δύναμη $\boldsymbol{F}$ εκφράζεται ως

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = -m\omega^2\boldsymbol{r}(t)$$

(β) Η δυναμική ενέργεια, $U(\boldsymbol{r})$, του σώματος θα είναι

$$U(\boldsymbol{r}) - U(0) = -\int_0^r \boldsymbol{F}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = m\omega^2\int_0^r \boldsymbol{r}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = m\omega^2\int_0^r r'\mathrm{d}r' = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Παρατηρούμε ότι

$$r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = a^2\sin^2(\omega t) + b^2\cos^2(\omega t)$$

Η κινητική ενέργεια, T, του σώματος είναι

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}m\omega^2\left[a^2\cos^2(\omega t) + b^2\sin^2(\omega t)\right]$$

(γ) Η ολική ενέργεια, E, του σώματος είναι

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{1}{2}m\omega^2\left[a^2\sin^2(\omega t) + b^2\cos^2(\omega t) + a^2\cos^2(\omega t) + b^2\sin^2(\omega t)\right] \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2)\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2) \end{aligned}$$

άρα η ολική ενέργεια είναι σταθερή.

(δ) Το σημείο C_1 είναι στο $\boldsymbol{r}_1 = b\hat{\boldsymbol{y}}$. Το σώμα βρίσκεται στο σημείο C_1 όταν $\omega t = 2n\pi$ για n=0,1,2,...
Το σημείο C_2 είναι στο $\boldsymbol{r}_2 = a\hat{\boldsymbol{x}}$. Το σώμα βρίσκεται στο σημείο C_2 όταν $\omega t = (2n+1/2)\pi$ για n=0,1,2,...
Το έργο $W(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2)$ είναι

$$W(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2) = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Αντικαθιστώντας τη δύναμη και θέση του σώματος θα έχουμε

$$W(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2) = -m\omega^3\int_0^{\pi/2\omega}\left(a\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + b\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right)\cdot(a\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} - b\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}})\mathrm{d}t$$

$$= -m\omega^2 \int_0^{\pi/2} (a^2 - b^2) \sin(\omega t) \cos(\omega t)\, d(\omega t)$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αναπτύσσεται ως

$$\int_0^{\pi/2} \sin(\omega t) \cos(\omega t)\, d(\omega t) = -\int_1^0 \cos\phi \mathrm{d}(\cos\phi) = \frac{1}{2}$$

Άρα το έργο $W(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2)$ είναι

$$W(\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{2} m\omega^2 (b^2 - a^2)$$

Πρόβλημα 4.11 Βρείτε το έργο της δύναμης $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$ για τη μετακίνηση σωματιδίου από τη θέση $\boldsymbol{r}_0$ στη θέση $\boldsymbol{r}_1$.

Λύση:

Το έργο $W(\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}_1)$ για τη μετακίνηση σωματιδίου από τη θέση $\boldsymbol{r}_0$ στη θέση $\boldsymbol{r}_1$ είναι

$$W(\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}_1) = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -k \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

αλλά $\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\mathrm{d}r = \mathrm{d}r^2/2$, άρα το έργο μπορεί να εκφραστεί ως

$$W(\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}_1) = -\frac{1}{2} k \int_{r_0}^{r_1} \mathrm{d}(r^2) = -\frac{1}{2} k (r_1^2 - r_0^2)$$

Πρόβλημα 4.12 Δείξτε ότι το έργο ενός φορίιου q μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ είναι μηδέν.

Λύση:

Το έργο που παράγει μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ κατά την κίνηση ενός σωματιδίου είναι

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

όπου η δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι η δύναμη Lorentz, $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Άρα το έργο μπορεί να γραφεί ως

$$W = \int q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = q \int (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{B}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \underbrace{\mathrm{d}t\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow W = 0$. Άρα το έργο φορτίου q μέσα σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ είναι μηδέν.

Πρόβλημα 4.13 Αν $\boldsymbol{B}$ είναι ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο, να δείξετε ότι η ανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$$

είναι ένα ανυσματικό δυναμικό που παράγει το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Το διανυσματικό δυναμικό, $\boldsymbol{A}$, και το μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{B}$, συνδέονται με τη σχέση

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

Λύση:

Ο στροβιλισμός του μαγνητικού δυναμικού $\boldsymbol{A}$ είναι

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r})$$

Ας θεωρήσουμε ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}}$. Το $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$ αναπτύσσεται ως

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ B_x & B_y & B_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (B_y z - B_z y)\hat{\boldsymbol{x}} + (B_z x - B_x z)\hat{\boldsymbol{y}} + (B_x y - B_y x)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Άρα ο στροβιλισμός του μαγνητικού δυναμικού $\boldsymbol{A}$ θα είναι

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_y z - B_z y & B_z x - B_x z & B_x y - B_y x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2B_x\hat{\boldsymbol{x}} + 2B_y\hat{\boldsymbol{y}} + 2B_z\hat{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{B}$$

Άρα το διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r})/2$ δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$.

Πρόβλημα 4.14 Να δειχθεί ότι η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{\boldsymbol{x}} + 2xyz^3\hat{\boldsymbol{y}} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

προέρχεται από δυναμικό $U(x, y, z)$, το οποίο και να βρεθεί.

Λύση:

Ο στροβιλισμός της δύναμης $\boldsymbol{F}$ είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^2 - 6x^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz^3)\right]\hat{\boldsymbol{x}} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(y^2z^3 - 6xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^2 - 6x^2z)\right]\hat{\boldsymbol{y}} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xyz^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2z^3 - 6xz^2)\right]\hat{\boldsymbol{z}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} &= (6xyz^2 - 6xyz^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz)\hat{\boldsymbol{y}} + (2yz^3 - 2yz^3)\hat{\boldsymbol{z}} = 0
\end{aligned}$$

άρα η δύναμη είναι διατηρητική και προέρχεται από μια δυναμική συνάρτηση $U(x, y, z)$ που συνδέεται με τη δύναμη μέσω της σχέσης

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπου η δύναμη είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{\boldsymbol{x}} + 2xyz^3\hat{\boldsymbol{y}} + (3x^2y^2z^2 - 6x^2z)\hat{\boldsymbol{z}} \\
&= -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial U}{\partial x} = y^2z^3 - 6xz^2 \\
&\Rightarrow U = -(xy^2z^3 - 3x^2z^2) + f_1(y, z)
\end{aligned}$$

όπου $f_1(y,z)$ είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών y, z και μόνο

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = 2xyz^3$$
$$\Rightarrow U = -xy^2z^3 + f_2(x,z)$$

όπου $f_2(x,z)$ είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών x, z και μόνο

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = 3xy^2z^2 - 6x^2z$$
$$\Rightarrow U = -(xy^2z^3 - 3x^2z^2) + f_3(x,y)$$

όπου $f_3(x,y)$ είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών x, y και μόνο.
Παρατηρούμε ότι για να έχουμε μια κοινή λύση του $U(x,y,z)$ θα πρέπει να έχουμε

$$f_1(y,z) = 0, \qquad f_2(x,z) = 3x^2z^2, \qquad f_3(x,y) = 0$$

άρα το δυναμικό είναι

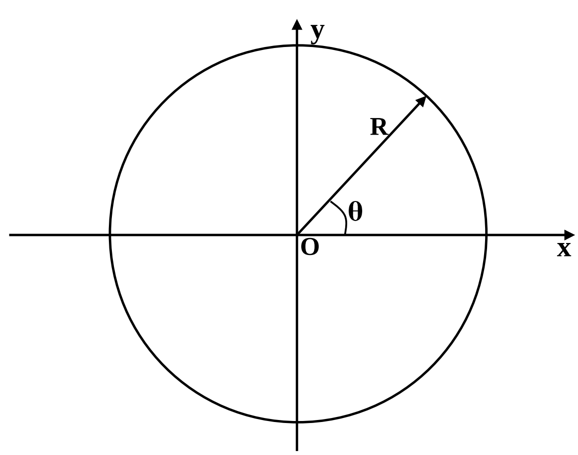
$$U(x,y,z) = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C$$

όπου C είναι μια σταθερά ανεξάρτητη των x, y, z.

Πρόβλημα 4.15 Να εξετάσετε κατά πόσο το άχρονο πεδίο δυνάμεων

$$\boldsymbol{F} = a(x-y+z)\hat{\boldsymbol{x}} + \left[a(x+y) - bz^2\right]\hat{\boldsymbol{y}} + 4ax\hat{\boldsymbol{z}}$$

είναι διατηρητικό και βρείτε το έργο του πεδίου επάνω σε ένα σωματίδιο που διαγράφει κύκλο στο επίπεδο Oxy με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R.



Σχήμα 4.2

Λύση:

Ο στροβιλισμός της δύναμης $\boldsymbol{F}$ θα είναι

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a(x-y+z) & a(x+y) - bz^2 & 4ax \end{vmatrix}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}4ax - \frac{\partial}{\partial z}(a(x+y) - bz^2)\right]\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}a(x-y+z)-\frac{\partial}{\partial x}4ax\right]\hat{\boldsymbol{y}}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x+y)-bz^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(a(x-y+z)\right)\right]\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}=2bz\hat{\boldsymbol{x}}-3a\hat{\boldsymbol{y}}+2a\hat{\boldsymbol{z}}\neq 0$$

άρα η δύναμη δεν είναι διατηρητική εφ'όσον $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\neq 0$.
Το έργο του πεδίου στο σωματίδιο που διαγράφει τον κύκλο $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ στο επίπεδο Oxy είναι

$$W=\oint \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=a(x-y+z)\mathrm{d}x+\left[a(x+y)-bz^2\right]\mathrm{d}y$$

Σε πολικές συντεταγμένες η θέση $\boldsymbol{r}=x\hat{\boldsymbol{x}}+y\hat{\boldsymbol{y}}$ του σωματιδίου είναι

$$x=R\cos\theta \qquad \text{και} \qquad y=R\sin\theta$$

και τα διαφορικά των x,y θα είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=-R\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}y&=R\cos\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

άρα το έργο θα είναι

$$\begin{aligned}W=\oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_0^{2\pi}(aR^2-aRz\sin\theta-bR\cos\theta z^2)\mathrm{d}\theta\\ &=2\pi aR^2-aRz\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta-bRz^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\ &=2\pi aR^2\end{aligned}$$

όπου $\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$.

Πρόβλημα 4.16

(α) Κάνοντας χρήση του επικαμπυλίου ολοκληρώματος βρείτε το έργο της δυνάμεως

$$\boldsymbol{F}=kr^n\boldsymbol{r} \qquad (k,n \text{ σταθερά})$$

πάνω σε σωματίδιο, όταν αυτό κινηθεί από τη θέση $\boldsymbol{r}_0$ ως την τυχαία θέση $\boldsymbol{r}$.

(β) Εξετάστε κατά πόσο το έργο του πεδίου

$$\boldsymbol{F}=(2x\mathrm{e}^{-y})\hat{\boldsymbol{x}}+(\cos z-x^2\mathrm{e}^{-y})\hat{\boldsymbol{y}}-(y\sin z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

που ασκείται σε κάποιο σωματίδιο από μια θέση Α σε μια θέση Β θα εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα Α και Β.

Λύση:

(α) Το έργο, W, της δύναμης είναι

$$\begin{aligned}W&=\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ &=\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}kr^n\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_0}^{r}kr^nrdr=k\int_{r_0}^{r}r^{n+1}dr\end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=r\mathrm{d}r$. Άρα έχουμε

$$W=\frac{k}{n+2}(r^{n+2}-r_0^{n+2})$$

(β) Υπολογίζουμε το στροβιλισμό της δύναμης $\boldsymbol{F}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x\mathrm{e}^{-y} & \cos z - x^2\mathrm{e}^{-y} & -y\sin z \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y\sin z) - \frac{\partial}{\partial z}(\cos z - x^2\mathrm{e}^{-y})\right]\hat{\boldsymbol{x}} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(2x\mathrm{e}^{-y}) - \frac{\partial}{\partial x}(-y\sin z)\right]\hat{\boldsymbol{y}} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos z - x^2\mathrm{e}^{-y}) - \frac{\partial}{\partial y}(2x\mathrm{e}^{-y})\right]\hat{\boldsymbol{z}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} &= (-\sin z + \sin z)\hat{\boldsymbol{x}} + (0-0)\hat{\boldsymbol{y}} + (-2x\mathrm{e}^{-y} + 2x\mathrm{e}^{-y})\hat{\boldsymbol{z}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} &= 0
\end{aligned}
$$

άρα το πεδίο της δύναμης είναι ένα διατηρητικό πεδίο και επομένως το έργο του πεδίου $\boldsymbol{F}$ που ασκείται σε κάποιο σωματίδιο από μια θέση Α ως μια Β δεν εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία Α και Β.

Πρόβλημα 4.17 Να βρεθεί το έργο που απαιτείται για να κινηθεί σωματίδιο μάζας m από την επιφάνεια της Γης ακτίνας R σε ύψος h. Να δείξετε ότι το έργο είναι ανεξάρτητο της καμπύλης διαδρομής.

Λύση:

Η δύναμη έλξης μεταξύ της Γης και σωματιδίου δίνεται από το νόμο του Νεύτωνα

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

όπου M, m είναι η μάζα της Γης και του σωματιδίου αντιστοίχως και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Για να δείξουμε ότι αυτή η δύναμη είναι διατηρητική (έργο ανεξάρτητο της καμπύλης διαδρομής) θα πρέπει ο στροβιλισμός της δύναμης $\boldsymbol{F}$ να είναι μηδέν. Σε σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,ϕ) ο τελεστής της βαθμίδας είναι

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Άρα για το στροβιλισμό της δύναμης $\boldsymbol{F}$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} &= -GMm\,\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\right) \\
&= -GMm\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ \dfrac{1}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\hat{\boldsymbol{r}} + (0-0)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (0-0)\hat{\boldsymbol{\phi}} = 0
\end{aligned}
$$

Άρα το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.
Το έργο της βαρύτητας για μια μετατόπιση από $r = R$ (πάνω στην επιφάνεια της Γης) μέχρι σε ύψος $r = R + h$, θα είναι

$$W(R\to R+h) = \int_{r=R}^{r=R+h}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -GMm\int_{r=R}^{r=R+h}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{r^2}$$

Η ποσότητα $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{r\mathrm{d}r}{r} = \mathrm{d}r$$

Συνεπώς το έργο W θα είναι

$$W(R\to R+h) = -GMm\int_{r=R}^{r=R+h}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)$$

Πρόβλημα 4.18 Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση δυνάμεως

$$\boldsymbol{F} = a\sin kt\hat{\boldsymbol{x}} + a\cos kt\hat{\boldsymbol{y}}$$

όπου a, k είναι σταθερές. Αν το σωματίδιο αρχικά ηρεμεί, δείξτε ότι το έργο που παράγεται σε χρόνο t από τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι

$$W = \frac{a^2}{mk^2}(1-\cos kt)$$

Λύση:

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\boldsymbol{F} = F_x\hat{\boldsymbol{x}} + F_y\hat{\boldsymbol{y}}$ σε χρόνο t είναι

$$W = \int_0^t \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y)$$

όπου $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$. Τα διαφορικά $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ μπορούν να γραφτούν με τη βοήθεια των συντεταγμένων της ταχύτητας ($\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}}$) ως

$$\mathrm{d}x = v_x\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}y = v_y\mathrm{d}t$$

Συνεπώς το έργο θα είναι

$$W = \int_0^t (F_xv_x + F_yv_y)\mathrm{d}t$$

Ο δεύτερος νόμος του Newton θα μας δώσει

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} = a\sin kt\,\hat{\boldsymbol{x}} + a\cos kt\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{a}{m}\sin kt \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{a}{m}\cos kt \end{cases} \tag{4.9}$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (4) θα έχουμε για τη x συνιστώσα της ταχύτητας

$$v_x = \frac{a}{m}\int_0^t \sin kt\mathrm{d}t = \frac{a}{mk}(1-\cos kt)$$

και για την y συνιστώσα της ταχύτητας

$$v_y = \frac{a}{m}\int_0^t \cos kt\mathrm{d}t = \frac{a}{mk}\sin kt$$

Άρα το έργο της δύναμης είναι

$$\begin{aligned} W &= \int_0^t (F_xv_x + F_yv_y)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{mk}\int_0^t \left[\sin kt(1-\cos kt) + \cos kt\sin kt\right]\mathrm{d}t = \frac{a^2}{mk}\int_0^t \sin kt\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{mk^2}(1-\cos kt) \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4.19 Βρείτε το έργο που κάνει η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = 3x^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2y\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$$

πάνω σε σωματίδιο όταν αυτό μετατοπίζεται από το σημείο $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$ πάνω σε καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3$$

Λύση:

Το έργο, $W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, είναι

$$W = \int_{(0,0,0)}^{1,1,1} (3x^2 \mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$$

Αντικαθιστούμε τις παραμετρικές εξισώσεις για $x = t, y = t^2, z = t^3$ και τα αντίστοιχα διαφορικά $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 2t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}z = 3t^2\mathrm{d}t$ στην παραπάνω σχέση και θα έχουμε

$$W = \int_0^1 (3t^2 + 4t^3 + 3t^2)\mathrm{d}t = 3$$

όπου τα όρια της ολοκλήρωσης για τη μεταβλητή t είναι από 0 ως 1 που αντιστοιχούν σε $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ως $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Πρόβλημα 4.20 Σωματίδιο μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου q κινείται σε περιοχή του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές: $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. Η δύναμη που ασκείται από το ηλεκτρικό πεδίο είναι διατηρητική. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι

$$U(x, y, z) = a_1 x + a_2 x^2 + b_1 y + b_2 y^2 + c_1 z + c_2 z^2$$

όπου $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_3$ είναι σταθερές με κατάλληλες διαστάσεις. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $(x = y = z = 0)$ με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v_0(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$.

(α) Βρείτε την ολική δύναμη $\boldsymbol{F} = F_x\hat{\boldsymbol{x}} + F_y\hat{\boldsymbol{y}} + F_z\hat{\boldsymbol{z}}$ που ασκείται στο σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t = 0$.

(β) Τη χρονική στιγμή t_A το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\boldsymbol{r}_A = x_A\hat{\boldsymbol{x}} + y_A\hat{\boldsymbol{y}} + z_A\boldsymbol{z}$. Βρείτε την κινητική του ενέργεια εκείνη τη στιγμή.

Λύση:

(α) Η ηλεκτρική δύναμη και η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\boldsymbol{F}_\eta = -\boldsymbol{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$

όπου η δυναμική ενέργεια είναι: $U(x, y, z) = a_1 x + a_2 x^2 + b_1 y + b_2 y^2 + c_1 z + c_2 z^2$. Άρα θα έχουμε

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2a_2 x + a_1$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2b_2 y + b_1$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2c_2 z + c_1$$

Αλλά για $t = 0$ οι συνθήκες είναι: $x = y = z = 0$, μας δίνουν για την ηλεκτρική δύναμη

$$\boldsymbol{F}_\eta(t = 0) = -a_1\hat{\boldsymbol{x}} - b_1\hat{\boldsymbol{y}} - c_1\hat{\boldsymbol{z}}$$

Η μαγνητική δύναμη $\boldsymbol{F}_\mu = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ είναι η δύναμη Lorentz που την αρχική χρονική στιγμή θα είναι

$$\boldsymbol{F}_\mu(t = 0) = qv_0 \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qv_0 B\hat{\boldsymbol{x}} - qv_0 B\hat{\boldsymbol{y}}$$

Άρα η ολική δύναμη θα είναι

$$\boldsymbol{F}(t=0) = \boldsymbol{F}_\eta(t=0) + \boldsymbol{F}_\mu(t=0) = (qv_0B - a_1)\hat{\boldsymbol{x}} - (qv_0B + b_1)\hat{\boldsymbol{y}} - (c_1)\hat{\boldsymbol{z}}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο, επομένως με τη βοήθεια της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε

$$K(\boldsymbol{r}=0) + U(\boldsymbol{r}=0) = K(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_A) + U(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_A)$$

$$\Rightarrow K(\boldsymbol{r}_A) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{v}_0 + U(0) - U(\boldsymbol{r}_A)$$

όπου ο όρος της αρχικής κινητικής ενέργειας είναι

$$K(\boldsymbol{r}=0) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{2}mv_0^2(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}})\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}) = mv_0^2$$

Ακόμη, η αρχική δυναμική ενέργεια θα είναι $U(x=0, y=0, z=0) = 0$. Άρα η διατήρηση της ενέργειας μας δίνει

$$K(\boldsymbol{r}_A) = mv_0^2 - U(\boldsymbol{r}_A) = mv_0^2 - \Big(a_1x_A + a_2x_A^2 + b_1y_A + b_2y_A^2 + c_1z_A + c_2z_A^2\Big)$$

Πρόβλημα 4.21 Βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 που κάνει γωνία ϕ με την οριζόντια. Η κίνηση γίνεται κοντά στην επιφάνεια της Γης άρα μπορείτε να θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας g σταθερά. Βρείτε, κάνοντας εφαρμογή της αρχής της διατήρησης της ενέργειας, την κατακόρυφο συνιστώσα της ταχύτητας όταν το βλήμα βρίσκεται στο μισό του μέγιστου ύψους της τροχιάς του.

Λύση:

Όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο μισό του μεγίστου ύψους του $(h/2)$, η ολική ενέργεια του είναι το άθροισμα της κινητικής, $T = (1/2)mv^2 = (1/2)m(v_x^2 + v_y^2)$ και δυναμικής, $U = mgh/2$

$$E\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mg\frac{h}{2}$$

όπου η συνιστώσα v_x της ταχύτητας του σωματιδίου είναι ίση με την x-συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας, $v_x = v_0\cos\phi$ (δεν υπάρχει δύναμη κατά τη διεύθυνση του άξονα x). Το v_y είναι η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας στο $h/2$.
Η ολική ενέργεια του σωματιδίου στο μέγιστο ύψος, h, θα είναι

$$E(h) = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh$$

διότι η συνιστώσα της ταχύτητας στο άξονα του y είναι μηδέν.
Λόγω της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε

$$E\left(\frac{h}{2}\right) = E(h)$$

$$\Rightarrow v_y = \sqrt{gh}$$

όπου το μέγιστο ύψος στο πρόβλημα της βολής είναι

$$h = \frac{v_0^2\sin^2\phi}{2g}$$

Άρα η v_y στο μισό του μεγίστου ύψους της τροχιάς θα είναι

$$v_y = \frac{v_0\sin\phi}{\sqrt{2}}$$

Πρόβλημα 4.22 Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα μονοδιάστατο δυναμικό πεδίο. Η δυναμική του ενέργεια είναι

$$U(x) = D\left[\mathrm{e}^{-2a(x-x_0)} - 2\mathrm{e}^{-a(x-x_0)}\right] \qquad \text{(Δυναμικό Morse)}$$

όπου x_0, D και a είναι θετικές ποσότητες.

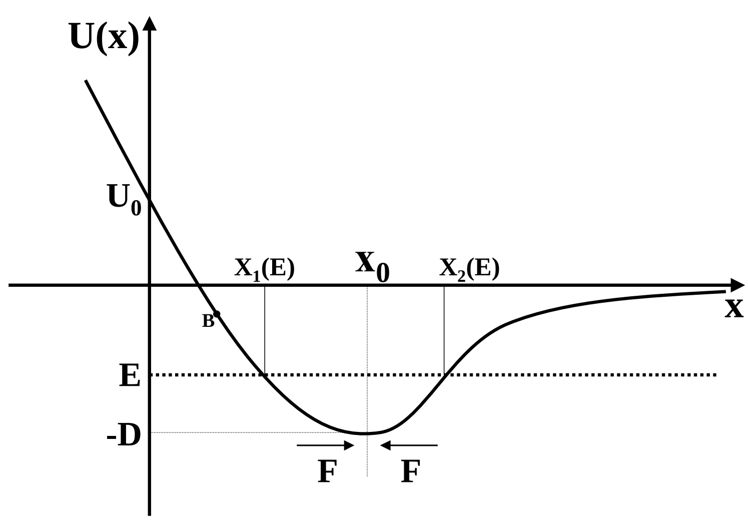
(α) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας και τη θέση που συμβαίνει.

(β) Υπολογίστε τις οριακές τιμές της $U(x)$ για $x \to -\infty$ και $x \to +\infty$, και σχεδιάστε ποιοτικά την $U(x)$.

(γ) Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας E το σωματίδιο θα παραμένει φραγμένο σε μια περιοχή του χώρου; Σχεδιάστε την αντίστοιχη περιοχή σε μια τυπική περίπτωση.

(δ) Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας το σωματίδιο διαφεύγει στο άπειρο; Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα (σε άπειρη απόσταση) από το θεώρημα της διατήρησης της ενέργειας.

Λύση:



Σχήμα 4.3

(α) Στο σημείο της ελάχιστης τιμής της δυναμικής ενέργειας θα πρέπει $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x = 0$. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \Rightarrow 2aD\left[\mathrm{e}^{-a(x-x_0)} - \mathrm{e}^{-2a(x-x_0)}\right] &= 0 \\ \Rightarrow -a(x-x_0) &= -2a(x-x_0) \\ \Rightarrow x &= x_0 \end{aligned}$$

Η τιμή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας θα είναι

$$U(x_0) = -D$$

Στο σημείο αυτό $(x = x_0)$ η δύναμη, F, θα είναι

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0$$

συνεπώς το σωματίδιο θα ισορροπεί.

(β) Οι οριακές τιμές της δυναμικής ενέργειας θα είναι

$$U(x \to +\infty) \to 0$$

εφ' όσον οι εκθετικές συναρτήσεις δίνουν

$$\mathrm{e}^{-a(x-x_0)} \xrightarrow{x\to+\infty} 0 \qquad \text{και} \qquad \mathrm{e}^{-2a(x-x_0)} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

Στην περίπτωση που το $x \to -\infty$ έχουμε

$$U(x) \cong D\mathrm{e}^{-2a(x-x_0)} \xrightarrow{x\to-\infty} +\infty$$

Η δυναμική ενέργεια $U(x)$ μπορεί να παρασταθεί ποιοτικά όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3, όπου το U_0 (το σημείο που η δυναμική ενέργεια τέμνει τον κάθετο άξονα) είναι

$$U(0) = D(\mathrm{e}^{2ax_0} - 2\mathrm{e}^{ax_0}) = D\mathrm{e}^{ax_0}(\mathrm{e}^{ax_0} - 2) > 0$$

(γ) Παρατηρούμε ότι αν η ενέργεια του σωματιδίου είναι

$$-D < E < 0$$

το σωματίδιο θα είναι φραγμένο μεταξύ των σημείων $x_1(E)$ και $x_2(E)$. Αυτά τα δύο σημεία προσδιορίζονται από την συνθήκη

$$U(x) = E$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{E}{D} = \left[\mathrm{e}^{-2a(x-x_0)} - 2\mathrm{e}^{-a(x-x_0)}\right] \\ &\Rightarrow y^2 - 2y - \frac{E}{D} = 0 \end{aligned}$$

όπου η νέα μεταβλητή y είναι

$$y = \mathrm{e}^{-a(x-x_0)}$$

Οι δύο ρίζες του τριωνύμου θα είναι τα σημεία $x_1(E)$ και $x_2(E)$

$$x_1(E) = x_0 - \frac{1}{a}\ln\left(1 - \sqrt{1 + \frac{E}{D}}\right), \qquad x_2(E) = x_0 - \frac{1}{a}\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{E}{D}}\right)$$

Για ένα τυχαίο σημείο Β, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3, θα έχουμε $U > E$ και επομένως η κινητική ενέργεια, $K = (1/2)mv^2$, του σωματιδίου θα είναι

$$\begin{aligned} &E - U < 0 \\ &\Rightarrow K < 0 \\ &\Rightarrow v^2 < 0 \quad \text{τετράγωνο της ταχύτητας αρνητική!} \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατον.

(δ) Στην περίπτωση που η ενέργεια είναι θετική, το σωματίδιο μπορεί να διαφύγει και η οριακή ταχύτητα διαφυγής θα βρεθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος της διατήρησης της ενέργειας

$$E_\infty = K_\infty + U_\infty = E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + 0$$

όπου η E_∞ είναι η ενέργεια του σωματιδίου στο άπειρο. Επομένως η οριακή ταχύτητα θα είναι

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Πρόβλημα 4.23 Σώμα μάζας m μπορεί να κινείται πάνω στον άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια είναι

$$U(x) = -Ax(x^2 - a^2), \qquad \text{για } -\infty < x < +\infty$$

όπου a, A είναι θετικές σταθερές.

(α) Υπολογίστε τη δύναμη F που δρα στο σώμα και βρείτε σε ποια διαστήματα είναι ελκτική (δηλαδή κατευθύνεται προς το σημείο $x = 0$) και σε ποια είναι απωστική.

(β) Σχεδιάστε τη δυναμική ενέργεια $U(x)$ και βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος, καθώς και το είδος της ισορροπίας σε αυτά τα σημεία.

(γ) Πόση κινητική ενέργεια πρέπει να έχει το σώμα στη θέση $x = 0$ για να μπορέσει να διαφύγει στο άπειρο;

(δ) Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα από το σημείο $x = 0$, περιγράψτε την κίνηση που θα εκτελέσει και βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά κατά την κίνηση αυτή.

Λύση:

(α) Η δύναμη που δρα στο σώμα είναι

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = A(3x^2 - a^2)$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη είναι θετική όταν

$$x^2 - a^2 > 0 \Rightarrow x < -\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad x > +\frac{a}{\sqrt{3}}$$

και είναι αρνητική όταν

$$3x^2 - a^2 < 0 \Rightarrow -\frac{a}{\sqrt{3}} < x < +\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Επομένως η δύναμη είναι ελκτική για τα διαστήματα

$$x < -\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad 0 < x < +\frac{a}{\sqrt{3}}$$

και θα είναι απωστική όταν

$$0 > x > -\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad x > +\frac{a}{\sqrt{3}}$$

(β) Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια τείνει στο $+\infty$ όταν το $x \to -\infty$ και τείνει στο $-\infty$ όταν το $x \to +\infty$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4. Τα δύο σημεία ισορροπίας είναι τα σημεία όπου η δύναμη είναι μηδέν

$$x_1 = -\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{και} \quad x_2 = +\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Το σημείο x_1 είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας, καθότι όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4, αν μετακινηθούμε δεξιά ή αριστερά του σημείου x_1 η δύναμη F το φέρνει στο αρχικό σημείο x_1. Αντίθετα το σημείο x_2 είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας.

(γ) Για να διαφύγει το σώμα στο άπειρο αρκεί το σώμα να έχει ενέργεια για να προσπεράσει το σημείο $x_2 = a/\sqrt{3}$ όπου η δυναμική ενέργεια είναι

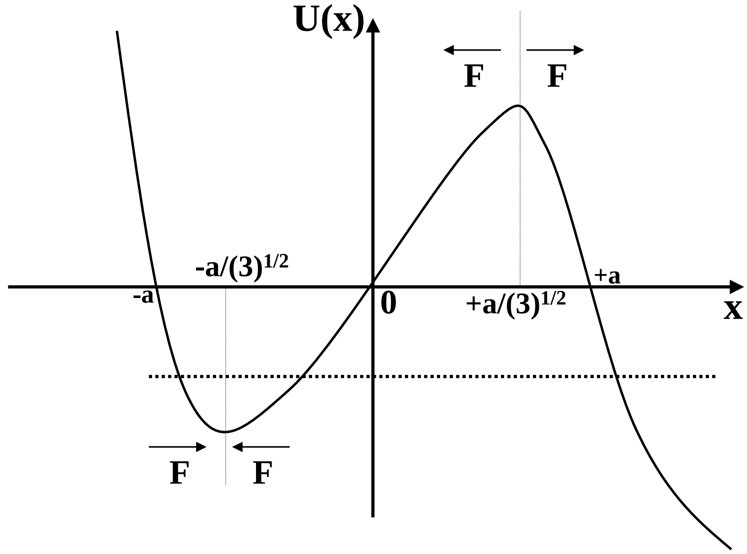
$$U\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2Aa^3}{3\sqrt{3}}$$

Στο σημείο $x = 0$ η ολική ενέργεια θα είναι

$$E = K(0) + U(0) = K(0)$$

διότι η δυναμική ενέργεια στο σημείο $x = 0$ είναι μηδέν. Στο σημείο $x_2 = a/\sqrt{3}$ η ολική ενέργεια του σώματος θα είναι

$$E = K(x_2) + U(x_2) = U(x_2)$$



Σχήμα 4.4

ώστε το σώμα να φτάσει στο σημείο x_2 με μηδενική ταχύτητα. Από τη διατήρηση της ενέργειας, έχουμε για την κινητική ενέργεια στη θέση $x = 0$

$$K = \frac{2Aa^3}{3\sqrt{3}}$$

(δ) Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο από το σημείο $x = 0$, η ολική του ενέργεια είναι μηδέν. Σ' ένα τυχαίο σημείο x, η ταχύτητα του από τη διατήρηση της ενέργειας θα είναι

$$\frac{1}{2}mv^2 - Ax(x^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2A}{m}x(x^2 - a^2)}$$

Για σημεία $x < -a$ το σώμα δεν μπορεί να βρεθεί εφ' όσον η δυναμική του ενέργεια θα είναι μεγαλύτερη από την ολική ενέργεια. Άρα το σώμα είναι φραγμένο στην περιοχή $-a < x < 0$ και θα εκτελεί μια ταλάντωση. Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος θα είναι στο σημείο όπου η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4Aa^3}{3\sqrt{3}\,m}}$$

Πρόβλημα 4.24 Σώμα με μάζα m κινείται σε πεδίο μέσα στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι

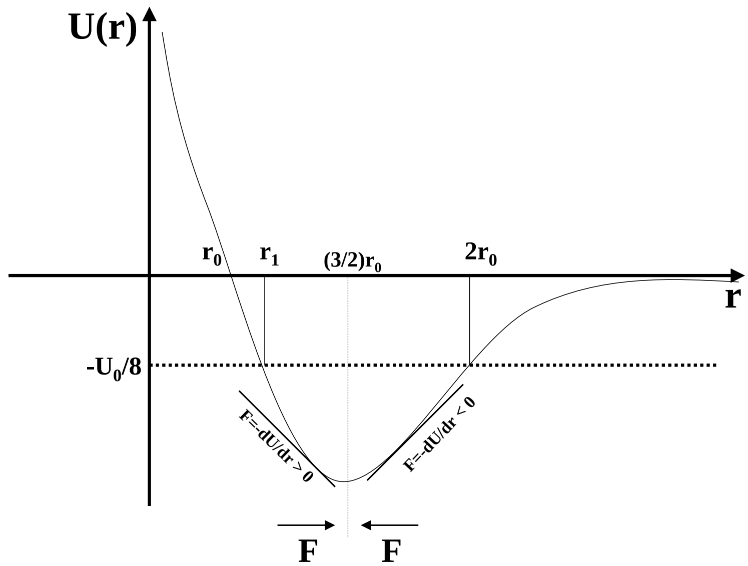
$$U(r) = U_0\left[-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]$$

όπου U_0 και r_0 είναι θετικές σταθερές και r είναι η απόσταση του σώματος από το ακίνητο σημείο O, (το r είναι πάντα θετικό).

(α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα καθώς και το σημείο ισορροπίας του. Να κάνετε μια γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας.

(β) Το σώμα αρχικά κρατιέται στη θέση $r_1 = 2r_0$ και κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερο. Να περιγράψτε τη κίνηση του σώματος. Να βρείτε το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος και τη θέση στην οποία ισχύει αυτό.

Λύση:



Σχήμα 4.5

(α) Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}} = -U_0\left[2\frac{r_0^2}{r^3} - 3\frac{r_0^3}{r^4}\right]\hat{\boldsymbol{r}} \\ &= U_0\frac{r_0^2}{r^3}\left(3\frac{r_0}{r} - 2\right)\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

Ισορροπία του σώματος επιτυγχάνεται όταν η δύναμη είναι μηδέν

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= 0 \\ \Rightarrow r &= \frac{3}{2}r_0\end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5.
Επιπλέον παρατηρούμε ότι για $r \to +\infty$ η δυναμική ενέργεια τείνει στο μηδέν $[U(r) \to 0]$, ενώ για $r \to 0$ έχουμε

$$U(r) \cong U_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \xrightarrow{r\to 0} +\infty$$

Η δυναμική ενέργεια τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $r = r_0$, όπου $U(r_0) = 0$. Χρησιμοποιώντας όλες αυτές τις ιδιότητες της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας, η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα 4.5.

(β) Στο σημείο $r = 2r_0$ η κινητική ενέργεια του σώματος, $K(2r_0)$, θα είναι μηδέν, άρα η ολική ενέργεια του θα είναι

$$E = K(2r_0) + U(2r_0) = -\frac{U_0}{8}$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5, η ολική ενέργεια τέμνει τη δυναμική ενέργεια σε δύο σημεία: στο $r = 2r_0$ και στο σημείο r_1 που μπορεί να υπολογιστεί από τις λύσεις τις εξίσωσης

$$U(r) = U_0\left[-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right] = -\frac{U_0}{8}$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 + \frac{1}{8} = 0 \qquad \text{με} \qquad x = \frac{r_0}{r}$$

η οποία έχει τρεις πραγματικές ρίζες

$$x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4} = 0,8$$
$$x_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = -0,3$$
$$x_3 = \frac{1}{2}$$

Η ρίζα $x_3 = 1/2$ αντιστοιχεί στην $r = 2r_0$, ενώ η ρίζα που αντιστοιχεί στο σημείο

$$x_1 = 0,8 \Rightarrow r_1 = 1,25\,r_0$$

Η τρίτη ρίζα x_2 δεν μας δίνει μια φυσική λύση διότι δεν είναι θετική.
Το σώμα θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων r_1 και $r = 2r_0$ εφ' όσον δεν μπορεί να βρεθεί στις περιοχές $r < r_1$ ή $r > 2r_0$, διότι τότε η κινητική του ενέργεια θα είναι αρνητική. Η ταχύτητα, v, του σώματος μπορεί να βρεθεί από τη διατήρηση της ενέργειας μεταξύ του σημείου $r = 2r_0$ και ενός τυχαίου r, ως ακολούθως

$$K(2r_0) + U(2r_0) = K(r) + U(r)$$

$$\Rightarrow -\frac{U_0}{8} = \frac{1}{2}mv^2 + U_0\left[-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2\frac{U_0}{m}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - \frac{1}{8}\right]}$$

Το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας θα συμβεί όταν έχουμε την ελάχιστη δυναμική ενέργεια, δηλαδή στο σημείο ισορροπίας $r = (3/2)r_0$

$$v_{\max} = \sqrt{2\frac{U_0}{m}\left[\left(\frac{r_0}{3r_0/2}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{3r_0/2}\right)^3 - \frac{1}{8}\right]} = \sqrt{\frac{5}{108}\frac{U_0}{m}}$$

Πρόβλημα 4.25 Σωματίδιο μάζας m κινείται πάνω σε ευθεία που περνά από κάποιο σημείο Ο. Το σωματίδιο έλκεται προς το Ο με δύναμη μέτρου mk/x^2 όταν $x > a$ και απωθείται από το Ο με δύναμη μέτρου mka/x^3 όταν $x < a$, όπου x η απόσταση του σωματιδίου από το Ο. Το σωματίδιο ελευθερώνεται από την ηρεμία σε απόσταση $2a$ από το Ο.

(α) Σχεδιάστε τη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου συναρτήσει του x

(β) Περιγράψτε την κίνηση που θα εκτελέσει το σωματίδιο και δείξετε ότι το σωματίδιο θα ηρεμήσει στιγμιαία όταν $x = a/\sqrt{2}$.

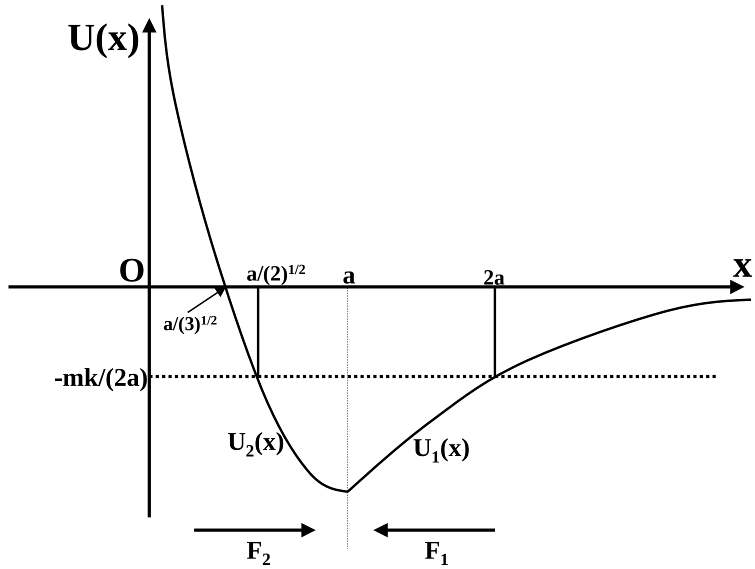
Λύση:

(α) Στην περιοχή $x > a$ η δύναμη είναι ελκτική

$$F_1 = -\frac{mk}{x^2}$$

και επομένως η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου θα είναι

$$U_1 = -\int_{\infty}^{x} F_1 \mathrm{d}x = \int_{\infty}^{x} \frac{mk}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{mk}{x}$$



Σχήμα 4.6

Στην περιοχή $x < a$ η δύναμη είναι απωστική

$$F_2 = \frac{mka}{x^3}$$

και η δυναμική ενέργεια θα πρέπει είναι

$$\begin{aligned} U_2 &= -\int_{\infty}^{a} F_1 \mathrm{d}x - \int_{a}^{x} F_2 \mathrm{d}x = \int_{\infty}^{a} \frac{mk}{x^2} \mathrm{d}x - \int_{a}^{x} \frac{mka}{x^3} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{mk}{a} + \frac{mka}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} \right) \end{aligned}$$

Το γράφημα της δυναμικής ενέργειας δίνεται στο σχήμα 4.6. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση U_2 τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $a/\sqrt{3}$ διότι

$$U_2 = -\frac{mk}{a} + \frac{mka}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{mka}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{a^2} \right)$$

Επιπλέον η συνάρτηση U_2 τέμνει τον άξονα που περνά από το σημείο $U = -mk/(2a)$ (αυτό είναι το σημείο όπου $U_1(2a) = -mk/(2a)$) στο $x = a/\sqrt{2}$, διότι

$$\begin{aligned} -\frac{mk}{2a} &= -\frac{mk}{a} + \frac{mka}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2} \\ \Rightarrow x &= \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Επομένως το σωματίδιο θα εκτελεί μια ταλάντωση στο διάστημα

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < x < 2a$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6. Οι περιοχές $x < a/\sqrt{2}$ ή $x > 2a$ είναι απαγορευμένες για το σωματίδιο διότι η δυναμική ενέργεια του θα είναι μεγαλύτερη της ενέργειας του.

(β) Από το θεώρημα διατήρησης ενέργειας θα έχουμε

$$U_1(2a) = U_2(x) + K_2(x) \tag{4.10}$$

εφ' όσον το σωματίδιο άρχισε από ηρεμία και επομένως η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν, η $U_2(x), K_2(x)$ είναι η δυναμική και κινητική ενέργεια του σωματιδίου στην τυχαία θέση $x < a$. Επομένως η εξίσωση (4) θα έχει

$$-\frac{mk}{2a} = -\frac{mk}{a} + \frac{mka}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{2}mv^2$$
$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{a}\left[2 - \left(\frac{a}{x}\right)^2\right]$$

όπου v είναι η ταχύτητα του σωματιδίου. Παρατηρούμε ότι για $v = 0$ θα έχουμε

$$0 = \frac{k}{a}\left[2 - \left(\frac{a}{x}\right)^2\right]$$
$$\Rightarrow 2 = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Επομένως στο σημείο $x = a/\sqrt{2}$ το σωματίδιο θα ηρεμήσει στιγμιαία.

Πρόβλημα 4.26 Σκιέρ ξεκινάει από το λόφο Η και κατευθύνεται προς το λόφο Κ ο οποίος περιγράφεται από ένα κύκλο ακτίνας Ρ.

(α) Υπολογίστε την ταχύτητα $v(\theta)$ του σκιέρ σαν συνάρτηση της γωνίας θ.

(β) Σε ποια γωνία εγκαταλείπει ο σκιέρ την πίστα;

(γ) Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι τουλάχιστον το ύψος h_0 ώστε ο σκιέρ να εγκαταλείψει την πίστα για $\theta = 0^o$;

(δ) Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι τουλάχιστο το ύψος h_0 ώστε ο σκιέρ να φτάσει μέχρι το πιο ψηλό σημείο της κορυφής; Τι μπορείτε να πείτε για τα πιθανά σημεία θ που εγκαταλείπει ο σκιέρ την πίστα αφού περάσει από το πιο ψηλό σημείο;

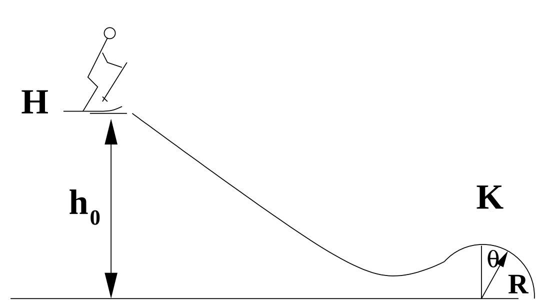
Λύση:

(α) Έστω ότι ο σκιέρ βρίσκεται πάνω στο λόφο και βρίσκεται σε ένα ύψος $h = R\cos\theta$. Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv(\theta)^2 = mgh_0$$

Λύνοντας ως προς θ έχουμε

$$v(\theta) = \sqrt{2g(h_0 - R\cos\theta)} \tag{4.11}$$



Σχήμα 4.7

(β) Όσο ο σκιέρ είναι πάνω στο λόφο η δύναμη που τον κρατά πάνω στην πίστα είναι

$$F_N = mg\cos\theta - \frac{mv(\theta)^2}{R} \tag{4.12}$$

Την στιγμή που εγκαταλείπει την πίστα η δύναμη F_N μηδενίζεται. Άρα η (4) γίνεται

$$g\cos\theta = \frac{v(\theta)^2}{R}$$

και αντικαθιστώντας την ταχύτητα από τη σχέση (4) έχουμε

$$\begin{aligned} g\cos\theta &= \frac{2g(h_0 - R\cos\theta)}{R} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{2h_0}{3R} \end{aligned} \tag{4.13}$$

(γ) Για $\theta = 0^o \Rightarrow \cos\theta = 1$ άρα από την (4) βρίσκουμε

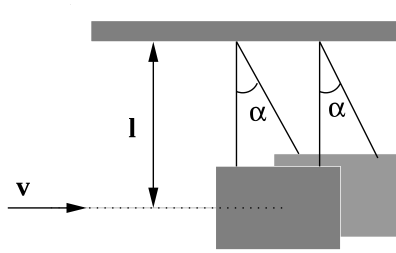
$$h_0 = \frac{3R}{2}$$

(δ) Για να φτάσει ο σκιέρ στην κορυφή θα πρέπει $h_0 > R$ άρα $\cos\theta \geq 2/3$ δηλαδή θα μπορούσε να εγκαταλείψει την πίστα για $\theta \leq 48,2^o$.

Πρόβλημα 4.27 Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός βλήματος $(m_1 = 12\,g)$, το πυροβολούμε σε ένα κρεμασμένο κουτί με άμμο $(m_2 = 20\ \mathbf{kg},\ l = 1\ \mathbf{m})$, το οποίο μπορεί να ταλαντώνεται. Εξαιτίας του πυροβολισμού, το κουτί μετακινείται κατά μία γωνία $\alpha = 10^o$, ενώ το βλήμα παραμένει μέσα στο κουτί.

(α) Πόση είναι η κινητική ενέργεια μετά τη βολή σαν συνάρτηση της αρχικής κινητικής ενέργειας;

(β) Ποια είναι η ταχύτητα της σφαίρας;



Σχήμα 4.8

Λύση:

(α) Πριν την κρούση έχουμε

$$\begin{aligned} E^{\text{πριν}}_{\text{κιν}} &= \frac{m_1 v^2}{2} \\ p^{\text{πριν}}_{\text{κιν}} &= m_1 v \end{aligned}$$

Μετά την κρούση έχουμε

$$\begin{aligned} E^{\text{μετα}}_{\text{κιν}} &= \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} \\ p^{\text{μετα}}_{\text{κιν}} &= (m_1+m_2)u \end{aligned}$$

Από τη διατήρηση της ορμής βρίσκουμε

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \tag{4.14}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$E_{\text{κιν}}^{\text{μετα}} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left(\frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 v^2}{2} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} = E_{\text{κιν}}^{\text{πριν}} \cdot 6 \cdot 10^{-4}.$$

Βλέπουμε ότι μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος μεταφέρεται στο κουτί σαν κινητική ενέργεια. Το υπόλοιπο μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.

(β) Μετά το κτύπημα από το βλήμα το κουτί θα ανέβει ένα ύψος

$$h = l(1 - \cos\alpha) = 0,0152 \text{ m}$$

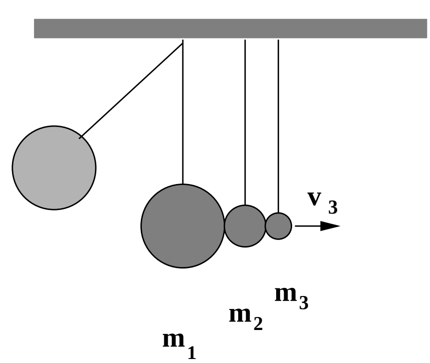
Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\begin{aligned} E_{\text{κιν}}^{\text{μετα}} &= E_{\text{δυν}} \\ \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} &= mgh \\ \Rightarrow u &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (4) βρίσκουμε τη ζητούμενη ταχύτητα του βλήματος

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 910,7 \, \text{m/s}$$

Πρόβλημα 4.28 Τρεις ελαστικές σφαίρες των οποίων οι μάζες έχουν αναλογία $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ είναι κρεμασμένες ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε τη μία σφαίρα και την αφήνουμε ελεύθερη ώστε κτυπά τις άλλες δύο σφαίρες με μία ταχύτητα v_1. Για ποια ταχύτητα πετυχαίνουμε την απομάκρυνση της τελευταίας σφαίρας;



Σχήμα 4.9

Λύση:

Η πρώτη σφαίρα αφού κτυπήσει τη δεύτερη σφαίρα θα κινηθεί με ταχύτητα u_1 ενώ η δεύτερη θα κινηθεί με ταχύτητα u_2. Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{4.15}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \tag{4.16}$$

Από τις (4) και (4) βρίσκουμε

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$
$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

αντικαθιστώντας το δεδομένο ότι $m_1 = 2m_2$ βρίσκουμε

$$u_2 = \frac{4v_1}{3} \tag{4.17}$$

Στη συνέχεια υπάρχει η κρούση με την τρίτη σφαίρα. Με όμοιο τρόπο

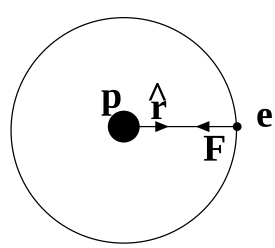
$$v_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} u_2$$

Χρησιμοποιώντας το δεδομένο $m_2 = 2m_3$ και εν συνεχεία την (4) βρίσκουμε

$$v_3 = \frac{2m_2}{m_2 + (m_2/2)} u_2 = \frac{4u_2}{3} = \frac{16v_1}{9}$$

Πρόβλημα 4.29 Ένα ηλεκτρόνιο μάζας m και φορτίου e κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα πρωτόνιο, πού θεωρείται ακίνητο. Η ακτίνα της τροχιάς είναι R. Αν η έλξη ενεργεί σαν κεντρομόλος δύναμη, να βρεθεί η ταχύτητα του ηλεκτρονίου, η κινητική ενέργεια, η δυναμική ενέργεια και το έργο ιονισμού του συστήματος (ενέργεια πού χρειάζεται ώστε το ηλεκτρόνιο να βρεθεί σε άπειρη απόσταση από το πρωτόνιο).

Λύση:



Σχήμα 4.10

Από την ηλεκτροστατική έχουμε ότι η δύναμη Coulomb που ασκεί το πρωτόνιο πάνω στο ηλεκτρόνιο είναι

$$\boldsymbol{F} = -k\frac{\mathrm{e}^2}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Για την περίπτωση του ηλεκτρονίου η κεντρομόλος δύναμη είναι

$$\boldsymbol{F}_k = -\frac{mv^2}{R}\hat{\boldsymbol{r}}$$

όπου m είναι η μάζα του ηλεκτρονίου. Όμως $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_k$. Άρα:

$$k\frac{\mathrm{e}^2}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k\mathrm{e}^2}{mR}}$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{k\mathrm{e}^2}{R}$$

Η δυναμική ενέργεια σε απόσταση R από το πρωτόνιο είναι

$$V(R) = -\int_{\infty}^{R} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\infty}^{R} -\frac{k\mathrm{e}^2}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{k\mathrm{e}^2}{R}$$

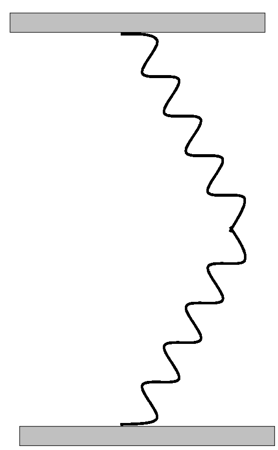
Η συνολική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E(R) = K + V(R) = \frac{1}{2}\frac{k\mathrm{e}^2}{R} - \frac{k\mathrm{e}^2}{R} = -\frac{1}{2}\frac{k\mathrm{e}^2}{R}$$

Όταν το ηλεκτρόνιο μετακινηθεί στο άπειρο τότε η ελάχιστη τιμή της ενέργειάς του είναι $E(\infty) = 0$. Άρα πρέπει να δαπανήσουμε έργο ίσο με την ενέργειά του στην απόσταση R από το πρωτόνιο, άρα

$$W = |E(R) - E(\infty)| = \frac{k\mathrm{e}^2}{2R}$$

Πρόβλημα 4.30 Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του συστήματος των δύο ελατηρίων του σχήματος 4.11, όταν η οριζόντια μετατόπιση x είναι μικρή σε σχέση με το αρχικό μήκος ℓ_0 των ελατηρίων. Η σταθερά κάθε ελατηρίου είναι k.*



Σχήμα 4.11

Λύση:

Η δύναμη επαναφοράς του κάθε ελατηρίου είναι

$$f = -k(\ell - \ell_0)$$

Η συνισταμένη δύναμη $\boldsymbol{F}$ των δύο ελατηρίων έχει μέτρο

$$F = \sqrt{f^2 + f^2 + 2f^2\cos(\pi - 2\phi)} = 2f\sin\phi$$

και διεύθυνση $-\hat{\boldsymbol{x}}$. Άρα

$$\boldsymbol{F} = -2k(\ell - \ell_0)\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} \tag{4.18}$$

Όμως

$$\sin\phi = \frac{x}{\ell} \qquad \text{και} \qquad \ell = \sqrt{\ell_0^2 + x^2}$$

και αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε

$$\boldsymbol{F} = -2k\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}}\right)x\hat{\boldsymbol{x}} \tag{4.19}$$

* Για μικρές τιμές του x μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $(1 + x)^n \simeq 1 + nx$

Για μικρό x έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} = \frac{1}{\ell_0} - \frac{x^2}{2\ell_0^3} + \dots$$

και η (4) γίνεται

$$\boldsymbol{F} = -2k \left[1 - \ell_0 \left(\frac{1}{\ell_0} - \frac{x^2}{2\ell_0^3}\right)\right] x\hat{\boldsymbol{x}} = -\frac{k}{\ell_0^2} x^3 \hat{\boldsymbol{x}}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= -F\mathrm{d}x \\ \Rightarrow V &= \int -F\mathrm{d}x + \text{σταθερά} = \frac{kx^4}{4\ell_0^2} + \text{σταθερά} \end{aligned}$$

Επειδή για $x = 0$ η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν προφανώς η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν. Άρα

$$V = \frac{k}{4\ell_0^2} x^4$$

Πρόβλημα 4.31 Αφήνουμε μία σφαίρα να πέσει από ύψος 10 m. Αν το 80% της μηχανικής ενέργειας σε κάθε αναπήδηση της σφαίρας στο έδαφος μετατρέπεται σε θερμότητα, να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο θα ηρεμήσει η σφαίρα. †

Λύση:

Αρχικά η σφαίρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια, ίση με mgh. Ύστερα από την πρώτη αναπήδηση η σφαίρα θα φτάσει σε ύψος h_1 και η δυναμική της ενέργεια θα είναι

$$\begin{aligned} mgh_1 &= 0,2mgh \\ \Rightarrow h_1 &= 0,2h \end{aligned}$$

Στη δεύτερη αναπήδηση θα φτάσει σε ύψος $h_2 = 0,2h_1 = 0,2^2 h$, στην τρίτη σε ύψος $h_3 = 0,2h_2 = 0,2^3 h$ κ.ο.κ. Ο χρόνος της πρώτης αναπήδησης είναι

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 10}{10}} = 1,41\,\mathrm{s}$$

Από την πρώτη ως τη δεύτερη αναπήδηση μεσολαβεί χρόνος

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{0,4h}{g}} = 0,2^{1/2}\ 2t$$

Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 0,2\ 2t$$

$$t_3 = 2\sqrt{\frac{2h_3}{g}} = 0,2^{\frac{3}{2}}\ 2t$$

Ο συνολικός χρόνος που αναπηδά η σφαίρα είναι

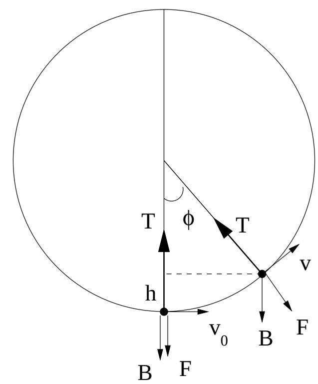
$$\begin{aligned} t_{\text{ολ}} &= t + t_1 + t_2 + t_3 + \dots = t + 2t(0,2^{\frac{1}{2}} + 0,2^{\frac{2}{2}} + 0,2^{3/2} + \dots) \\ &= t + 2t\frac{0,2^{\frac{1}{2}}}{1 - 0,2^{\frac{1}{2}}} = 2,612t = 3,69\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

---

† Δίνεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ για $|x| < 1$.

Πρόβλημα 4.32 Ένα σώμα μάζας $m = 0,1\,kg$ κρεμιέται από την άκρη ενός νήματος μήκους $0,9\,m$. Το σώμα αποκτά οριζόντια ταχύτητα $v_0 = 6\,m/s$ και διαγράφει τροχιά πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογιστεί η τάση στο νήμα σε συνάρτηση με τη γωνία πού σχηματίζει με την κατακόρυφο. Για ποια γωνία το σώμα εγκαταλείπει την κυκλική του τροχιά;

Λύση:



Σχήμα 4.12

Έστω ότι βρισκόμαστε πάνω στο σώμα που κινείται. Σε μια τυχαία θέση που η ακτίνα σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφη πάνω στο σώμα ενεργούν οι δυνάμεις του βάρους, $\boldsymbol{B}$, της τάσης, $\boldsymbol{T}$ και η φυγόκεντρος δύναμη, $\boldsymbol{F}$. Όπως φαίνεται στο σχήμα το βάρος μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, την ακτινική $\boldsymbol{B_1}$ και την εφαπτομενική $\boldsymbol{B_2}$. Από την ισορροπία του σώματος κατά τη διεύθυνση της ακτίνας έχουμε

$$T = B_1 + F = B\cos\phi + F \tag{4.20}$$

Αλλά

$$F = \frac{mv^2}{R} \tag{4.21}$$

Την ταχύτητα v την υπολογίζουμε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mg(R - R\cos\phi) \\ \Rightarrow\ v^2 &= v_0^2 - 2gR(1-\cos\phi) \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στις (4) και (4) βρίσκουμε

$$T = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 - 3\cos\phi) = \frac{0,1\times 36}{0,9} - 0,1\times 10(2-3\cos\phi) = (2+3\cos\phi)\ \mathrm{N}$$

Το σώμα θα εγκαταλείψει την κυκλική τροχιά στο σημείο όπου $T = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \cos\phi = -\frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \phi = 131,8^o \end{aligned}$$

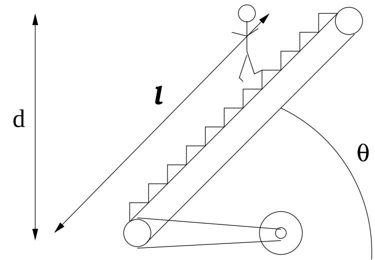
Πρόβλημα 4.33 Να εξεταστεί το ποσό της ενέργειας πού καταναλώνει μια ηλεκτροκίνητη σκάλα πού έχει ταχύτητα v όταν

(α) ο άνθρωπος πού ανεβαίνει στέκεται ακίνητος πάνω της

(β) βαδίζει πάνω σ' αυτή με σχετική ταχύτητα V'.

Ποια είναι η ισχύς σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις;

Λύση:



Σχήμα 4.13

(α) Εφόσον ο άνθρωπος είναι ακίνητος πάνω στην σκάλα, για να ανέβει σε ύψος $d = \ell \sin\theta$ καταναλώνεται ενέργεια $E = mgd$. Για να φτάσει στην κορυφή της χρειάζεται

$$t = \frac{d}{v \sin\theta}$$

και η ισχύς που καταναλώνεται είναι

$$P = \frac{E}{t} = mgv \sin\theta$$

(β) Εφόσον ο άνθρωπος βαδίζει σε σχέση με τη σκάλα με μια σχετική ταχύτητα V' ο χρόνος που χρειάζεται για να ανέβει στο τελικό ύψος d είναι

$$t' = \frac{d}{(v + V') \sin\theta}$$

Στη διάρκεια αυτού του χρόνου ένα σκαλοπάτι ανεβαίνει κατακόρυφα ένα ύψος

$$h = vt' \sin\theta = \frac{vd}{v + V'}$$

ενώ ο άνθρωπος ανεβαίνει βαδίζοντας ένα ύψος

$$d - h = V't' \sin\theta = \frac{V'd}{v + V'}$$

Η ενέργεια που καταναλώνεται από την σκάλα είναι

$$mgh = mg\frac{vd}{v + V'}$$

ενώ ο άνθρωπος παράγει έργο ίσο με

$$mg(d - h) = mg\frac{V'd}{v + V'}$$

Η συνολική ενέργεια που απαιτείται για τη μετακίνηση του ανθρώπου σε ύψος d είναι

$$mgh + mg(d - h) = mgd$$

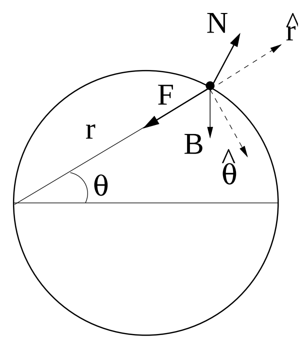
που είναι ίση με την ενέργεια που χρειάζεται και στην περίπτωση (α). Η ισχύς που παράγεται από την σκάλα είναι

$$P = \frac{mgh}{t'} = \frac{\dfrac{mg(vd)}{(v + V')}}{\dfrac{d}{(v + V') \sin\theta}} = mgv \sin\theta$$

Ας σημειώσουμε ότι η ισχύς που απαιτείται από την σκάλα είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις, ενώ το έργο που παράγεται από την σκάλα στη δεύτερη περίπτωση είναι μικρότερο από αυτό που παράγεται στην πρώτη περίπτωση.

Πρόβλημα 4.34 Ένα υλικό σημείο με βάρος B μπορεί να γλιστράει χωρίς τριβή πάνω στην περιφέρεια ενός κατακόρυφου κύκλου που έχει ακτίνα R. Το σημείο αυτό έλκεται με δύναμη ανάλογη προς την απόστασή του από το κέντρο έλξης. Το κέντρο αυτό βρίσκεται στη μία άκρη της οριζόντιας διαμέτρου του κύκλου. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας του υλικού σημείου.

Λύση:



Σχήμα 4.14

Σ' ένα τυχαίο σημείο της περιφέρειας οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα είναι: η ελκτική δύναμη $\boldsymbol{F} = -kr\hat{\boldsymbol{r}}$, το βάρος του $\boldsymbol{B}$ και η αντίδραση της επιφάνειας $\boldsymbol{N}$. Άρα το άθροισμα των δυνάμεων είναι

$$\boldsymbol{F}_{\text{ολ}} = m\boldsymbol{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{N}$$

Αν αναλύσουμε στις συντεταγμένες των διανυσμάτων έχουμε

$$\begin{aligned} &\text{στον άξονα } \hat{\boldsymbol{r}}: \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mg\sin\theta - kr - N\cos\theta \\ &\text{στον άξονα } \hat{\boldsymbol{\theta}}: \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = mg\cos\theta - N\sin\theta \end{aligned} \tag{4.22}$$

Από τη γεωμετρία του προβλήματος έχουμε

$$\begin{aligned} &r = 2R\cos\theta \\ \Rightarrow\ &\dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta \\ \Rightarrow\ &\ddot{r} = -2R\dot{\theta}^2\cos\theta - 2R\ddot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

Οι σχέσεις (4) γίνονται

$$-4mR\dot{\theta}^2\cos\theta - 2mR\ddot{\theta}\sin\theta = -mg\sin\theta - 2kR\cos\theta - N\cos\theta \tag{4.23}$$

$$2mR\ddot{\theta}\cos\theta - 4mR\dot{\theta}^2\sin\theta = mg\cos\theta - N\sin\theta \tag{4.24}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (4) με $\sin\theta$ και την (4) με $\cos\theta$ έχουμε

$$-4mR\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta - 2mR\ddot{\theta}\sin^2\theta = -mg\sin^2\theta - 2kR\cos\theta\sin\theta - N\cos\theta\sin\theta \tag{4.25}$$

$$2mR\ddot{\theta}\cos^2\theta - 4mR\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = mg\cos^2\theta - N\sin\theta\cos\theta \tag{4.26}$$

Αφαιρώντας την (4) από την (4) βρίσκουμε

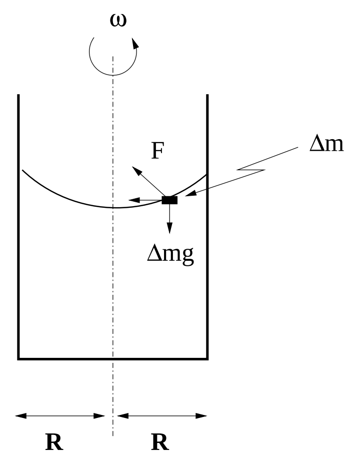
$$\begin{aligned} &2mR\ddot{\theta} = mg + kR\sin 2\theta \\ \Rightarrow\ &\ddot{\theta} = \frac{g}{2R} + \frac{k}{2m}\sin 2\theta \end{aligned}$$

Στο σημείο ισορροπίας έχουμε $\ddot{\theta} = 0$ άρα

$$\sin 2\theta = -\frac{mg}{kR}$$

Πρόβλημα 4.35 Κυλινδρικό δοχείο στρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω. Το δοχείο περιέχει νερό. Να βρεθεί η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στα τοιχώματα του δοχείου. Ποια μορφή παίρνει η επιφάνεια του νερού;

Λύση:



Σχήμα 4.15

Σε μια απειροστά μικρή ποσότητα υγρού μάζας Δm που ισορροπεί στην επιφάνεια του υγρού ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος, $\Delta m g$, προς τα κάτω και η αντίδραση του υπόλοιπου υγρού, $\boldsymbol{F}_{\upsilon\gamma}$, που είναι κάθετη στην επιφάνεια του υγρού. Το άθροισμα αυτών των δυνάμεων θα πρέπει να ισούται με την κεντρομόλο, $\boldsymbol{F}_z = \Delta m \omega^2 r \hat{\boldsymbol{r}}$. Άρα

$$F_{\upsilon\gamma} \cos\alpha = \Delta m g$$

και

$$F_z = F_{\upsilon\gamma} \sin\alpha = \frac{\Delta m g \sin\alpha}{\cos\alpha} = \Delta m g \tan\alpha$$

Αντικαθιστώντας την F_z βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \Delta m \omega^2 r &= \Delta m g \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} &= \frac{\omega^2 r}{g} \\ \Rightarrow z(r) &= \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{σταθ.} \end{aligned}$$

Όταν βρισκόμαστε πάνω στον άξονα έχουμε

$$z(r=0) = \text{σταθ.} = 0$$

Άρα η εξίσωση που περιγράφει την επιφάνεια είναι

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

που είναι μια παραβολή.

Πρόβλημα 4.36 Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη

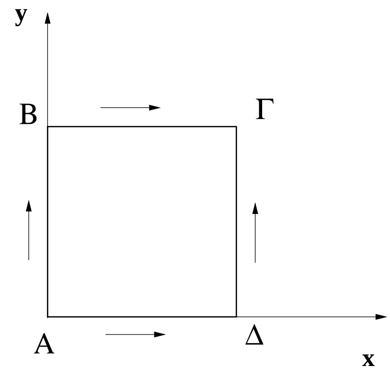
$$\boldsymbol{F} = a(x-y)\hat{\boldsymbol{x}} + a(x+y)\hat{\boldsymbol{y}}$$

όταν ασκείται σε κάποιο σωματίδιο και το μεταφέρει από τη θέση $A = (0,0)$ στη θέση $\Gamma = (1,1)$ ακολουθώντας

(α) τη διαδρομή ΑΒΓ όπου $B = (0,1)$

(β) τη διαδρομή ΑΔΓ όπου $\Delta = (1,0)$.

Εξαρτάται το έργο από τη διαδρομή;



Σχήμα 4.16

Λύση:

Το έργο που παράγεται στη διαδρομή $AB\Gamma$ είναι

$$W_{AB\Gamma} = \int_A^B F_y \mathrm{d}y + \int_B^\Gamma F_x \mathrm{d}x = \int_0^1 ay\mathrm{d}y + \int_0^1 a(x-1)\mathrm{d}x = 0$$

Το έργο που παράγεται στη διαδρομή ΑΔΓ είναι

$$W_{\mathrm{A\Delta\Gamma}} = \int_A^\Delta F_x \mathrm{d}x + \int_\Delta^\Gamma F_y \mathrm{d}y = \int_0^1 ax\mathrm{d}x + \int_0^1 a(1+y)\mathrm{d}y = 2a$$

Άρα

$$W_{AB\Gamma} \neq W_{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$$

Πρόβλημα 4.37

(α) Βρείτε τη δύναμη, $\boldsymbol{F}$, που προσδιορίζεται από το διατηρητικό (συντηρητικό) δυναμικό πεδίο

$$U(x,y,z) = k(y\cos z + x^2\mathrm{e}^{-y})$$

όπου κ είναι μια σταθερά.

(β) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στην περιοχή του δυναμικού πεδίου που ορίστηκε στο σκέλος (α). Στο σωματίδιο ασκείται μια ακόμη δύναμη, $\boldsymbol{f} = a\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}$, όπου a είναι μια θετική σταθερά, $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου και $\boldsymbol{\Omega}$ μια σταθερά διανυσματική ποσότητα. Τη χρονική στιγμή t_A το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $\boldsymbol{r}_A = \hat{\boldsymbol{y}}$ και τη χρονική στιγμή t_B στο σημείο $\boldsymbol{r}_B = 2\hat{\boldsymbol{x}} + (7\pi/5)\hat{\boldsymbol{z}}$. Υπολογίστε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου από το σημείο A στο σημείο B.

Λύση:

(α) Η δύναμη σχετίζεται με το δυναμικό με την εξής σχέση

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(x,y,z)$$

Άρα

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -2kx\mathrm{e}^{-y}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -k\cos z + kx^2\mathrm{e}^{-y}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = ky \sin z$$

Άρα το διάνυσμα της δύναμης είναι

$$\boldsymbol{F} = -2kx\mathrm{e}^{-y}\hat{\boldsymbol{x}} - (k\cos z - kx^2\mathrm{e}^{-y})\hat{\boldsymbol{y}} + ky\sin z\hat{\boldsymbol{z}}$$

(β) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος οφείλεται στη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας από τη θέση $\boldsymbol{r}_A$ στη θέση $\boldsymbol{r}_B$ και στο έργο που παράγεται από τη δύναμη f. Η μεταβολή του έργου λόγω της δύναμης f είναι

$$\mathrm{d}W_f = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

Αλλά $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} = (a\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Άρα η δύναμη $\boldsymbol{f}$ δεν παράγει έργο. Άρα η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι

$$\Delta K = U(\boldsymbol{r}_A) - U(\boldsymbol{r}_B) = \left[k\cos 0 + 0\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[k0\cos\frac{7\pi}{5} + k2^2\mathrm{e}^{-0}\right] = -3k$$

Πρόβλημα 4.38 Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε πεδίο στο οποίο η δυναμική ενέργεια δίνεται από

$$U(r) = -U_0\left[-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]$$

όπου U_0 και r_0 είναι θετικές σταθερές και $r > 0$ είναι η απόσταση του σωματιδίου από ένα ακίνητο κέντρο Ο. Δείξτε ότι η στροφορμή, $\boldsymbol{L}$, του σωματιδίου ως προς το κέντρο Ο παραμένει σταθερή ως προς το χρόνο t.

Λύση:

Από τον ορισμό της η στροφορμή είναι

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$$

Για να είναι σταθερή πρέπει

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{4.27}$$

Επειδή $\boldsymbol{p} = m\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, ο πρώτος όρος της (4) μηδενίζεται. Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(r) = f(r)\boldsymbol{r}$$

άρα και ο δεύτερος όρος της (4) μηδενίζεται, επομένως η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ διατηρείται.

Πρόβλημα 4.39

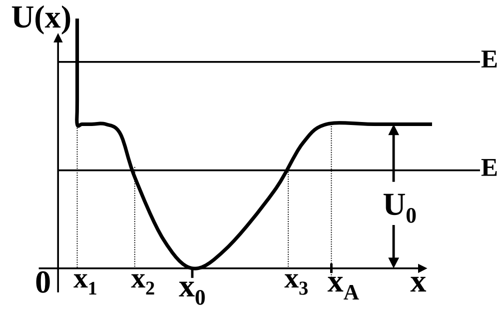
(α) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο δυναμικό πεδίο του σχήματος 4.17. Αρχικά ($t = 0$) βρίσκεται στη θέση x_A με ταχύτητα $-v_A\hat{\boldsymbol{x}}$. Δείξτε ότι μετά πάροδο χρόνου t_π το σωματίδιο θα βρεθεί και πάλι στη θέση x_A με ταχύτητα $v_A\hat{\boldsymbol{x}}$ όπου $v_A > 0$. Επίσης δείξτε ότι

$$t_\pi < 2(x_A - x_E)/v_A$$

όπου το x_E προσδιορίζεται από τη σχέση $U(x_E) = E$, και E είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου.

(β) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου όταν η ολική του ενέργεια, E, είναι πολύ μικρή, $0 < E \ll U_0$, είναι αρμονική περιοδική. Ποια είναι η χωρική περιοχή και ποια η περίοδος της κίνησης;

(γ) Έστω ότι η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι αρκετά μεγάλη αλλά μικρότερη του U_0, $0 \ll E < U_0$. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του σωματιδίου. Δώστε ένα ακριβές κάτω όριο της περιόδου, και ένα πολύ προσεγγιστικό τύπο για το μέγεθος της.



Σχήμα 4.17

Λύση:

(α) Το σωματίδιο κινείται προς τ' αριστερά μέχρι το x_E, ανακλάται και επιστρέφει. Στην προκειμένη περίπτωση το $x_E \equiv x_1$. Στη θέση x_A έχει την αρχική κινητική ενέργεια αλλά θα κινείται με αντίθετη φορά. Η μέγιστη κινητική στη διαδρομή $x_A \to x_E \to x_A$ είναι

$$\frac{1}{2}mv^2(x_0) = U_0 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

και κυμαίνεται

$$\frac{1}{2}mv_A^2 < \frac{1}{2}mv^2 < U_0 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

άρα ο χρόνος που χρειάζεται για τη διαδρομή $x_A \to x_E \to x_A$ είναι

$$t < \frac{2(x_A - x_E)}{v_A}$$

(β) Όταν $E \ll U_0$ το σωματίδιο κινείται κοντά στο x_0. Αν αναπτύξουμε το δυναμικό σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο x_0 και πάρουμε μόνο τους τρεις πρώτους όρους, έχουμε

$$U = U(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2$$

Αλλά

$$U(x_0) = 0 \qquad \text{και} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$$

Άρα

$$U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \qquad \text{όπου} \qquad k = \left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}$$

που είναι το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή, άρα το σώμα θα εκτελεί ταλάντωση γύρω από το σημείο x_0. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{όπου} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\left(\frac{U''(x_0)}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ο χώρος κίνησης του σωματιδίου είναι

$$-x_E < x < x_E$$

Η συνολική του ενέργεια είναι

$$E = \frac{1}{2}U''(x_0)x_E^2$$
$$\Rightarrow x_E = \sqrt{\frac{2E}{U''(x_0)}}$$

(γ) Όταν $0 \ll E < U_0$ η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ταχύτητα είναι $\sqrt{(2E)/m}$ άρα η ταχύτητα του σώματος θα είναι

$$0 < v < \sqrt{(2E)/m}$$

και η περίοδος για την κίνηση μεταξύ των σημείων x_2 και x_3 είναι

$$T > \frac{2(x_3 - x_2)}{\sqrt{2E/m}}$$

Πρόβλημα 4.40 Εξετάστε κατά πόσο το έργο του πεδίου που παράγει τη δύναμη

$$\boldsymbol{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (2xyz^3)\hat{\boldsymbol{y}} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

που ασκείται σε κάποιο σωματίδιο από μια θέση Α ως μια Β θα εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία Α και Β;

Λύση:

Για να μην εξαρτάται το έργο που θα παραχθεί από τη καμπύλη που θα ακολουθηθεί κατά τη μετατόπιση πρέπει το πεδίο της δύναμης να είναι διατηρητικό. Για να είναι το πεδίο διατηρητικό πρέπει ο στροβιλισμός της δύναμης να ισούται με μηδέν. Άρα

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2z^3 - 6xz^2) & (2xyz^3) & (3xy^2z^2 - 6x^2z) \end{vmatrix} \\
&= (6xyz^2 - 6xyz^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz)\hat{\boldsymbol{y}} + (2yz^3 - 2yz^3)\hat{\boldsymbol{z}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Άρα το πεδίο είναι διατηρητικό.

Πρόβλημα 4.41 Θεωρήστε δύο σημεία a και b στο χώρο των τριών διαστάσεων με συντεταγμένες (r_{1a}, r_{2a}, r_{3a}) και (r_{1b}, r_{2b}, r_{3c}) αντίστοιχα. Η παραμετρική μορφή μιας οποιασδήποτε καμπύλης μεταξύ των σημείων a και b μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
r_1(t) &= u_1(t) + s_1 v_1(t) \\
r_2(t) &= u_2(t) + s_2 v_2(t) \\
r_3(t) &= u_3(t) + s_3 v_3(t)
\end{aligned}$$

ή

$$r_i(t) = u_i(t) + s_i v_i(t), \quad \text{για } i = 1, 2, 3$$

όπου s_i είναι σταθερές παράμετροι, $u_i(t_a) = r_{ia}$ και $u_i(t_b) = r_{ib}$, t_a και t_b είναι οι τιμές του t στα σημεία a και b αντίστοιχα. Τα $v_i(t)$ είναι τυχαίες συναρτήσεις που μηδενίζονται στα σημεία a και b. Με αυτή την παραμετρική μορφή των καμπυλών μπορούμε να ορίσουμε το έργο μιας δύναμης $\boldsymbol{F}$ από το σημείο a στο σημείο b

$$W(s_1, s_2, s_3) = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \int_a^b F_i \mathrm{d}r_i \tag{4.28}$$

Να δείξετε ότι η παράγωγος του έργου ως προς τις παραμέτρους s_i θα είναι

$$\frac{\partial W}{\partial s_j} = \int_a^b \upsilon_j(t) \Big[\boldsymbol{r'} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})\Big]_j \, \mathrm{d}t \tag{4.29}$$

όπου $\boldsymbol{r'} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$. Η σχέση (4.41) οδηγεί στο συμπέρασμα που αναφέρει ότι αν το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής (διατηρητική δύναμη), δηλαδή $\partial W/\partial s_j = 0$, τότε το $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$.

Λύση:

Από τη σχέση (4.41), το έργο είναι

$$W(s_1, s_2, s_3) = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \int_a^b F_i \mathrm{d}r_i = \sum_{i=1}^{3} \int_a^b F_i r_i'(t) \, \mathrm{d}t$$

όπου $r_i'(t) = \mathrm{d}r_i(t)/\mathrm{d}t$. Η παράγωγος του έργου $W(s_1, s_2, s_3)$ θα είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial s_j} &= \sum_{i=1}^{3} \int_a^b \left[F_i \overbrace{\frac{\partial r_i'}{\partial s_j}}^{\frac{\partial}{\partial s_j}\left(u_i' + s_i v_i'\right)} + \frac{\partial F_i}{\partial s_j} r_i' \right] \mathrm{d}t \\
\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial s_j} &= \sum_{i=1}^{3} \int_a^b \left[F_i v_i' \delta_{ij} + r_i' \upsilon_j \frac{\partial F_i}{\partial r_j} \right] \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{4.30}$$

όπου

$$\frac{\partial F}{\partial s_j} = \frac{\partial F}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial s_j} = \frac{\partial F}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial s_j}(u_j + s_j \upsilon_j) = \frac{\partial F}{\partial r_j}\upsilon_j$$

και δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker, που ισούται με

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j, \\ \\ 0 & \text{για } i \neq j. \end{cases}$$

Αν παραγωγίσουμε κατά παράγοντες τον πρώτο όρο του ολοκληρώματος (4) θα έχουμε

$$\int_a^b F_i v_i' \, \mathrm{d}t = \underbrace{\cancelto{0}{F_i \upsilon_i \Big|_a^b}}_{F_i(t_a)\cancelto{0}{\upsilon_i(t_a)} - F_i(t_b)\cancelto{0}{\upsilon_i(t_b)}} - \int_a^b \upsilon_i \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t \tag{4.31}$$

καθότι η συνάρτηση $\upsilon_i(t)$ μηδενίζεται στα σημεία a και b. Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στη σχέση (4) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_j} &= \sum_{i=1}^{3} \int_a^b \left[-\upsilon_i \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t} \delta_{ij} + r_i' \upsilon_j \frac{\partial F_i}{\partial r_j} \right] \mathrm{d}t = \int_a^b \left[-\sum_{i=1}^{3} \upsilon_i \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t} \delta_{ij} + \sum_{i=1}^{3} r_i' \upsilon_j \frac{\partial F_i}{\partial r_j} \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[-\upsilon_j \frac{\mathrm{d}F_j}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{3} r_i' \upsilon_j \frac{\partial F_i}{\partial r_j} \right] \mathrm{d}t = \int_a^b \left[-\upsilon_j \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial r_j} r_i' + \sum_{i=1}^{3} r_i' \upsilon_j \frac{\partial F_i}{\partial r_j} \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \upsilon_j \underbrace{\sum_{i=1}^{3} r_i' \left[\frac{\partial F_i}{\partial r_j} - \frac{\partial F_j}{\partial r_i} \right]}_{\left[\boldsymbol{r'} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})\right]_j} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \upsilon_j \left[\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \right]_j \mathrm{d}t$$

Το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής αν και μόνο αν το $\partial W/\partial s_j = 0$ για όλες τις τιμές του s_j και για κάθε συνάρτηση $\upsilon_j(t)$ η οποία μηδενίζεται στα σημεία a και b. Από τη σχέση (4.41) συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ μηδενίζεται παντού. Αποδείξαμε δηλαδή ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε μια διατηρητική δύναμη είναι να ισχύει $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$. ‡

Πρόβλημα 4.42 Μια μικρή μπάλα μάζας M βρίσκεται σε ηρεμία στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου δοκαριού ύψους h. Ένα βλήμα μάζας m κινείται με ταχύτητα v_0 και διαπερνά οριζόντια τη μπάλα διαμέσου του κέντρου της (βλ. σχήμα 4.18). Η μπάλα πέφτει στο οριζόντιο δάπεδο σε ένα σημείο το οποίο απέχει μια απόσταση s από το κατακόρυφο δοκάρι. Σε πόση απόσταση από το δοκάρι θα φτάσει το βλήμα όταν κτυπήσει το δάπεδο; Τι μέρος της κινητικής ενέργειας του βλήματος μετατράπηκε σε θερμότητα όταν το βλήμα διαπέρασε τη μπάλα; Να αγνοήσετε την αντίσταση του αέρα.

Λύση:

Από τη διατήρηση της ορμής θα έχουμε

$$mv_0 = mv + MV \tag{4.32}$$

όπου v και V είναι οι ταχύτητες του βλήματος μάζας m και της μπάλας μάζας M μετά τη διάτρηση. Από τη σχέση (4) έπεται

$$v = v_0 - \frac{M}{m} V \tag{4.33}$$

Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι $v > V$. Μετά την κρούση, το βλήμα και η μπάλα ακολουθούν βολές και επομένως θα ισχύουν

$$s = Vt \qquad \text{και} \qquad d = vt \tag{4.34}$$

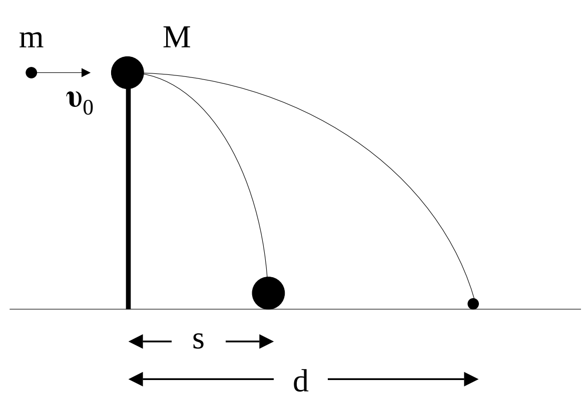
όπου ο χρόνος βολής είναι $t = \sqrt{2h/g}$ και είναι ο ίδιος για τα δύο σώματα. Επομένως με αντικατάσταση του χρόνου βολής στις σχέσεις (4) θα έχουμε

$$V = s\sqrt{\frac{g}{2h}} \qquad \text{και} \qquad v = v_0 - \frac{M}{m} s \sqrt{\frac{g}{2h}} \tag{4.35}$$

όπου για το βλήμα έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση (4). Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος θα οφείλεται μόνο στο βλήμα

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

‡ Το αποτέλεσμα αυτής της άσκησης μπορεί να επεκταθεί σε χώρους περισσοτέρων διαστάσεων με την προϋπόθεση ότι ορίζεται ο στροβιλισμός της δύναμης, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$, με κάποιο τρόπο.



Σχήμα 4.18

και μετά από την κρούση η ολική κινητική ενέργεια θα είναι

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} + MV^2$$

και επομένως η διαφορά αυτών των ενεργειών μετατρέπεται σε θερμότητα

$$\Delta E = E_0 - E$$

Άρα το ποσοστό της ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα θα είναι

$$\rho = \frac{\Delta E}{E_0} = 1 - \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{mv_0^2}{mv^2 + MV^2} = \frac{M}{m}\frac{s^2}{v_0^2}\frac{g}{2h}\left(2\frac{v_0}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{m+M}{m}\right)$$

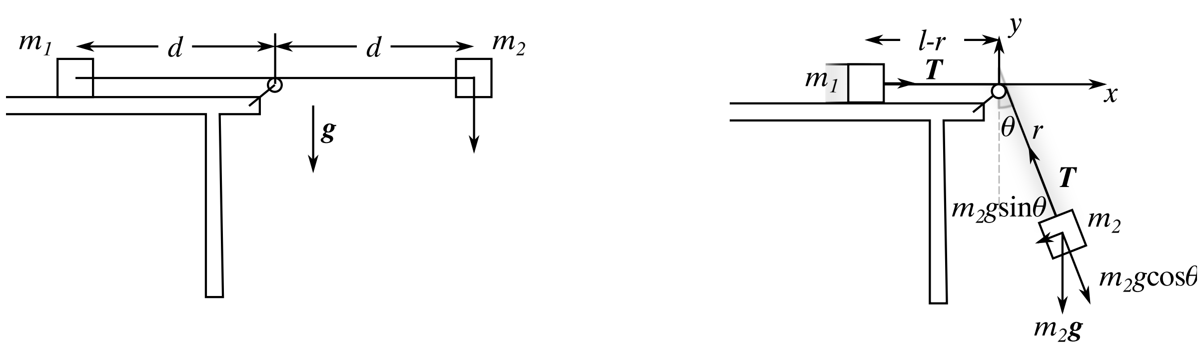
όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις σχέσεις (4).

Πρόβλημα 4.43

Δύο μάζες m_1, m_2 είναι προσδεμένες με ένα αβαρές μη εκτατό σχοινί μήκους $l = 2d$, όπου την αρχική χρονική στιγμή βρίσκονται στην οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα m_1 κινείται πάνω στην οριζόντια επιφάνεια του τραπεζιού, ενώ το σώμα m_2 θα κινηθεί προς τα κάτω λόγω της βαρύτητας. Να δείξετε ότι την τυχαία χρονική στιγμή t οι εξισώσεις κίνησης της μάζας m_2 θα περιγράφονται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\ddot{r} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right), \qquad \ddot{\theta} = -\frac{1}{r}\left(2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta\right)$$

$$\text{όπου} \quad \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}, \quad \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$



Σχήμα 4.19

Λύση:

Για το σώμα m_1, η τάση του νήματος, T, θέτει σε κίνηση το σώμα κατά τον άξονα x, επομένως

$$T = -m_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(l-r) = m_1\ddot{r}, \quad \text{όπου } \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \tag{4.1}$$

Για το σώμα m_2, η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες κατά μήκος της ακτινικής κατεύθυνσης r είναι

$$a = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

και επομένως, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα μας δώσει

$$F_{\text{ολ}} = m_2\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow m_2 g\cos\theta - T = m_2\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \tag{4.2}$$

αφού η δύναμη κατά τη διεύθυνση r είναι $F_{\text{ολ}} = m_2 g\cos\theta - T$. Απαλείφοντας την τάση T ανάμεσα στις εξισώσεις (4) και (4), έπεται

$$m_2 g\cos\theta + m_1\ddot{r} = m_2\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow \ddot{r} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right)$$

Για την εξάρτηση της γωνίας θ ως προς το χρόνο, θα θεωρήσουμε τη ροπή, τ, της δύναμης $m_2 g\sin\theta$ ως προς το σημείο Ο (κέντρο της τροχαλίας)

$$\tau = -m_2 g r\sin\theta \tag{4.3}$$

η οποία ευθύνεται για την αλλαγή της στροφορμής $L = mr^2\dot{\theta}$ της μάζας m_2, δηλαδή

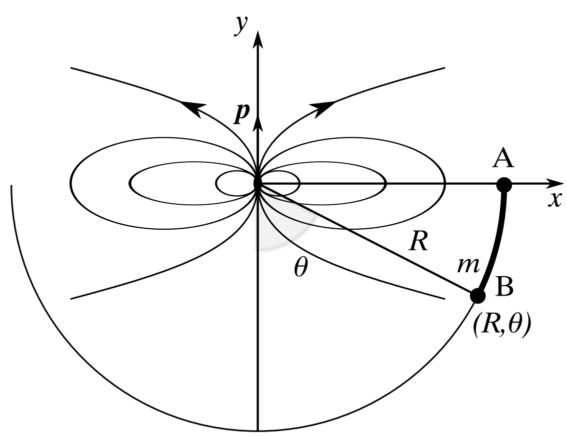
$$\tau = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2 r^2\dot{\theta}\right) \tag{4.4}$$

Από τις σχέσεις (4) και (4) θα λάβουμε

$$-m_2 g r\sin\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2 r^2\dot{\theta}\right) = m_2\left(2r\dot{\theta}\dot{r} + r^2\ddot{\theta}\right) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{1}{r}\left(2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta\right)$$

Πρόβλημα 4.44

Θεωρήστε ένα σημειακό ηλεκτρικό δίπολο $\boldsymbol{p}$, το οποίο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, προσανατολισμένο προς το θετικό άξονα y. Το πεδίο θα έχει τη μορφή του σχήματος 4.20.



Σχήμα 4.20: *Το ηλεκτρικό πεδίο ενός διπόλου. Η μαύρη γραμμή παριστάνει την τροχιά του φορτισμένου σωματιδίου q μάζας m.*

Τοποθετούμε τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου q σε ηρεμία στο σημείο Α του άξονα x, το οποίο απέχει απόσταση R από την αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι το σωματίδιο θα ακολουθήσει κυκλική τροχιά ακτίνας R. Αγνοήστε τη βαρύτητα. Για την επίλυση του προβλήματος, θεωρήστε πολικές συντεταγμένες (r, θ), με θ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ηλεκτρικό δυναμικό $V(r, \theta)$ και ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}(r, \theta)$ ενός διπόλου δίνονται από τις σχέσεις

$$V(r,\theta) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$
$$\boldsymbol{E}(r,\theta) = -\frac{1}{r\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Λύση:

Αν θεωρήσουμε το σωματίδιο στην τυχαία θέση Β, η οποία καθορίζεται από τις πολικές συντεταγμένες (R, θ), η διατήρηση της ενέργειας για τις δύο θέσεις Α$(R, \pi/2)$ και Β(R, θ) θα μας δώσει

$$E_{\text{A}} = E_{\text{B}} \Rightarrow qV(\rho, \pi/2) = qV(R,\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = qV(R,\pi/2) - V(R,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pq\cos\theta}{R^2} \tag{4.5}$$

Η δύναμη κατά μήκος της ακτινικής συνιστώσας δίνεται από την κεντρομόλο επιτάχυνση

$$F_r = ma_c = -m\frac{v^2}{R} \overset{(4)}{=} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pq\cos\theta}{R^3}$$

Επομένως, το σωματίδιο θα ακολουθήσει κυκλική τροχιά ακτίνας R. Αυτή η κίνηση είναι πανομοιότυπη της κίνησης ενός εκκρεμούς μήκους R, το οποίο αφήνεται από την ηρεμία του σε γωνία 90° από τον κατακόρυφο άξονα. Αυτό οφείλεται στο γεονός ότι η δυναμική ενέργεια ενός εκκρεμούς είναι η ίδια με αυτή ενός διπόλου σε σταθερή απόσταση R.

Πρόβλημα 4.45 Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της διατηρητικής δύναμησ:

$$F(x) = -kx + \frac{k}{a}x^2,$$

όπου k και a είναι θετικές σταθερές.
(α) Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και να καθοριστούν οι θέσεις ισορροπίας του υλικού σημείου.
(β) Αν το υλικό σημείο ξεκινά από τη θέση $x = -a$ χωρίς αρχική ταχύτητα, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία περνά από τη θέση όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη.

Λύση:

(α)

Η δυναμική ενέργεια είναι

$$V(x) = -\int_0^x F(x)dx = -\int_0^x \left(-kx + \frac{k}{a}x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow V(x) = k\frac{x^2}{2} - \frac{k}{3a}x^3$$

Οι θέσεις ισορροπίας αντιστοιχούν στα τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας. Άρα

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow kx - \frac{k}{a}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow kx\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0$$

Άρα οι θέσεις ισορροπίας είναι τα σημεία $x = 0$ και $x = a$.

(β)

Η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη στη θέση $x = a$. Πράγματι:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k - \frac{2k}{a}x.$$

Και για $x = a$:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k - \frac{2k}{a}a = -k < 0$$

Η ζητούμενη ταχύτητα υπολογίζεται εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων $x = -a$ και $x = a$:

$$V(-a) + K(-a) = V(a) + K(a)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}a^2 + \frac{k}{3a}a^3 + 0 = \frac{k}{2}a^2 - \frac{k}{3a}a^3 + \frac{1}{2}mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = \frac{2k}{3}a^2 \qquad \Rightarrow u = 2a\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

5

Διατήρηση της Ορμής και της Στροφορμής

Πρόβλημα 5.1 Δυο σωματίδια με ίσες μάζες συγκρούονται ελαστικά (η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων διατηρείται). Δείξτε ότι αν αρχικά το ένα είχε ταχύτητα μηδέν, τότε μετά την κρούση αν και τα δύο σώματα κινούνται, οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων σχηματίζουν γωνία 90^o .

Λύση:

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε :

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{v}_1 + 0 &= m\boldsymbol{v}_1' + m\boldsymbol{v}_2' \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2' \end{aligned} \tag{5.1}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2 &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2'^2 \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1^2 &= \boldsymbol{v}_1'^2 + \boldsymbol{v}_2'^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Από τη σχέση (5) έχουμε

$$\boldsymbol{v}_1^2 = (\boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2') \cdot (\boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2') = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\boldsymbol{v}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2'$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5) συμπεραίνουμε ότι

$$\boldsymbol{v}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2' = 0$$

Άρα οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων μετά την κρούση είναι κάθετες, $\boldsymbol{v}_1' \perp \boldsymbol{v}_2'$.

Πρόβλημα 5.2 Ένα βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται σε δύο κομμάτια. Το ένα κομμάτι έχει διπλάσια μάζα από το άλλο. Το κομμάτι με τη μεγαλύτερη μάζα ακριβώς μετά την έκρηξη έχει κινητική ενέργεια K. Δείξτε ότι η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη (δηλ. η ολική κινητική ενέργεια των δύο κομματιών ακριβώς μετά την έκρηξη) ισούται ακριβώς με $3K$.

Λύση:

Έστω ότι μετά την έκρηξη το μικρότερο κομμάτι (m) έχει ταχύτητα v_1 ενώ το μεγαλύτερο ($2m$) έχει ταχύτητα v_2. Από τη στιγμή που δεν υπήρχε ορμή πριν από την έκρηξη, οι τελικές ορμές των δύο κομματιών θα πρέπει να έχουν άθροισμα μηδέν (δηλαδή να είναι αντίρροπες). Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει

$$P_{\text{ολ}} = mv_1 - 2mv_2 \quad \Rightarrow mv_1 = 2mv_2 \quad \Rightarrow v_1 = 2v_2.$$

Η κινητική ενέργεια του μεγάλου κομματιού είναι

$$K = \frac{1}{2}(2m)\upsilon_2^2$$

Άρα η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη είναι

$$K_{\text{ολ}} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m(2\upsilon_2)^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 = 2\frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 = 2K + K = 3K$$

Πρόβλημα 5.3 Να δείξετε ότι αν μια δύναμη που δρα σε υλικό σημείο είναι της μορφής $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, δηλαδή κεντρική δύναμη, τότε το υλικό σημείο διαγράφει επίπεδη κίνηση, δηλαδή η κίνησή του περιορίζεται σ'ένα επίπεδο.

Λύση:

Έχουμε για τη ροπή $\boldsymbol{\tau}$ της κεντρικής δύναμης περί την αρχή των αξόνων που υποθέτουμε ότι είναι το κέντρο της δύναμης

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times (F(r)\hat{r}) = F(r)\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{r}} = 0$$

αφού $\boldsymbol{r}$ και $\hat{\boldsymbol{r}}$ παράλληλα εξ' ορισμού ($\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$). Έχουμε λοιπόν από το θεώρημα της μεταβολής της στροφορμής περί την αρχή των αξόνων

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_0}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{άρα} \quad \boldsymbol{L}_0 = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \text{ σταθερό}$$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά επί $\boldsymbol{r}$ οπότε

$$m\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L}_0)$$

και χρησιμοποιόντας την ιδιότητα του τριπλού γινομένου

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

οπότε

$$m\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L}_0 = 0$$

Επομένως τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{L}_0$ είναι κάθετα μεταξύ τους καθόλη τη διάρκεια της κίνησης. Το ίδιο ισχύει για το $\boldsymbol{v}$, δηλαδή με τον ίδιο τρόπο δείχνει κανείς ότι $\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{L}_0$ είναι κάθετα. Αν διαλέξουμε τον άξονα Oz (για παράδειγμα) κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{L}_0$ που είναι σταθερό διάνυσμα, έχουμε

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L}_0 = L_0\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = L_0 z = 0$$

όπου $\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$ είναι η προβολή του $\boldsymbol{r}$ στον άξονα Oz άρα είναι z αφού το τυχαίο διάνυσμα θέσης έχει τη μορφή $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$. Δηλαδή $z = 0$ για κάθε τιμή του χρόνου. Αυτή όμως είναι η εξίσωση επιπέδου κάθετου στον άξονα Oz που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή παρόλο που οι άλλες συντεταγμένες του κινητού μπορούν να αλλάζουν με το χρόνο, η z δεν αλλάζει και το κινητό είναι σε ένα επίπεδο που φυσικά εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα του κινητού ή αλλιώς από το $\boldsymbol{L}_0$.

Πρόβλημα 5.4 Σωματίδιο κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων με κέντρο O. Στο σχήμα 5.1 παριστάνεται τμήμα της τροχιάς του σωματιδίου. Αν θεωρηθούν τα $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1$ και ϕ γνωστά, να υπολογιστεί το μέτρο της $\boldsymbol{v}_2$ στη θέση Β.

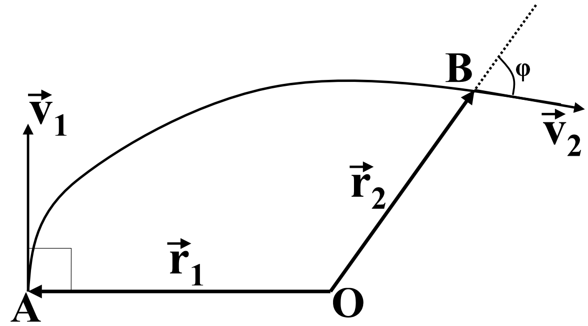
Λύση:

Η στροφορμή $\boldsymbol{L}_A$ στο σημείο Α είναι

$$\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{r}_1 \times m\boldsymbol{v}_1 = -mr_1 v_1 \hat{\boldsymbol{z}}$$

εφ' όσον $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{v}_1$. Η στροφορμή $\boldsymbol{L}_B$ στο σημείο Β είναι

$$\boldsymbol{L}_B = \boldsymbol{r}_2 \times m\boldsymbol{v}_2 = -mr_2 v_2 \sin\phi \hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 5.1

Η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι κεντρική και συνεπώς η στροφορμή διατηρείται

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_A &= \boldsymbol{L}_B \\ \Rightarrow m r_1 v_1 &= m r_2 v_2 \sin\phi \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{r_1 v_1}{r_2 \sin\phi} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 5.5 Χορεύτρια στον πάγο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Τι θα συμβεί εάν ξαφνικά η χορεύτρια, καθώς περιστρέφεται, εκτείνει τα χέρια της; Συγκεκριμένα δείξτε ότι η γωνιακή της ταχύτητα θα μεταβληθεί. Εκφράστε το λόγο της αρχικής προς την τελική γωνιακή ταχύτητα ως συνάρτηση των ροπών αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής θα ελαττώνεται. Πού καταναλώθηκε ενέργεια;

Λύση:

Κατά την περιστροφή δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές με αποτέλεσμα η στροφορμή της χορεύτριας να διατηρείται. Επομένως

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2}$$

Αλλά $I_1 < I_2$ επομένως $\omega_1 > \omega_2$. Επίσης η αρχική ενέργεια E_1 θα είναι

$$E_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

ενώ η τελική ενέργεια E_2, καθώς περιστρέφεται η χορεύτρια, εκτείνει τα χέρια της θα είναι

$$E_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{I_1\omega_1}{I_2}\right)^2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{I_1^2\omega_1^2}{I_2^2} = \frac{1}{2}\frac{I_1^2\omega_1^2}{I_2} = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 \frac{I_1}{I_2} = E_1 \frac{I_1}{I_2}$$

Επειδή $I_1 < I_2$ έχουμε ότι $E_1 > E_2$. Άρα η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά την έκταση των χεριών της χορεύτριας. Η ενέργεια καταναλώθηκε για την απομάκρυνση των χεριών της χορεύτριας από το σώμα της.

Πρόβλημα 5.6 Για ένα σύστημα με n-σωματίδια μάζας $m_1, m_2, \ldots, m_n$ και διανύσματα θέσης $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$. Να αποδείξετε ότι για το κέντρο μάζας, R, ισχύει

$$M^2 R^2 = M \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i m_j \boldsymbol{r}_{ij}^2$$

όπου $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ και $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ είναι η ολική μάζα του συστήματος.

Λύση:

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας, $\boldsymbol{R}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \\ \Rightarrow M\boldsymbol{R} &= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i\end{aligned}$$

όπου ο δείκτης του αθροίσματος τρέχει από το $i = 1$ ως $i = n$. Υψώνοντας στο τετράγωνο την παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$M^2\boldsymbol{R}^2 = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j = \sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j \tag{5.3}$$

Ο όρος $\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j$ μπορεί να βρεθεί υψώνοντας στο τετράγωνο τη σχετική θέση των ζευγών των θέσεων

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{ij} &= \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \\ \Rightarrow \boldsymbol{r}_{ij}^2 &= \boldsymbol{r}_i^2 + \boldsymbol{r}_j^2 - 2\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j \\ \Rightarrow \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j &= \frac{\boldsymbol{r}_i^2 + \boldsymbol{r}_j^2 - \boldsymbol{r}_{ij}^2}{2}\end{aligned} \tag{5.4}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5) και (5) θα έχουμε

$$\begin{aligned}M^2R^2 &= \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_i m_j (\boldsymbol{r}_i^2 + \boldsymbol{r}_j^2 - \boldsymbol{r}_{ij}^2) \\ \Rightarrow M^2R^2 &= \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_j^2 - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_{ij}^2\end{aligned} \tag{5.5}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_i^2 = \sum_j m_j \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i^2 = M \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i^2$$

και

$$\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_j^2 = \sum_i m_i \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j^2 = M \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j^2$$

Άρα η εξίσωση (5) θα έχει

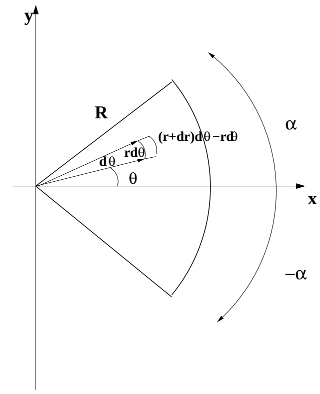
$$\begin{aligned}M^2R^2 &= \frac{1}{2}M\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i^2 + \frac{1}{2}M\sum_j m_j \boldsymbol{r}_j^2 - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_{ij}^2 \\ &= M\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_{ij}^2 \\ &= M\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_i m_j \boldsymbol{r}_{ij}^2\end{aligned}$$

Πρόβλημα 5.7 Βρείτε το κέντρο μάζας (ΚΜ) ενός ομογενούς κυκλικού δακτυλίου ακτίνας R και γωνίας 2α. Θεωρήστε ότι ο δακτύλιος αυτός έχει επιφανειακή πυκνότητα $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}S$ σταθερή.

Λύση:

Για ένα συνεχές σύστημα το κέντρο μάζας του συστήματος είναι

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$



Σχήμα 5.2

Για μια επιφανειακή πυκνότητα μάζας η πυκνότητα είναι

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} \Rightarrow \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}S$$

όπου το $\mathrm{d}S$ είναι η στοιχειώδης επιφάνεια πάνω στην επιφάνεια όπου γίνεται η ολοκλήρωση. Αν θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες, το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης στοιχειώδους επιφάνειας θα είναι

$$\mathrm{d}S = (r\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}r) = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

όπου θεωρούμε ότι η στοιχειώδης αυτή επιφάνεια (στο όριο $\mathrm{d}r \to 0, \mathrm{d}\theta \to 0$) είναι ένα τετράγωνο με πλευρές $\mathrm{d}r$ και $r\mathrm{d}\theta$ (μήκος τόξου που δημιουργείται από κύκλο ακτίνας r και γωνία του τόξου $\mathrm{d}\theta$).
Με τη βοήθεια της επιφανειακής πυκνότητας, το κέντρο μάζας θα γραφτεί

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\rho \int \boldsymbol{r}\mathrm{d}S}{\rho \int \mathrm{d}S} = \frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}S} = \frac{\int x\mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}S}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\int y\mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}S}\hat{\boldsymbol{y}}$$

όπου $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$. Οι δύο καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου μάζας θα είναι

$$X_{\text{KM}} = \frac{\int x\mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}S} \qquad \text{και} \qquad Y_{\text{KM}} = \frac{\int y\mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}S}$$

Σε πολικές συντεταγμένες το $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$\int x\mathrm{d}S = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^R r\cos\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r = \frac{2}{3}R^3\sin\alpha$$

$$\int y\mathrm{d}S = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^R r\sin\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r = -\cos\theta\Big|_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{3}R^3 = 0$$

$$\int \mathrm{d}S = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^R r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r = R^2\alpha$$

Άρα οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου μάζας θα είναι

$$X_{\text{KM}} = \frac{\int x\mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}S} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

και

$$Y_{\text{KM}} = \frac{\int y\mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}S} = 0$$

συνεπώς σε διανυσματική μορφή το κέντρο μάζας είναι

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = X_{\text{KM}}\hat{\boldsymbol{x}} + Y_{\text{KM}}\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Πρόβλημα 5.8 Η γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος L αυξάνεται από την τιμή λ_0 στο ένα άκρο της $(x = 0)$ σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της $x = L$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

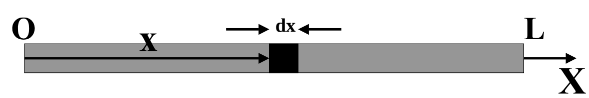
(α) Να δείξετε ότι η μάζα της ράβδου είναι

$$M = \frac{3}{2}\lambda_0 L$$

(β) Να δείξετε ότι το κέντρο μάζας της ράβδου απέχει από το ελαφρύ άκρο της απόσταση

$$R_{\text{KM}} = \frac{5}{9}L$$

Λύση:



Σχήμα 5.3

(α) Θεωρούμε ένα στοιχειώδες μήκος $\mathrm{d}x$ πάνω στο άξονα των x, τότε η μάζα που αντιστοιχεί σε αυτό το μήκος είναι

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow M = \int \mathrm{d}m = \int_0^L \lambda \mathrm{d}x = \lambda_0 \int_0^L \left(1 + \frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\lambda_0 L$$

(β) Το κέντρο μάζας της ράβδου είναι

$$R_{\text{KM}} = \frac{\int x \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{x\lambda \mathrm{d}m}{M} = \frac{\lambda_0}{M}\int_0^L x\left(1 + \frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

όπου η ολική μάζα της ράβδου είναι $M = (3/2)\lambda_0 L$. Συνεπώς το κέντρο μάζας είναι

$$R_{\text{KM}} = \frac{\lambda_0}{\frac{3}{2}\lambda_0 L}\left(\int_0^L x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\int_0^L x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{5}{9}L$$

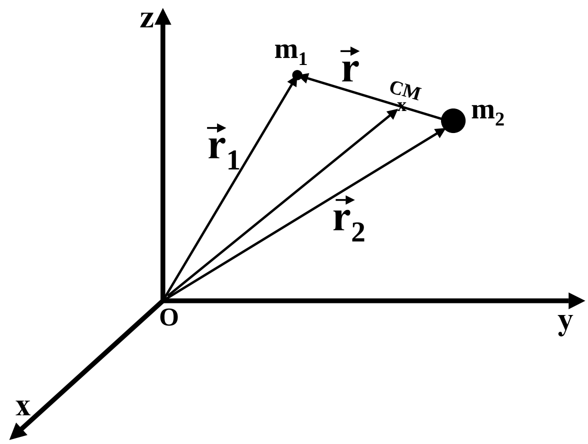
Πρόβλημα 5.9 Δυο σωματίδια με μάζες m_1, m_2 κινούνται στο χώρο χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Εκφράστε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο αυτών σωματιδίων σε μεταβλητές του κέντρου μάζας. Ειδικότερα, να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2}m_r\boldsymbol{v}^2$$

όπου $\boldsymbol{v}_{\text{KM}} = \mathrm{d}\boldsymbol{R}_{\text{KM}}/\mathrm{d}t$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\boldsymbol{R}_{\text{KM}}$, $\boldsymbol{v}$ είναι η σχετική ταχύτητα του δευτέρου σωματιδίου ως προς τον πρώτο σωματίδιο, και m_r είναι η ονομαζόμενη ανηγμένη μάζα του συστήματος

$$m_r \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{ή} \qquad \frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Λύση:



Σχήμα 5.4

Αν $\boldsymbol{r}$ είναι το διάνυσμα που ενώνει τα δύο σωματίδια, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα ισχύει

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

και το κέντρο μάζας του συστήματος $\left[\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)/(m_1 + m_2)\right]$ θα δώσει

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{R}_{\text{KM}} &= m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) \\ &= M\boldsymbol{r}_1 - m_2\boldsymbol{r} \\ \Rightarrow \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

όπου $M = m_1 + m_2$ είναι η ολική μάζα του συστήματος. Η ταχύτητα του σωματιδίου, $\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1/\mathrm{d}t$ θα είναι

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{v}$$

όπου $\boldsymbol{v}_{\text{KM}}$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας, και $\boldsymbol{v}$ είναι η σχετική ταχύτητα του συστήματος των δύο σωματιδίων. Όμοια για τη θέση $\boldsymbol{r}_2$ έχουμε

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \left(\frac{m_2}{M} - 1\right)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_{\text{KM}} - \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου, $\boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2/\mathrm{d}t$ θα είναι

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{v}_2 &= \dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} - \frac{m_1}{M}\dot{\boldsymbol{r}} \\ \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}_{\text{KM}} - \frac{m_1}{M}\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Η ολική κινητική ενέργεια, K, θα είναι

$$K = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\boldsymbol{v}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\boldsymbol{v}_{\text{KM}} - \frac{m_1}{M}\boldsymbol{v}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}m_1\left[v_{\text{KM}}^2 + \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 v^2 + 2\frac{m_2}{M}\boldsymbol{V}_{\text{KM}}\cdot\boldsymbol{v}\right] + \frac{1}{2}m_2\left[v_{\text{KM}}^2 + \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 v^2 - 2\frac{m_1}{M}\boldsymbol{V}_{\text{KM}}\cdot\boldsymbol{v}\right] \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2}v^2 \\
&= \frac{1}{2}Mv_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}v^2 \\
&= \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2}m_r\boldsymbol{v}^2
\end{aligned}
$$

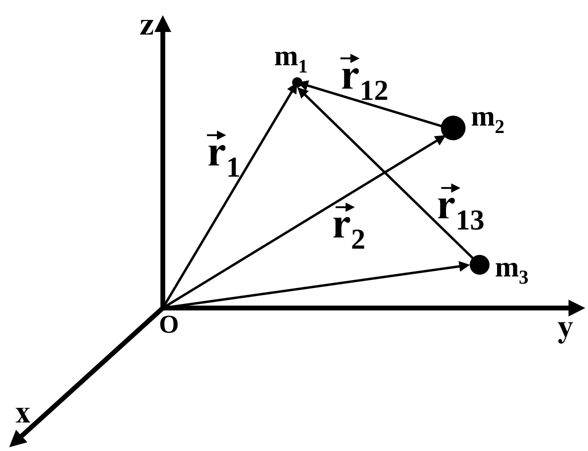
όπου $m_r = m_1 m_2/(m_1+m_2)$.

Πρόβλημα 5.10 Έστω ένα σύστημα τριών σωματιδίων μάζας m_1, m_2, m_3 με διανύσματα θέσης $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ αντιστοίχως. Να γράψετε την κινητική ενέργεια σαν άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας και της κινητικής ενέργειας της σχετικής κινήσεως περί το κέντρο μάζας, χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_{13} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3$. Ειδικότερα η κινητική ενέργεια είναι

$$
K = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{M}(M-m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{M}(M-m_3)\dot{\boldsymbol{r}}_{13} - \frac{m_2 m_3}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_{13}
$$

όπου η ολική μάζα $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Λύση:



Σχήμα 5.5

Από τις σχέσεις $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{12}$ και $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{13}$, μπορούμε να εκφράσουμε το κέντρο μάζας, $\boldsymbol{r}_{\text{KM}}$, του συστήματος των τριών σωματιδίων ως εξής

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{\text{KM}} &= \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1+m_2+m_3} \\
\Rightarrow M\boldsymbol{R}_{\text{KM}} &= m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{12}) + m_3(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{13}) \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}_{12} + \frac{m_3}{M}\boldsymbol{r}_{13} \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Ομοίως για το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_2$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{12} &= \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}_{12} + \frac{m_3}{M}\boldsymbol{r}_{13} - \boldsymbol{r}_{12} \\
\overset{(5)}{\Longrightarrow} \boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \frac{(m_2 - M)}{M}\boldsymbol{r}_{12} + \frac{m_3}{M}\boldsymbol{r}_{13}
\end{aligned}
$$

Ομοίως για το $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{13}$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{R}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}_{12} + \frac{(m_3 - M)}{M}\boldsymbol{r}_{13}$$

Η κινητική ενέργεια, K, του συστήματος των τριών σωματιδίων θα είναι

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_1^2$$

όπου οι ταχύτητες, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, θα είναι

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}_1 &= \dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{m_3}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{13} \\
\dot{\boldsymbol{r}}_2 &= \dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{(m_2 - M)}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{m_3}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{13} \\
\dot{\boldsymbol{r}}_3 &= \dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{(m_3 - M)}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{13}
\end{aligned}$$

Άρα η κινητική ενέργεια, K, θα είναι

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{m_3}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{13}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{(m_2 - M)}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{m_3}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{13}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}m_3\left(\dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{(m_3 - M)}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{13}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow K &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 + m_2(m_2 - M)^2 + m_2^2 m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}\dot{\boldsymbol{r}}_{12}^2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{m_1 m_3^2 + m_3(m_3 - M)^2 + m_2^3 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}\dot{\boldsymbol{r}}_{13}^2 \\
&+ \frac{m_1 m_2 + m_2(m_2 - M) + m_3 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} \\
&+ \frac{m_3 m_1 + m_3(m_3 - M) + m_3 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} \cdot \dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} \\
&+ \frac{m_1 m_2 m_3 + m_2 m_3(m_2 - M) + m_3 m_2(m_3 - M)}{(m_1 + m_2 + m_3)}\dot{\boldsymbol{r}}_{12} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{13}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι διάφοροι συντελεστές μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$\begin{aligned}
\frac{m_1 m_2^2 + m_2(m_2 - M)^2 + m_2^2 m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} &= \frac{m_2 M}{M^2}(M - m_2) = \frac{m_2}{M}(M - m_2) \\
\frac{m_1 m_3^2 + m_3(m_3 - M)^2 + m_2^3 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} &= \frac{m_3}{M}(M - m_3) \\
\frac{m_1 m_2 + m_2(m_2 - M) + m_3 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)} &= 0 \\
\frac{m_3 m_1 + m_3(m_3 - M) + m_3 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)} &= 0
\end{aligned}$$

και

$$\frac{m_1 m_2 m_3 + m_2 m_3(m_2 - M) + m_3 m_2(m_3 - M)}{(m_1 + m_2 + m_3)} = -\frac{m_2 m_3}{M}$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια θα είναι

$$K = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{M}(M-m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_{12} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{M}(M-m_3)\dot{\boldsymbol{r}}_{13} - \frac{m_2 m_3}{M}\dot{\boldsymbol{r}}_{12}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_{13}$$

όπου η ολική μάζα του συστήματος είναι $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Πρόβλημα 5.11 Συνήθως όταν περιγράφουμε άτομα, χρησιμοποιούμε τις εξής συντεταγμένες, θεωρούμε τον πυρήνα με το γράμμα 'O' και τους δείκτες $i, j = 1, 2, \ldots$ για την περιγραφή των άλλων σωματιδίων που περιστρέφονται γύρω από τον πυρήνα. Έτσι έχουμε τις συντεταγμένες

$$\boldsymbol{R}_{\text{KM}} = \frac{m_0\boldsymbol{r}_0 + \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{M} \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0 \quad \text{(σχετικές θέσεις ως προς KM)}$$

όπου η ολική μάζα είναι

$$M = m_0 + \sum_i m_i$$

Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια, K, του ατόμου δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}_{\text{KM}} + \frac{1}{2}\sum_i\left(m_i - \frac{m_i^2}{M}\right)\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_j\frac{m_i m_j}{M}\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_j$$

Λύση:

Μπορούμε να βρούμε μια έκφραση για το $\boldsymbol{r}_i$ μέσω του $\boldsymbol{r}_0$ ως εξής

$$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0 \Rightarrow \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{r}_0 \tag{5.8}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (5) με m_i και παίρνουμε το άθροισμα για όλους τους δείκτες i, όποτε θα έχουμε

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i = \sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i + \sum_i m_i\boldsymbol{r}_0$$

επομένως, χρησιμοποιώντας την έκφραση του $\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i$ στη σχέση (5.11) έχουμε

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{r}_0(m_0 + \sum_i m_i) + \sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i}{M} = \frac{M\boldsymbol{r}_0 + \sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i}{M} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{M}\sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i \tag{5.9}$$

όπου $M = m_0 + \sum_i m_i$. Λύνοντας την εξίσωση (5) ως προς το $\boldsymbol{r}_0$, βρίσκουμε

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{R} - \frac{1}{M}\sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i \tag{5.10}$$

Η κινητική ενέργεια του ατόμου δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{\boldsymbol{r}}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_0\left[\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{1}{M}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{r}}_0)^2 \tag{5.11}$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι σχέσεις (5) και (5). Μετά από λίγες πράξεις στην εξίσωση (5) θα έχουμε

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{R}^2 + \sum_i m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\left(\boldsymbol{r}_0 - \frac{m_0}{M}\dot{\boldsymbol{R}}\right) + \frac{m_0}{2M^2}\left(\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}(M-m_0)\dot{r}_0^2 \tag{5.12}$$

εφ' όσον $\sum_i m_i = M - m_0$. Παρατηρούμε ότι με τη βοήθεια της σχέσης (5), η εξίσωση (5) μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_0 \dot{R}^2 + \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{m_0}{M} \dot{\boldsymbol{R}} \right) + \frac{m_0}{2M^2} \left(\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}(M - m_0) \left[\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \right]^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_0 + M - m_0) \dot{R}^2 + \left(1 - \frac{m_0}{M} - \frac{M - m_0}{M} \right) \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i + \\
&\quad + \left(\frac{m_0}{2M^2} - \frac{1}{M} + \frac{M - m_0}{2M^2} \right) \left(\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2 \\
\Rightarrow T &= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 - \frac{1}{2M} \left(\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \right)^2 &= \left(\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \right) \cdot \left(\sum_j m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_j \right) = \sum_i m_i^2 \dot{\rho}_i^2 + \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \sum_{j \neq i} m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_j \\
\Rightarrow \left(\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \right)^2 &= \sum_i m_i^2 \dot{\rho}_i^2 + \sum_{i \neq j} m_i m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_j
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Τελικά, συνδυάζοντας την εξίσωση (5) με την (5) θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 - \frac{1}{2M} \left[\sum_i m_i^2 \dot{\rho}_i^2 + \sum_{i \neq j} m_i m_j \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_j \right] + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2 \\
&= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i - \frac{m_i^2}{M} \right) \dot{\rho}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{M} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_j
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 5.12 Κάποιο ομογενές ραβδί μάζας m και μήκους $2a$ κρέμεται ελεύθερα από το ένα άκρο του Ο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κτυπιέται σε απόσταση b από το O, $b < 2a$ με βλήμα μάζας m' το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα v. Το βλήμα σφηνώνεται στο ραβδί το οποίο και σαρώνει γωνία ϕ. Εκφράστε το v σαν συνάρτηση των άλλων μεγεθών και να αποδείξετε ότι

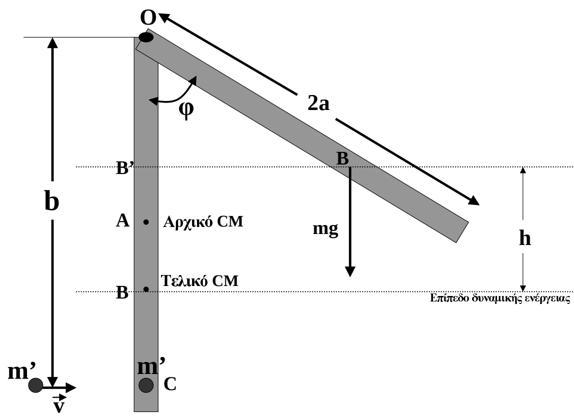
$$
v^2 = 2g(1 + k)(b + ka)(1 - \cos\phi)
$$

όπου $k = m/m'$.

Λύση:

Έστω A το κέντρο μάζας της ομογενούς ράβδου, B το κέντρο μάζας της ράβδου και του βλήματος όταν αυτό έχει σφηνωθεί στο σημείο C της ράβδου. Για το κέντρο μάζας του ραβδιού-βλήματος θα έχουμε

$$
(\mathrm{OA}) + (\mathrm{AB}) = (\mathrm{OB}) = \frac{m(\mathrm{OA}) + m'(\mathrm{OC})}{m + m'}, \quad (\mathrm{OC}) = (\mathrm{OA}) + (\mathrm{AB}) + (\mathrm{BC})
$$



Σχήμα 5.6

$$\Rightarrow m(\text{OA}) + m(\text{AB}) + m'(\text{OA}) + m'(\text{AB}) = m(\text{OA}) + m'(\text{OA}) + m'(\text{AB}) + m'(\text{BC})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow m(\text{AB}) &= m'(\text{BC}) \\
\Rightarrow (\text{AB}) &= \frac{m'}{m}(\text{BC}) \\
&= \frac{m'}{m}\left[b - a - (\text{AB})\right] \\
&= \frac{m'}{m+m'}(b-a)
\end{aligned}$$

και επομένως η απόσταση του κέντρου μάζας B από το σημείο O είναι

$$(\text{OB}) = (\text{OA}) + (\text{AB}) = \frac{bm' + am}{m+m'}$$

Η διατήρηση της ενέργειας του κέντρου μάζας του συστήματος ραβδιού-βλήματος θα μας δώσει

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(m+m')u^2 &= (m+m')gh = (m+m')g(B'B) = (m+m')g((\text{OB}) - (OB')) \\
\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 &= g\left[(\text{OB}) - (\text{OB})\cos\phi\right] = g(\text{OB})(1-\cos\phi)
\end{aligned}$$

όπου u είναι η τελική ταχύτητα του κέντρου μάζας B. Άρα η τελική ταχύτητα θα είναι

$$u^2 = 2g\frac{bm + am'}{m+m'}(1-\cos\phi) \tag{5.15}$$

Η διατήρηση της ορμής του κέντρου μάζας θα μας δώσει

$$\begin{aligned}
m'v &= (m+m')u \\
\Rightarrow v &= \frac{m+m'}{m'}u \\
\Rightarrow v^2 &= \left(\frac{m+m'}{m'}\right)^2 u^2
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της εξίσωσης (5) στη σχέση (5), η ταχύτητα v είναι

$$v^2 = \left(\frac{m+m'}{m'}\right)^2 u^2 = \left(\frac{m+m'}{m'}\right)^2 2g\frac{bm' + am}{m+m'}(1-cos\phi)$$

$$= 2g\frac{(m+m')(bm'+am)}{m'^2}(1-\cos\phi) = 2g(1+k)(b+ka)(1-\cos\phi)$$

όπου $k = m/m'$.

Πρόβλημα 5.13 Ένας κόκκος σκόνης με αμελητέα μάζα αρχίζει να πέφτει $(t = 0)$ υπό την επίδραση της βαρύτητας μέσα σε περιοχή κορεσμένη από υδρατμούς. Οι υδρατμοί συμπυκνώνονται και γίνονται νερό πάνω στον κόκκο με σταθερό ρυθμό $\lambda(kg/m)$ και δημιουργούν έτσι μία σταγόνα νερού με αυξανόμενη μάζα.

(α) Να βρείτε την επιτάχυνση της σταγόνας συναρτήσει της ταχύτητας και της απόστασης που διένυσε.

(β) Από τη σχέση που βρήκατε για την επιτάχυνση, να διατυπώσετε την εξίσωση της σταγόνας.

Λύση:

(α) Θεωρούμε ότι ο άξονας των y είναι θετικός προς τα κάτω. Η δύναμη λόγω της βαρύτητας είναι

$$F = mg$$

Καθώς ο κόκκος πέφτει, η μάζα μεταβάλλεται με το χρόνο, και επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$mg = F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v$$

Εφ' όσον η μάζα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}y$ θα ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda v$$

επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$mg = ma + \lambda v^2$$
$$\Rightarrow a = g - \frac{\lambda}{m}v^2$$

όπου a είναι η επιτάχυνση του κόκκου. Η μάζα m συναρτήσει του ύψους y θα βρεθεί από τη σχέση

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}y} \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda\mathrm{d}y \Rightarrow m = \lambda\int_0^y \mathrm{d}y$$
$$\Rightarrow m = \lambda y$$

και επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$a = g - \frac{v^2}{y} \qquad (5.17)$$

(β) Από την επιτάχυνση $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = d^2y/\mathrm{d}t^2$ η εξίσωση κίνησης (5) θα μας δώσει

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{1}{y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$
$$\Rightarrow y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - gy = 0$$

Πρόβλημα 5.14 Πύραυλος προωθείται χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης αλλά μόνο με τα καυσαέρια που εκτοξεύει προς τα πίσω με σχετική ταχύτητα μέτρου u και με σταθερό ρυθμό εκροής μ. Βρείτε την εξίσωση κίνησης του πυραύλου. Αν ο πύραυλος την στιγμή $t = 0$ ξεκινά από την ηρεμία, βρείτε την ταχύτητα του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου

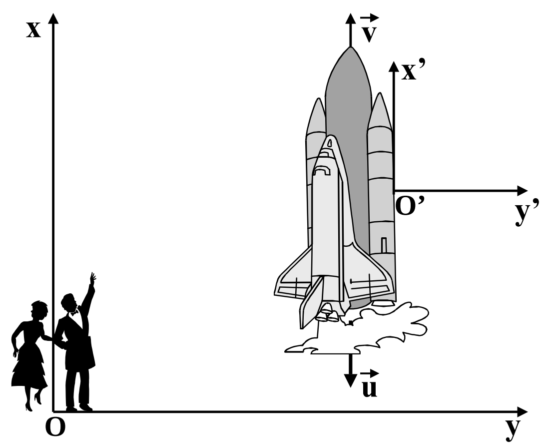
$$v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right)$$

όπου $m_0, m(t)$ είναι οι μάζας του πυραύλου τις χρονικές στιγμές $t = 0$, και t.
Να βρεθεί πόση είναι η μάζα του πυραύλου όταν η ταχύτητα του γίνει ίση με u. Δείξτε ότι το διάστημα που θα διανυθεί ύστερα από χρόνο t είναι

$$x(t) = u \left[t + \frac{1}{\mu} (m_0 - \mu t) \ln \left(\frac{m_0 - \mu t}{m_0} \right) \right]$$

(Δίδεται το γνωστό ολοκλήρωμα $\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x, \quad x > 0$)

Λύση:



Σχήμα 5.7

Η ανάλυση του προβλήματος πυραύλου θα γίνει αφού θεωρήσουμε σαν ένα σύστημα τον πύραυλο και τα καυσαέρια. Έστω $\boldsymbol{p}(t)$ είναι η ορμή του πυραύλου κάποια τυχαία χρονική στιγμή t

$$\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}$$

και $\boldsymbol{p}(t + \Delta t)$ είναι η ορμή του συστήματος πυραύλου-καυσαερίων για μια μετέπειτα χρονική στιγμή $t + \Delta t$, όπου μια ποσότητα $\Delta m < 0$ καυσαερίων έχει φύγει από τον πύραυλο, με αποτέλεσμα η μάζα του να γίνει $m + \Delta m$ (έχουμε λάβει τη μεταβολή της μάζας, $\Delta m < 0$ αρνητικό). Η ταχύτητα του πυραύλου τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ θα έχει μεταβληθεί κατά $\Delta \boldsymbol{v}$, δηλαδή θα είναι: $\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}$. Έστω η ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή O είναι $\boldsymbol{u}'$, επομένως η ορμή του συστήματος πυραύλου-καυσαερίων για μια μετέπειτα χρονική στιγμή $t + \Delta t$ θα είναι

$$\boldsymbol{p}(t + \Delta t) = (m + \Delta m)(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}) + (-\Delta m)\boldsymbol{u}' \tag{5.18}$$

όπου η μάζα των καυσαερίων είναι $(-\Delta m) > 0$ θετική ποσότητα.
Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η ταχύτητα των καυσαερίων ως προς το σύστημα του πυραύλου, O', είναι $\boldsymbol{u}$, και η ταχύτητα του πυραύλου είναι $\boldsymbol{v}$ ως προς ένα αδρανειακό παρατηρητή O, τότε με τη βοήθεια του μετασχηματισμού του Γαλιλαίου των ταχυτήτων θα έχουμε την ταχύτητα των καυσαερίων, $\boldsymbol{u}'$, ως προς το αδρανειακό σύστημα O

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

Άρα η Εξίσωση (5) θα μας δώσει

$$\boldsymbol{p}(t+\Delta t) = (m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}) + (-\Delta m)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})$$

Η ολική δύναμη, $\boldsymbol{F}$, που θα ασκείται στο σύστημα πυραύλου – καυσαερίων θα είναι

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^i + \boldsymbol{F}^e = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{p}(t+\Delta t)-\boldsymbol{p}(t)}{\Delta t}$$

όπου $\boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{F}^e$ είναι η εσωτερική και εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα πυραύλου-καυσαερίων. Από τον τρίτο νόμο του Newton η εσωτερική δύναμη στο σύστημα πυραύλου-καυσαερίων είναι μηδέν, $\boldsymbol{F}^i = 0$. Συνεπώς, η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^e &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{p}(t+\Delta t)-\boldsymbol{p}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m\boldsymbol{v}+m\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\Delta m+\Delta\boldsymbol{v}\Delta m-\Delta m\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\Delta m}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m\Delta\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\Delta m}{\Delta t} = m\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} - m\boldsymbol{u}\frac{\Delta m}{\Delta t}
\end{aligned}$$

όπου οι διπλές διαφορές $\Delta\boldsymbol{v}\Delta m \ll 1$ (μια πολύ μικρή ποσότητα). Στο όριο $\Delta t \to 0$ η παραπάνω εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\boldsymbol{F}^e = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} \tag{5.19}$$

Από το σχήμα 5.7 έχουμε ότι η ταχύτητα των καυσαερίων είναι

$$\boldsymbol{u} = -u\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$$

και επιπλέον δεν έχουμε εξωτερικές δυνάμεις, άρα η εξίσωση κίνησης (5) θα μας δώσει

$$\begin{aligned}
0 &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u\\
\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\\
\Rightarrow \int_0^v \mathrm{d}v &= -u\int_{m_0}^{m(t)}\frac{\mathrm{d}m}{m}\\
\Rightarrow v &= -u\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) = u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

όπου η μάζα του πυραύλου μπορεί να προσδιοριστεί από τον σταθερό ρυθμό εκροής των καυσαερίων

$$\begin{aligned}
\mu &= -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\\
\Rightarrow \mathrm{d}m &= -\mu\mathrm{d}t\\
\Rightarrow \int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m &= -\int_0^t \mu\mathrm{d}t\\
\Rightarrow m(t) &= m_0 - \mu t
\end{aligned}$$

συνεπώς η εξίσωση για την ταχύτητα, $v(t)$ (5) θα είναι

$$v = -u\ln\left(\frac{m_0-\mu t}{m_0}\right)$$

Στην ειδική περίπτωση που $v = u$ θα έχουμε από την ταχύτητα του πυραύλου

$$u = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{m_0}{m} = e$$
$$\Rightarrow m = \frac{m_0}{e}$$

Το διάστημα που θα διανυθεί από τον πύραυλο ύστερα από χρόνο t μπορεί να βρεθεί από την ταχύτητα, $v(t)$ και θα είναι

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow x = -u\int_0^t \ln\left(\frac{m_0-\mu t}{m_0}\right)\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow x = \frac{m_0 u}{\mu}\int_1^{(m_0-\mu t)/m_0} \ln\omega d\omega = \frac{m_0 u}{\mu}\left(\omega\ln\omega - \omega\right)\Big|_1^{(m_0-\mu t)/m_0}$$

όπου η νέα μεταβλητή $\omega = (m_0-\mu t)/m_0 \Rightarrow \mathrm{d}t = -(m_0/\mu)\mathrm{d}\omega$ έχει ορισθεί. Επομένως το διάστημα $x(t)$ είναι

$$x(t) = \frac{m_0 u}{\mu}\left[\frac{m_0-\mu t}{m_0}\ln\left(\frac{m_0-\mu t}{m_0}\right) - \frac{m_0-\mu t}{m_0} + 1\right]$$
$$= \frac{m_0 u}{\mu}\left[\frac{m_0-\mu t}{m_0}\ln\left(\frac{m_0-\mu t}{m_0}\right) + \frac{\mu t}{m_0}\right]$$
$$= u\left[t + \frac{m_0-\mu t}{m_0}\ln\left(\frac{m_0-\mu t}{m_0}\right)\right]$$

Πρόβλημα 5.15 Πύραυλος καταναλώνει καύσιμα εκτοξεύοντας τα αέρια προς τα πίσω με σταθερό ρυθμό εκροής μ και με σχετική ταχύτητα μέτρου u. Ο πύραυλος μένει προσαρμοσμένος σε σιδηροδρομικό βαγόνι που βρίσκεται σε ηρεμία κατά την πυροδότηση και το όλο σύστημα υπόκειται σε αντίσταση $-kv(t)$ όπου $v(t)$ είναι το μέτρο της ταχύτητας και $k > 0$ σταθερά.

(α) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος υπό τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} = -u + \frac{k}{\mu}v$$

όπου m η συνολική μάζα του πυραύλου και του βαγονιού και από αυτό δείξτε ότι

$$1 - \frac{kv}{\mu u} = \left(\frac{m}{m_0}\right)^{k/\mu}$$

(β) Αν η αντίσταση είναι $-\lambda v^2$, δείξτε ότι το $v(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$v(t) = \frac{1}{c}\,\frac{(m_0/m)^{2cu}-1}{(m_0/m)^{2cu}+1}$$

όπου $c = (\lambda/u\mu)^{1/2}$.

Δίδεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}x}{1-c^2x^2} = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{1+cv}{1-cv}\right)$$

Λύση:

(α) Με εξωτερική δύναμη $\boldsymbol{F}^e = -k\boldsymbol{v} = -kv\hat{\boldsymbol{x}}$, η εξίσωση κίνησης δίδεται από τη σχέση (5) είναι

$$\begin{aligned} -kv &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ &= -\mu m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} - \mu u \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} &= \frac{1}{m}\left(-u + \frac{k}{\mu}v\right) \end{aligned} \tag{5.21}$$

όπου ο ρυθμός εκροής των αερίων είναι

$$\begin{aligned} \mu &= -\mathrm{d}m/\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \mathrm{d}m &= -\mu\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m &= -\mu\int_0^t \mathrm{d}t \\ \Rightarrow m &= m_0 - \mu t \end{aligned}$$

Η εξίσωση (5) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{-u + (k/\mu)v} &= \int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m} \\ \Rightarrow \frac{k}{\mu}\int_{-u}^{u-(k/\mu)v}\frac{\mathrm{d}(-u + (k/\mu)v)}{-u + (k/\mu)v} &= \ln(\frac{m}{m_0}) \\ \Rightarrow \frac{k}{\mu}\ln\left(\frac{-u + (k/\mu)v}{-u}\right) &= \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \\ \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{k}{\mu u}v\right) &= \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)^{k/\mu} \\ \Rightarrow 1 - \frac{k}{\mu u}v &= \left(\frac{m}{m_0}\right)^{k/\mu} \\ \Rightarrow v &= \frac{\mu u}{k}\left[1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{(k/\mu)}\right] \end{aligned}$$

(β) Αν η εξωτερική δύναμη είναι

$$\boldsymbol{F}^e = -\lambda v^2\hat{\boldsymbol{x}}$$

η εξίσωση κίνησης (5) θα είναι

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} &= -u + \frac{\lambda}{\mu}v^2 \\ \Rightarrow \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{-u + (\lambda/\mu)v^2} &= \int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m} \\ \Rightarrow -\frac{1}{u}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{1 - (\lambda/u\mu)v^2} &= \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) \end{aligned}$$

Ορίζουμε μια νέα σταθερά $c^2 = \lambda/(u\mu) \Rightarrow c = (\lambda/(u\mu))^{1/2}$, επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα θα μας δώσει

$$-\frac{1}{u}\frac{1}{2c}\ln\left(\frac{1+cv}{1-cv}\right) = \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln\left(\frac{1+cv}{1-cv}\right) = \ln\left[\left(\frac{m_0}{m}\right)^{2cu}\right] \\
&\Rightarrow \frac{1+cv}{1-cv} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^{2cu} \\
&\Rightarrow v = \frac{1}{c}\,\frac{(m_0/m)^{2cu}-1}{(m_0/m)^{2cu}+1}
\end{aligned}
$$

όπου $m = m_0 - \mu t$ και $cu = (\lambda u/\mu)^{1/2}$.

Πρόβλημα 5.16 Πυραυλοφόρο βαγόνι κινείται κατά μήκος οριζοντίων σιδηροτροχιών αρχίζοντας από την ηρεμία την στιγμή $t = 0$. Η αρχική του μάζα είναι M, και τα καυσαέρια εκρέουν προς τα πίσω με σταθερό ρυθμό μ και με ταχύτητα σε σχέση προς το όχημα, μέτρου u. Όταν το βαγόνι έχει ταχύτητα v η αντίσταση λόγω τριβής είναι $F = -k\mu v$ όπου k θετική σταθερά. Βρείτε την εξίσωση της κίνησης και δείξετε ότι η ταχύτητα v κατά την στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$v = \frac{u}{\mu}\left[1 - \left(1 - \frac{\mu t}{M}\right)^k\right]$$

Μπορείτε να λάβετε υπ' όψη ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{v} = \phi(t)v + h(t)$$

είναι

$$v(t) = \mathrm{e}^{\int \phi(t)\mathrm{d}t}\left(A + \int \mathrm{e}^{-\int \phi(t)\mathrm{d}t} h(t)\mathrm{d}t\right)$$

όπου η σταθερά A μπορεί να προσδιοριστεί από αρχικές συνθήκες.

Λύση:

Με εξωτερική δύναμη $\boldsymbol{F}^e = -k\mu \boldsymbol{v} = -k\mu v\hat{\boldsymbol{x}}$, η εξίσωση κίνησης δίδεται από τη σχέση (5) όπου $\boldsymbol{u} = -u\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v} = -v\hat{\boldsymbol{x}}$. Άρα θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
&m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -k\mu v \\
&\Rightarrow m\dot{v} = u\mu - k\mu v
\end{aligned}
$$

Από το σταθερό ρυθμό εκροής των αερίων θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}m = -\mu \mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \int_M^m \mathrm{d}m = -\mu \int_0^t \mathrm{d}t \\
&\Rightarrow m = M - \mu t
\end{aligned}
$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης είναι

$$\dot{v} = -\frac{k\mu}{M-\mu t}v + \frac{u\mu}{M-\mu t}$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $\dot{v} = \phi(t)v + h(t)$ με

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= -\frac{k\mu}{M-\mu t} \\
h(t) &= \frac{u\mu}{M-\mu t}
\end{aligned}
$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$v(t) = \mathrm{e}^{\int \phi(t)\mathrm{d}t}\left(A + \int \mathrm{e}^{-\int \phi(t)\mathrm{d}t} h(t)\mathrm{d}t\right)$$

Το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{e}^{\int \phi(t)\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\int k\mu/(M-\mu t)\mathrm{d}t}$$

μπορεί υπολογιστεί αφού βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \phi(t)\mathrm{d}t = -\int \frac{k\mu}{M-\mu t}\mathrm{d}t = k\int \frac{\mathrm{d}(M-\mu t)}{M-\mu t} = k\ln(M-\mu t) = \ln(M-\mu t)^k$$

οπότε

$$\mathrm{e}^{\int \phi(t)\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\ln(M-\mu t)^k} = (M-\mu t)^k$$

Επιπλέον

$$\int \mathrm{e}^{-\int \phi(t)\mathrm{d}t} h(t)\mathrm{d}t = \int (M-\mu t)^{-k}\frac{u\mu}{M-\mu t}\mathrm{d}t = -u\int \frac{\mathrm{d}(M-\mu t)}{(M-\mu t)^{k+1}}\mathrm{d}t = \frac{u}{k(M-\mu t)^k}$$

οπότε η γενική λύση θα είναι

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathrm{e}^{\int \phi(t)\mathrm{d}t}\left(A + \int \mathrm{e}^{-\int \phi(t)\mathrm{d}t} h(t)\mathrm{d}t\right) \\ \Rightarrow v &= (M-\mu t)^k\left(A + \frac{u}{k(M-\mu t)^k}\right) \\ &= A(M-\mu t)^k + \frac{u}{k} \end{aligned}$$

Από την αρχική συνθήκη $v(t) = 0$, έχουμε

$$A = -\frac{u}{kM^k}$$

και η γενική λύση θα είναι

$$v = \frac{u}{k}\left[1 - \left(\frac{M-\mu t}{M}\right)^k\right] = \frac{u}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{\mu t}{M}\right)^k\right]$$

Πρόβλημα 5.17 Πύραυλος προωθείται κατακόρυφα χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης αλλά μόνο με τα καυσαέρια που εκτοξεύει προς τα πίσω με σχετική ταχύτητα ως προς τον πύραυλο μέτρου u και σταθερό ρυθμό εκροής $\mu = m_0 a$, όπου a σταθερά. Υποθέτοντας ότι η κίνηση γίνεται στο πεδίο βαρύτητας g το οποίο υποτίθεται σταθερό, και ότι η αντίσταση του ατμοσφαιρικού αέρα είναι $-kv$, όπου $k > 0$ σταθερά και v το μέτρο της ταχύτητας του πυραύλου, να γραφεί η εξίσωση κίνησης του πυραύλου. Να βρεθεί η ταχύτητα $v(t)$ τη χρονική στιγμή t, αν υποθέσουμε ότι για $t = 0$ ο πύραυλος ξεκινά από την ηρεμία από την επιφάνεια της Γης και έχει συνολική μάζα m_0. Να βρεθεί το διάστημα $x(t)$ που διανύει ο πύραυλος συναρτήσει του χρόνου. Μπορείτε να λάβετε υπ' όψη ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{v} = \phi(t)v + h(t)$$

είναι

$$v(t) = \mathrm{e}^{\int \phi(t)\mathrm{d}t}\left(A + \int \mathrm{e}^{-\int \phi(t)\mathrm{d}t} h(t)\mathrm{d}t\right)$$

όπου η σταθερά A μπορεί να προσδιοριστεί από αρχικές συνθήκες.

Λύση:

Με εξωτερική δύναμη

$$\boldsymbol{F}^e = -k\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{g} = (-kv - mg)\hat{\boldsymbol{z}}$$

η εξίσωση κίνησης δίνεται από τη σχέση (5) στη σελίδα 237, όπου $\boldsymbol{u} = -u\hat{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{v} = -v\hat{\boldsymbol{z}}$. Άρα θα έχουμε

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -kv - mg$$

$$\Rightarrow m\dot{v} = u\mu - kv - mg$$

Από τον σταθερό ρυθμό εκροής των αερίων θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m &= -\mu \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \int_{m_0}^{m} \mathrm{d}m &= -\mu \int_0^t \mathrm{d}t \\ \Rightarrow m &= m_0 - \mu t \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης είναι

$$\dot{v} = -\frac{k}{m_0 - \mu t} v + \frac{u\mu}{m_0 - \mu t} - g$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $\dot{v} = \phi(t)v + h(t)$ με

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -\frac{k}{m_0 - \mu t} \\ h(t) &= \frac{u\mu}{m_0 - \mu t} - g \end{aligned}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$v(t) = \mathrm{e}^{\int \phi(t)\mathrm{d}t} \left(A + \int \mathrm{e}^{-\int \phi(t)\mathrm{d}t} h(t) \mathrm{d}t \right)$$

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{k}{m_0 - \mu t} \mathrm{d}t = -\frac{k}{\mu} \int \frac{m_0 - \mu t}{m_0 - \mu t} = -\frac{k}{\mu} \ln(m_0 - \mu t)$$

Άρα η ταχύτητα $v(t)$ είναι

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathrm{e}^{(k/\mu)\ln(m_0 - \mu t)} \left[A + \int \mathrm{e}^{-(k/\mu)\ln(m_0 - \mu t)} \left(\frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g \right) t \mathrm{d}t \right] \\ &= (m_0 - \mu t)\mathrm{e}^{k/\mu} \left[A + \int (m_0 - \mu t) \mathrm{e}^{-k/\mu} \frac{\mu u - (m_0 - \mu t)t}{m_0 - \mu t} \mathrm{d}t \right] \\ &= (m_0 - \mu t)\mathrm{e}^{k/\mu} \left[A + \int \mathrm{e}^{-k/\mu} (\mu u - m_0 g + \mu g t) \mathrm{d}t \right] \\ &= (m_0 - \mu t)\mathrm{e}^{k/\mu} \left[A + \mathrm{e}^{-k/\mu} \left((\mu u - m_0 g)t + \frac{1}{2}\mu g t^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Η σταθερά A θα βρεθεί από την αρχική συνθήκη $v(0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = v(0) &= m_0 \mathrm{e}^{k/\mu} A \\ \Rightarrow A &= 0 \end{aligned}$$

Άρα η ταχύτητα είναι

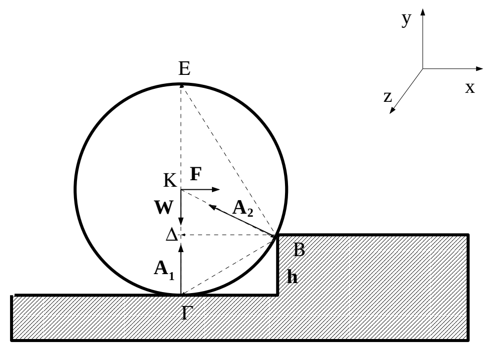
$$v(t) = (m_0 - \mu t) \left[(\mu u - m_0 g)\, t + \frac{1}{2}\mu g t^2 \right]$$

Το διάστημα $x(t)$ που διανύει ο πύραυλος συναρτήσει του χρόνου είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)\mathrm{d}t = \int (m_0 - \mu t) \left[(\mu u - m_0 g)t + \frac{1}{2}\mu g t^2 \right] \mathrm{d}t \\ &= \int \left(\left[m_0(\mu u - m_0 g)t + \left(\frac{1}{2}\mu g^2 m_0 - \mu(\mu u - m_0 g) \right) \right] t^2 - \frac{1}{2}\mu^2 g t^3 \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{m_0}{2}(\mu u - m_0 g)t^2 + \frac{\mu}{3}\left[\frac{1}{2} m_0 g^2 - \mu u + m_0 g \right] t^3 - \frac{1}{8}\mu^2 g t^4 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 5.18 Ποια είναι η ελάχιστη οριζόντια δύναμη F πού πρέπει να εφαρμοστεί πάνω στον άξονα μιας ρόδας, ώστε να ανέβει πάνω σ' ένα πεζοδρόμιο; Δίνονται η ακτίνα R της ρόδας, το βάρος της w και το ύψος του πεζοδρομίου h.

Λύση:



Σχήμα 5.8

Πάνω στη ρόδα ενεργούν οι δυνάμεις $\boldsymbol{W}$ και $\boldsymbol{F}$ καθώς και οι αντιδράσεις $\boldsymbol{A}_1$ και $\boldsymbol{A}_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8. Την στιγμή που αρχίζει η ρόδα να ανεβαίνει αρχίζει να στρέφεται γύρω από το σημείο Β και διακόπτεται η επαφή της με το δάπεδο στο σημείο Γ. Αποτέλεσμα αυτής της κίνησης είναι ότι η αντίδραση $\boldsymbol{A}_1$ παύει να ενεργεί. Σ' Αυτή την οριακή κατάσταση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ρόδα ισορροπεί οπότε ισχύει

$$\sum \boldsymbol{F} = 0, \qquad \text{και} \qquad \sum \boldsymbol{N} = 0$$

Αν πάρουμε τις ροπές ως προς το σημείο Β έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{BK}} \times \boldsymbol{F} + \overrightarrow{\mathrm{BK}} \times \boldsymbol{W} = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta K}}) \times (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{W}) = 0. \tag{5.22}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι

$$\Delta\mathrm{K} = R - h$$

και από το τρίγωνο ΒΔΚ

$$\mathrm{B\Delta} = \sqrt{2Rh - h^2}$$

$$(5) \Rightarrow \left[-\sqrt{2Rh - h^2}\hat{\boldsymbol{x}} + (R-h)\hat{\boldsymbol{y}}\right] \times (F\hat{\boldsymbol{x}} - W\hat{\boldsymbol{y}}) = 0$$

$$\Rightarrow W\sqrt{2Rh - h^2} - F(R-h) = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{W\sqrt{2Rh - h^2}}{R-h}.$$

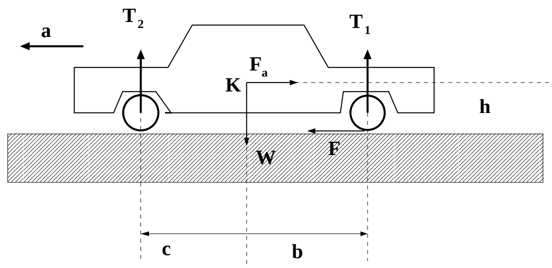
Πρόβλημα 5.19 Ένα αυτοκίνητο έχει βάρος $15\,000\,N$και απόσταση ανάμεσα στις μπρος και πίσω ρόδες $2,5\,m$. Αν το κέντρο μάζας βρίσκεται στη μέση αυτής της απόστασης και σε ύψος $0,7\,m$ από το έδαφος, να βρεθούν:

(α) Οι αντιδράσεις του εδάφους πάνω στο αυτοκίνητο όταν αυτό ηρεμεί.

(β) Η μέγιστη επιτάχυνση πού μπορεί να αποκτήσει το όχημα στο ξεκίνημα, αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι 0,5, και επίσης οι αντιδράσεις από το έδαφος. Γιατί η πίσω κίνηση έχει περισσότερα πλεονεκτήματα από τη μπροστινή κίνηση;

(γ) Οι αντιδράσεις του εδάφους στο φρενάρισμα του αυτοκίνητου, αν η επιβράδυνση που ασκείται είναι $2,5$ $\mathrm{m/s}^2$, υποθέτοντας ότι το αυτοκίνητο έχει πίσω κίνηση.

Λύση:



Σχήμα 5.9

(α) Όταν το αυτοκίνητο ηρεμεί έχουμε

$$\sum \boldsymbol{F} = 0, \tag{5.23}$$

$$\sum \boldsymbol{N} = 0 \tag{5.24}$$

$$(5) \Rightarrow \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{W} = 0 \tag{5.25}$$

$$(5) \Rightarrow \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{T}_2 = 0 \tag{5.26}$$

Από τις (5) και (5) βρίσκουμε

$$T_1 = \frac{Wc}{b+c} = 7500\,\mathrm{N}$$

$$T_2 = \frac{Wb}{b+c} = 7500\,\mathrm{N}$$

(β) Όταν το αυτοκίνητο ξεκινά και έχουμε πίσω εκκίνηση οι πίσω ρόδες πιέζουν προς τα πίσω το οδόστρωμα. Η αντίδραση είναι μία δύναμη $\boldsymbol{F}$ που αναπτύσσεται στους τροχούς και δίνει στο αυτοκίνητο επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αυτοκίνητο βρίσκεται σε ηρεμία εφόσον εφαρμόσουμε στο κέντρο μάζας του μία δύναμη αδρανείας $\boldsymbol{F}_a$ ίση και αντίθετη προς την F.

$$\boldsymbol{F}_a = -m\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{F}$$

Τότε οι (5) και (5) γίνονται

$$(5) \Rightarrow \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_a = 0 \tag{5.27}$$

$$(5) \Rightarrow \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{F} = 0 \tag{5.28}$$

Από τις (5) και (5) βρίσκουμε

$$T_1 = \frac{Wc}{b+c} + \frac{mah}{b+c}, \qquad T_2 = \frac{Wb}{b+c} - \frac{mah}{b+c} \tag{5.29}$$

Παρατηρούμε ότι η αντίδραση στους πίσω τροχούς αυξήθηκε ενώ στους μπροστινούς τροχούς έχει μειωθεί. Σημειωτέον ότι στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε και αν το αυτοκίνητο έχει την κίνηση στους μπρος τροχούς. Η δύναμη της τριβής $\boldsymbol{F}$ είναι στατική και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει είναι

$$F = \mu_s T_1 \tag{5.30}$$

Για μεγαλύτερες τιμές της δύναμης οι τροχοί αρχίζουν να γλιστρούν (σπινάρουν). Από αυτό είναι φανερό γιατί η πίσω εκκίνηση υπερτερεί της μπροστινής στο ξεκίνημα. Από τις (5) και (5) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

$$ma = \mu_s \left(\frac{Wc}{b+c} + \frac{mah}{b+c} \right) = \frac{\mu_s mgc}{b+c} + \frac{mah}{b+c}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\mu_s g c}{b + c - \mu_s h} = 3,5\,\mathrm{m/s^2}$$

και αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε

$$T_1 = 8970\,\mathrm{N}$$
$$T_2 = 6030\,\mathrm{N}$$

(γ) Στο φρενάρισμα οι $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{F}_a$ αλλάζουν φορά. Οι εξισώσεις (5) και (5) ισχύουν και βρίσκουμε ότι

$$T_1 = \frac{Wc}{b+c} - \frac{mah}{b+c}, \qquad T_2 = \frac{Wb}{b+c} + \frac{mah}{b+c} \tag{5.31}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι η T_2 γίνεται μεγαλύτερη από την T_1 και γι' αυτό το λόγο στο φρενάρισμα ανασηκώνεται το πίσω μέρος του αυτοκινήτου. Για $a = 2,5\,m/s^2$ βρίσκουμε από την (5)

$$T_1 = 6450\,\mathrm{N}$$

$$T_2 = 8550\,\mathrm{N}$$

Πρόβλημα 5.20 Ένα αμάξι με μάζα M κινείται χωρίς τριβή με ταχύτητα v πάνω σ' ένα δρόμο. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του αμαξιού στις παρακάτω περιπτώσεις;

(α) Ένα κιβώτιο με μάζα m εκσφενδονίζεται κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης, με ταχύτητα v_κ σχετικά με το αμάξι.

(β) Το ίδιο κιβώτιο εκσφενδονίζεται προς τα πίσω με ταχύτητα v_κ σχετικά με το αμάξι.

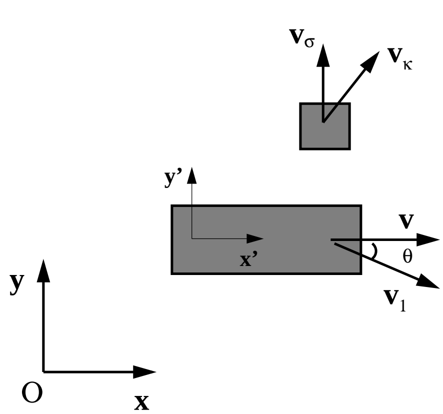
(γ) Το κιβώτιο ρίχνεται πάνω στο αμάξι με ταχύτητα v_κ σχετικά με το έδαφος, αντίθετη με τη φορά της κίνησης του αμαξιού.

(δ) Το κιβώτιο ρίχνεται πάνω στο αμάξι με ταχύτητα v_κ σχετικά με το έδαφος κατά τη φορά της κίνησης του αμαξιού.

Λύση:

Σ' όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε το σύστημα αμαξιού – κιβωτίου κλειστό, οπότε η ορμή διατηρείται.

(α)



Σχήμα 5.10

$$(M+m)\boldsymbol{v} = M\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_\kappa$$

αλλά

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_\sigma \tag{5.32}$$

και η (5) γίνεται

$$\begin{aligned}(M+m)v\hat{\boldsymbol{x}} &= M(v_{1x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{1y}\hat{\boldsymbol{y}}) + m(v\hat{\boldsymbol{x}} + v_\sigma\hat{\boldsymbol{y}})\\ (M+m)v &= Mv_{1x} + mv\\ 0 &= Mv_{1y} + mv_\sigma\end{aligned}$$

από τις οποίες

$$v_{1x} = v \quad \text{και} \quad v_{1y} = -\frac{mv_\sigma}{M}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= v\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{m}{M}v_\sigma\hat{\boldsymbol{y}}\\ v_1 &= \sqrt{v^2 + \left(\frac{m}{M}v_\sigma\right)^2}, \qquad \tan\theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = -\frac{m}{M}\frac{v_\sigma}{v}\end{aligned}$$

(β)

$$(M+m)\boldsymbol{v} = M\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_\kappa, \boldsymbol{v}_\kappa = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_\sigma$$

και επομένως

$$(M+m)v\hat{\boldsymbol{x}} = Mv_1\hat{\boldsymbol{x}} + m(v\hat{\boldsymbol{x}} - v_\sigma\hat{\boldsymbol{x}})$$

Άρα

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(v + \frac{m}{M}v_\sigma\right)\hat{\boldsymbol{x}}$$

(γ)

$$\begin{aligned}M\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{v}_\kappa &= (M+m)\boldsymbol{v}_1\\ \Rightarrow Mv\hat{\boldsymbol{x}} - mv_\kappa\hat{\boldsymbol{x}} &= (M+m)v_1\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

Άρα

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{Mv - mv_\kappa}{M+m}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$$

(δ)

$$\begin{aligned}m\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{v}_\kappa &= (M+m)\boldsymbol{v}_1\\ \Rightarrow Mv\hat{\boldsymbol{x}} + mv_\kappa\hat{\boldsymbol{x}} &= (M+m)v_1\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

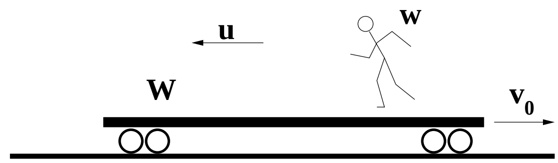
και

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{Mv + mv_\kappa}{M+m}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$$

Πρόβλημα 5.21 Ένα βαγόνι με βάρος W κινείται σε οριζόντια σιδηροτροχιά με ταχύτητα $v_0\hat{\boldsymbol{x}}$. Αρχικά ένας άνθρωπος με βάρος w στέκεται πάνω του. Αν ο άνθρωπος αρχίσει να τρέχει με σχετική ταχύτητα $-u\hat{\boldsymbol{x}}$, ζητείται η μεταβολή της ταχύτητας του βαγονιού τη στιγμή πού πηδά από το βαγόνι στο έδαφος.

Λύση:

Το βαγόνι και ο άνθρωπος αποτελούν κλειστό σύστημα. Η δύναμη που επιδρά εξωτερικά πάνω στο σύστημα είναι μηδέν, επειδή τα βάρη $\boldsymbol{W}$ και $\boldsymbol{w}$ εξουδετερώνονται από τις αντιδράσεις. Η μάζα του συστήματος είναι $m = M + \mu$. Εδώ ισχύει η εξίσωση



Σχήμα 5.11

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

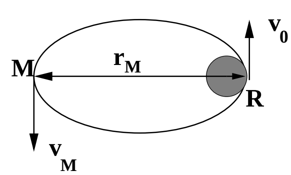
με τη μορφή

$$m\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{u}\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

γιατί $\boldsymbol{F} = 0$. Η μεταβολή της μάζας είναι $\Delta m = -\mu$ ίση με τη μάζα του ανθρώπου. Επομένως

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\frac{\Delta m}{m} = -u\frac{-\mu}{M+\mu}\hat{\boldsymbol{x}} = u\frac{\mu}{M+\mu}\hat{\boldsymbol{x}}$$
$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{v} = u\frac{w}{W+w}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Πρόβλημα 5.22 Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται εφαπτομενικά από την επιφάνεια της Γης, με ταχύτητα $\sqrt{1.5}$ φορές μεγαλύτερη από εκείνη πού χρειάζεται για κυκλική τροχιά. Ζητείται η μέγιστη απόσταση του δορυφόρου από τη Γη (πού θεωρείται χωρίς ατμόσφαιρα).



Σχήμα 5.12

Λύση:

Η ταχύτητα που χρειάζεται για κυκλική τροχιά ενός δορυφόρου κοντά στην επιφάνεια της γης είναι

$$v \;=\; \sqrt{g\,R}$$

γιατί πρέπει

$$mg = \frac{mv^2}{R}$$

Η αρχική συνολική ενέργεια του δορυφόρου είναι

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv_0^2}{2} - gRm$$

γιατί

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Αλλά

$$v_0 = v\sqrt{1.5} = \sqrt{1.5gR}$$

ώστε

$$E = \frac{1.5gRm}{2} - gRm = -\frac{mgR}{4}$$

Η ενέργεια για απόσταση r και ταχύτητα v είναι

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{r}$$

και επειδή η ενέργεια διατηρείται

$$\frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r} = -\frac{gR}{4} \tag{5.33}$$

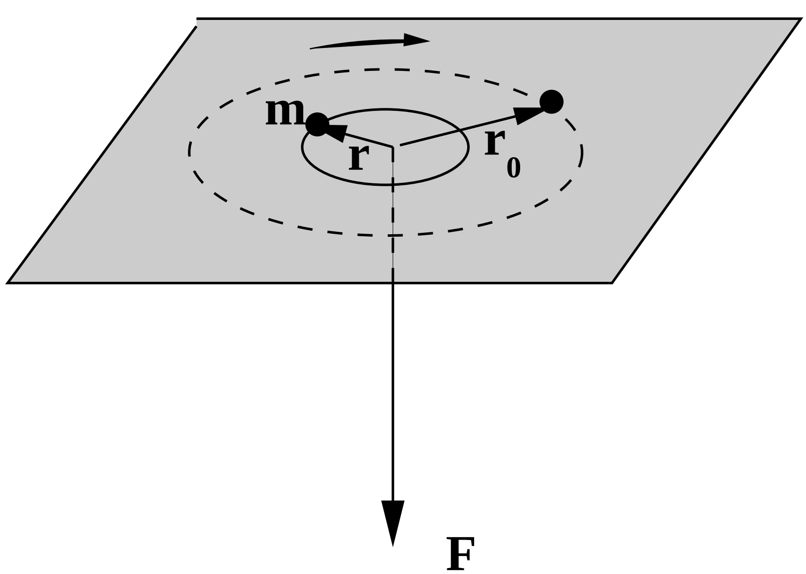
Αρχικά η ταχύτητα είναι παράλληλη με την επιφάνεια της γης, άρα κάθετη στο διάνυσμα θέσης του δορυφόρου σε σχέση με τη γη. Επίσης είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης όταν βρίσκεται στη μέγιστη απόσταση από τη γη. Από την αρχή διατήρησης της γωνιακής ορμής προκύπτει για τη θέση μέγιστης απόστασης

$$v_0 R = v_M r_M$$
$$\Rightarrow \sqrt{1.5gR} = \frac{v_M r_M}{R}$$

Επίσης από την (5) προκύπτει

$$r_M = 3R \qquad \text{και} \qquad v_M = \frac{\sqrt{1.5gR}}{3} = \frac{v_0}{3}$$

Πρόβλημα 5.23 Ένα σώμα με μάζα m γυρίζει σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή με γωνιακή ταχύτητα ω_0, διαγράφοντας περιφέρεια κύκλου με ακτίνα r_0. Το νήμα, πού εξασκεί την κεντρομόλο δύναμη στο σώμα, περνά από μία τρύπα στο κέντρο του κύκλου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Με την επίδραση της δύναμης F, το σώμα διαγράφει νέα κυκλική τροχιά, ακτίνας $r_0/2$. Ζητείται η νέα γωνιακή ταχύτητα και το έργο πού παράγεται από την F. Ελέγξτε το αποτέλεσμα με ολοκλήρωση.



Σχήμα 5.13

Λύση:

Η δύναμη πάνω στη μάζα m είναι κεντρική, άρα έχουμε διατήρηση της στροφορμής.

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega\left(\frac{r_0}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \quad \omega = 4\omega_0 \qquad \text{ή} \qquad v = 2v_0$$

Το έργο είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας. Άρα

$$W = \Delta T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Από τον ορισμό του έργου έχουμε

$$W = \int_{r_0}^{r_0/2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.34}$$

Η δύναμη ισούται με

$$\boldsymbol{F} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{5.35}$$

Επίσης ισχύει

$$\mathrm{d}r = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.36}$$

Αντικαθιστώντας τις (5) και (5) στην (5) παίρνουμε

$$W = \int_{r_0}^{r_0/2} -\frac{mv^2}{r}\mathrm{d}r \tag{5.37}$$

Η ταχύτητα του σώματος είναι μεταβλητή και μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση του r από την αρχή διατήρησης της στροφορμής

$$mvr = mv_0 r_0$$
$$\Rightarrow v^2 = \frac{v_0^2 r_0^2}{r^2}$$

Αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε

$$W = mv_0^2 r_0^2 \int_{r_0}^{r_0/2} -\frac{\mathrm{d}r}{r^3} = mv_0^2 r_0^2 \left[\frac{1}{2r^2}\right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2}mv_0^2$$

Πρόβλημα 5.24 Στη διάταξη του σχήματος να βρεθεί η τάση στο νήμα και η αντίδραση του δαπέδου. Το βάρος του σώματος είναι $W_\Sigma = 50N$, της δοκού $W_\Delta = 200N$ και οι γωνίες $\theta = 30^\circ$ και $\phi = 45^\circ$.

Λύση:

Στη ράβδο ενεργούν οι δυνάμεις $\boldsymbol{W}_2$, της έλξης $\boldsymbol{T}_1$, της τάσης $\boldsymbol{T}$ και της αντίδρασης του δαπέδου $\boldsymbol{M}$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύουν οι συνθήκες

$$\sum \boldsymbol{F} = 0, \tag{5.38}$$

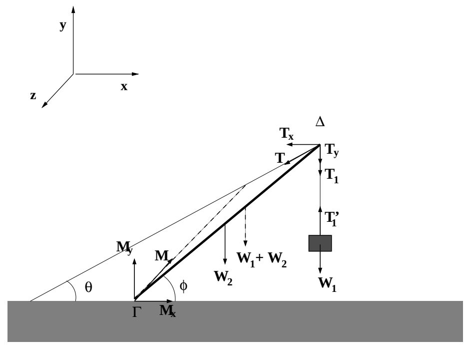
$$\sum \boldsymbol{N} = 0 \tag{5.39}$$

Επίσης $T_1 = W_1$. Από την (5) έχουμε

$$\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{W}_2 + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{M} = 0$$

Για την x συντεταγμένη έχουμε

$$M_x - T_x = 0 \tag{5.40}$$



Σχήμα 5.14

Για την y συντεταγμένη έχουμε

$$M_y - (T_1 + W_2 + T_y) = 0 \tag{5.41}$$

έχοντας $T_x = T\cos 30°$, $T_y = T\sin 30°$, $M_x = M\cos\alpha$ και $M_y = M\sin\alpha$, όπου α η γωνία που σχηματίζει η αντίδραση του δαπέδου $\boldsymbol{M}$ με το δάπεδο.
Από τη σχέση (5), αν πάρουμε τις ροπές ως προς σημείο Γ έχουμε

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\Gamma\Delta} \times \boldsymbol{W}_2 + \overrightarrow{\Gamma\Delta} \times \boldsymbol{T} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} \times \boldsymbol{T}_1 = 0 \tag{5.42}$$

Έστω $\ell = \Gamma\Delta$ το μήκος της δοκού. Από τη σχέση (5) έχουμε

$$\begin{aligned}
\left[\ell\cos 45°\hat{\boldsymbol{x}} + \ell\sin 45°\hat{\boldsymbol{y}}\right] \times \left[-\frac{1}{2}W_2\hat{\boldsymbol{y}} - T_x\hat{\boldsymbol{x}} - T_y\hat{\boldsymbol{y}} - T_1\hat{\boldsymbol{y}}\right] &= 0 \\
\Rightarrow -\frac{1}{2}W_2\cos 45° - T_y\cos 45° - T_1\cos 45° + T_x\sin 45° &= 0 \\
\Rightarrow -\frac{1}{2}W_2\cos 45° - T\sin 30°\cos 45° - W_1\cos 45° + T\cos 30°\sin 45° &= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\frac{1}{2}W_2\cos 45° + W_1\cos 45°}{\cos 30°\sin 45° - \sin 30°\cos 45°} = 410N$$

Από την (5) έχουμε

$$N_x = T_x = T\cos 30° = 355N$$

Από την (5) έχουμε

$$N_y = T_1 + W_2 + T_y = W_1 + W_2 + T\sin 30° = 455N$$

Το μέτρο της αντίδρασης είναι

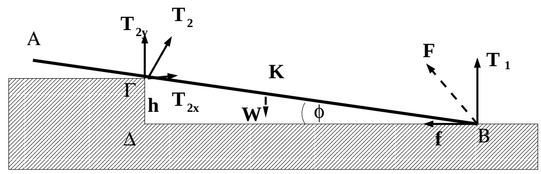
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 577N$$

και η γωνία α είναι

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{M_y}{M_x} = 1,28 \\
\Rightarrow \alpha &= 52°
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 5.25 Μία ομογενής ράβδος με μήκος ℓ και βάρος W στηρίζεται σ' ένα σκαλοπάτι όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής στο σημείο Β είναι μ και το σημείο Γ δεν παρουσιάζει τριβή, να βρεθεί η γωνία ϕ της ράβδου με το δάπεδο, ώστε η ράβδος να ισορροπεί. Δίνεται ότι το ύψος του σκαλοπατιού είναι h.

Λύση:



Σχήμα 5.15

Πάνω στη ράβδο ενεργούν οι δυνάμεις του βάρους $\boldsymbol{W}$ και των αντιδράσεων $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{T}_2$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύουν οι συνθήκες

$$\sum \boldsymbol{F} = 0, \tag{5.43}$$

$$\sum \boldsymbol{N} = 0 \tag{5.44}$$

Από την (5) έχουμε

$$\boldsymbol{W} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T}_2 = 0 \tag{5.45}$$

Για την x συντεταγμένη έχουμε

$$T_{2x} - f = 0 \tag{5.46}$$

όπου

$$f = \mu T_1 \qquad \text{και} \qquad \tan\phi = N_{2x}/N_{2y} \tag{5.47}$$

Για την y συντεταγμένη έχουμε

$$T_{2y} + T_1 - W = 0$$

Αν πάρουμε τις ροπές των δυνάμεων ως προς το σημείο Β από την (5) έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{BK}} \times \boldsymbol{W} + \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} \times \boldsymbol{N}_2 = 0$$

Έστω d η απόσταση ΒΔ, τότε η (5) γράφεται

$$\frac{\boldsymbol{\ell}}{2} \times \boldsymbol{W} + (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{h}) \times (\boldsymbol{T}_{2x} + \boldsymbol{T}_{2y}) = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\ell}{2}\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\ell}{2}\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}\right) \times (-W\hat{\boldsymbol{y}}) + (-\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} + h\hat{\boldsymbol{y}}) \times (T_{2x}\hat{\boldsymbol{x}} + T_{2y}\hat{\boldsymbol{y}}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{2}W\cos\phi - T_{2y}d - T_{2x}h = 0 \tag{5.48}$$

Από τις (5), (5) και (5) βρίσκουμε

$$T_{2x} = \frac{\mu W \tan\phi}{\mu + \tan\phi}$$

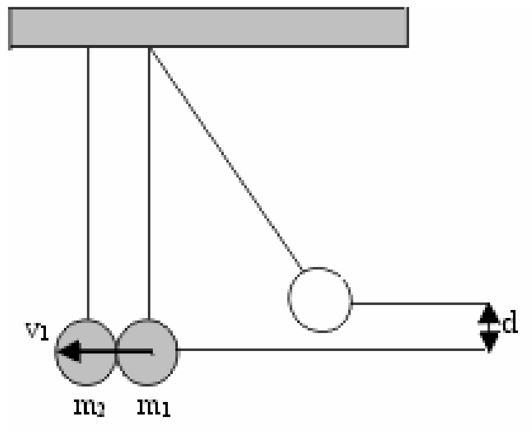
$$T_{2y} = \frac{\mu W}{\mu + \tan\phi}$$

επίσης $d = h/\tan\phi$, και από τη σχέση (5) παίρνουμε

$$\frac{\ell}{2}W\cos\phi - \frac{h\mu W}{\tan\phi(\mu + \tan\phi)} - \frac{h\mu W \tan\phi}{\mu + \tan\phi} = 0$$

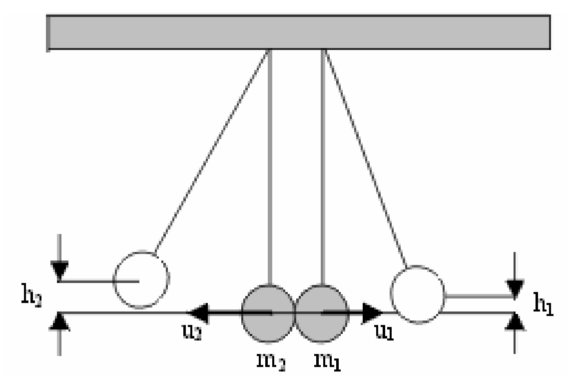
Την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να τη λύσουμε αριθμητικά και να βρούμε τη γωνία ϕ.

Πρόβλημα 5.26 Οι μάζες των δύο σφαιρών του σχήματος είναι m_1 και m_2, όπου $m_1 \neq m_2$. Η m_1 ανυψώνεται κατά d και αφήνεται ελεύθερη. Αρχικά η μάζα m_2 είναι ακίνητη, ενώ η ταχύτητα της m_1 όταν συγκρούεται με τη m_2 είναι v_1. Ζητούνται τα ύψη των δύο σφαιρών ύστερα από την κρούση, όταν η κρούση είναι (α) ελαστική και (β) πλαστική.



Σχήμα 5.16

Λύση:



Σχήμα 5.17

Θεωρούμε σα στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας του βαρυτικού πεδίου το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τα κέντρα μάζας των σωμάτων όταν αυτά βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους. Με αυτές τις προϋποθέσεις, όταν η μάζα m_1 συγκρούεται με τη m_2 έχει ταχύτητα v_1 που προσδιορίζεται από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$m_1 g d = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd}$$

Επειδή πριν και μετά την κεντρική και μετωπική κρούση των σωμάτων οι ταχύτητες έχουν την οριζόντια διεύθυνση, στην εξίσωση διατήρησης της ορμής μπορούμε αντί των διανυσμάτων να χρησιμοποιήσουμε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων.

(α) Όταν η κρούση είναι ελαστική (βλ. σχήμα) εφαρμόζουμε τις αρχές διατήρησης της ορμής και κινητικής ενέργειας

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Με επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων προκύπτουν οι ταχύτητες μετά την κρούση

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{και} \qquad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

όπου για $m_1 < m_2$ η ταχύτητα u_1 έχει τη φορά του σχήματος. Το ύψος στο οποίο ανέρχονται τα δύο σώματα υπολογίζεται για το καθένα ξεχωριστά από την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Θα πρέπει δηλαδή όλη η κινητική τους ενέργεια να μετατραπεί σε δυναμική. Έτσι προκύπτει

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \Rightarrow h_1 = \frac{u_1^2}{2g}$$
$$m_2 g h_2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \Rightarrow h_2 = \frac{u_2^2}{2g}$$

(β) Όταν η κρούση είναι πλαστική, τα δύο σώματα μετά την κρούση ενώνονται και αποκτούν ταχύτητα, u, που υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την κρούση. Έτσι προκύπτει

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$$
$$\Rightarrow u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι δύο σφαίρες ανέρχονται σε ύψος

$$h = \frac{u^2}{2g}$$

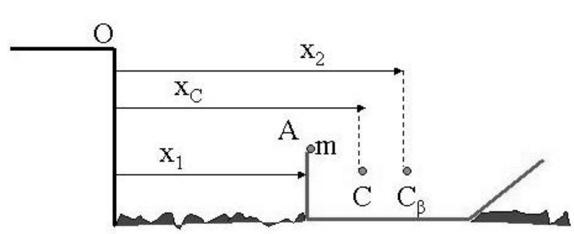
Πρόβλημα 5.27 Ένας άνθρωπος μάζας m βρίσκεται ακίνητος στο άκρο Α μιας βάρκας που έχει μάζα M. Αρχικά η βάρκα είναι ακίνητη. Ο άνθρωπος μετακινείται στο άλλο άκρο Β του σκάφους. Ζητείται η μετατόπιση του σκάφους. Η αντίσταση του νερού είναι αμελητέα. Δίνεται το μήκος l του σκάφους.

Λύση:

Στο σύστημα άνθρωπος-σκάφος δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (η αντίσταση του νερού θεωρείται αμελητέα ενώ το βάρος και η άνωση έχουν μηδενική συνισταμένη). Έτσι η ταχύτητα του κέντρου μάζας παραμένει σταθερή και ίση με μηδέν. Άρα η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος δεν αλλάζει.
Θεωρούμε αρχή αξόνων ένα σταθερό σημείο Ο στην προκυμαία. Όταν ο άνθρωπος βρίσκεται στο άκρο Α της βάρκας, η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος άνθρωπος-βάρκα (x_c) είναι

$$x_C = \frac{m x_1 + M x_2}{m + M} \tag{5.49}$$

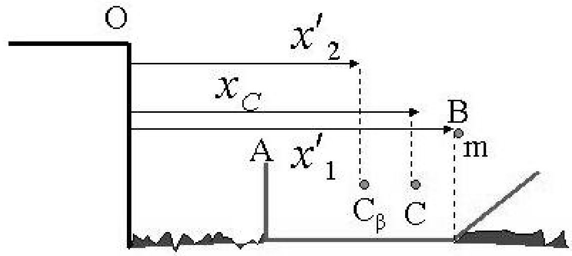
όπου x_1 είναι η θέση του ανθρώπου και x_2 η θέση του κέντρου μάζας της βάρκας (βλ. σχήμα 5.18)



Σχήμα 5.18

Όταν ο άνθρωπος βρίσκεται στο άκρο Β της βάρκας, η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος είναι

$$x'_C = x_C = \frac{m x'_1 + M x'_2}{m + M} \tag{5.50}$$



Σχήμα 5.19

όπου x_1' είναι η νέα θέση του ανθρώπου και x_2' η νέα θέση του κέντρου μάζας της βάρκας (βλ. σχήμα 5.19) Ο άνθρωπος διένυσε το μήκος της βάρκας

$$(\text{AB}) = l = (\text{AC}_\beta) + (\text{C}_\beta\text{B}) \tag{5.51}$$

Αλλά

$$(\text{AC}_\beta) = x_2 - x_1 \quad (\text{από το σχήμα 5.18})$$

και

$$(\text{C}_\beta\text{B}) = x_1' - x_2' \quad (\text{από το σχήμα 5.19})$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, η σχέση (5) γράφεται

$$l = x_2 - x_1 + x_1' - x_2' \tag{5.52}$$

Η βάρκα μετακινήθηκε κατά $x_2' - x_2$. Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (5) και (5) προκύπτει

$$\begin{aligned} mx_1 + Mx_2 &= mx_1' + Mx_2' \\ \Rightarrow x_2' - x_2 &= \frac{m}{M}(x_1 - x_1') \end{aligned} \tag{5.53}$$

Όμως από τη σχέση (5) έχουμε

$$x_1' - x_1 = x_2 - x_2' - l$$

οπότε η σχέση (5) δίνει

$$x_2' - x_2 = \frac{m}{M}(x_2' - x_2' - l) = -\frac{m}{M+m}l$$

Το πρόσημο $(-)$ σημαίνει ότι η μετακίνηση της βάρκας έγινε προς τα αριστερά.

Πρόβλημα 5.28 Μια σφαίρα μάζας $m = 10$ g εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα u προς ένα βαλλιστικό εκκρεμές που η μάζα του ξύλου του είναι $M = 1$ Kg. Το κομμάτι του ξύλου είναι δεμένο μέσω ενός πολύ ελαφρού νήματος μήκους 2 m σε ένα σταθερό σημείο O όπως φαίνεται στο σχήμα 5.20. Το ξύλο είναι ελεύθερο να κινείται σε κατακόρυφο κύκλο. Η σφαίρα σφηνώνεται και σταματά στο ξύλο ακαριαία. Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή της u έτσι ώστε το εκκρεμές να διαγράψει έναν ολόκληρο κύκλο.

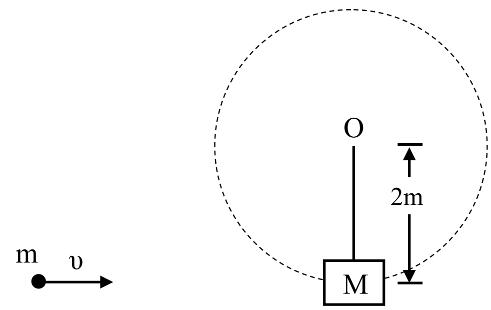
Λύση:

Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση βρίσκεται από την αρχή διατήρησης της ορμής

$$(M+m)V = mu \Leftrightarrow V = \frac{m}{m+M}u$$

Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του θα έχουμε

$$T + (M+m)g = (m+M)\frac{v^2}{R}$$



Σχήμα 5.20

όπου v η ταχύτητα του συσσωματώματος. Το συσσωμάτωμα θα μπορέσει να διαγράψει τον κύκλο αν η ταχύτητά του είναι τουλάχιστον τέτοια ώστε η τάση του νήματος να γίνει μηδέν. Οπότε

$$(M+m)g = (M+m)\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{gR}$$

Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την αρχική θέση του σώματος M, το θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ των θέσεων: Ακριβώς μετά την κρούση-Ανώτατο σημείο τροχιάς, δίνει (δεδομένου ότι το έργο της τάσης του νήματος είναι μηδέν, αφού είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + 2(M+m)gR \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2}\frac{m^2}{(M+m)}u^2 = \frac{1}{2}(M+m)gR + 2(M+m)gR \\
&\Rightarrow u^2 = \frac{(M+m)^2}{m^2}gR + 4\frac{(M+m)^2}{m^2} = 5\frac{(M+m)^2}{m^2}gR \\
&\Rightarrow u = \frac{M+m}{m}\sqrt{5gR} = \frac{1.01\ \text{Kg}}{0.01\ \text{Kg}}\sqrt{100\ \text{m}^2\text{s}^{-2}} = 1010\,\text{m/s}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 5.29 Χαλύβδινη σφαίρα μάζας 1 kg είναι συνδεδεμένη στο ένα άκρο σύρματος μήκους 1 m που περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο γύρω από το άλλο άκρο του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 120 rad s^{-1} ($g = 10\text{m/s}^2$).

(α) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια.

(β) Αν αντί της γωνιακής ταχύτητας είναι η ολική ενέργεια της σφαίρας που παραμένει σταθερή, ποια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και της γωνιακής ταχύτητας μεταξύ του ψηλότερου και χαμηλότερου σημείου του κύκλου; Υποθέστε ότι η τιμή της γωνιακής ταχύτητας που δόθηκε παραπάνω ισχύει για το ψηλότερο σημείο του κύκλου.

Λύση:

(α)

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 = \frac{1}{2}(1\,\text{kg})(120\,\text{s}^{-1})^2(1\,\text{m}^2) = 7200\,\text{J}$$

(β) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι ίση με το έργο του βάρους, δηλ.

$$\Delta E_k = mg(2l) = (\,1\text{kg})(10\,\text{m/s}^2)(2\times 1\,\text{m}) = 20\,\text{J}$$

Αλλά

$$\Delta E_k = E'_k - E_k = \frac{1}{2} m {\omega'}^2 l^2 - E_k$$

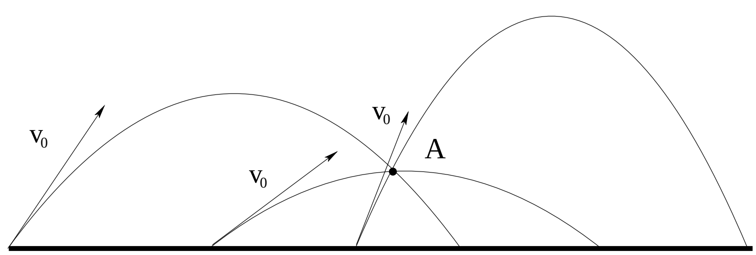
οπότε παίρνουμε

$$\omega' = \sqrt{2(\Delta E_k + E_k)/ml^2} = \sqrt{2(7200\,\mathrm{J} + 20\,\mathrm{J})/(1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m})^2} = 120,17\,\mathrm{s}^{-1}$$

Πρόβλημα 5.30 Τρία πυροβόλα όπλα βάλλουν βλήματα με αρχική ταχύτητα ίδιου μέτρου v_0 κατά τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα βλήματα να περάσουν από το ίδιο σημείο A (όχι απαραίτητα την ίδια χρονική στιγμή).

(α) Προσδιορίστε τη σχέση μεταξύ των μέτρων των ταχυτήτων v_A των βλημάτων στο A.

(β) Μπορείτε να προσδιορίσετε τη διεύθυνση της ταχύτητας των βλημάτων χρησιμοποιώντας μόνο την αρχή διατήρησης της ενέργειας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Σχήμα 5.21

Λύση:

(α) Έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Οπότε

$$E = E_{k,A} + U_A = E_{k,0} \Rightarrow E_{k,A} = E_{k,0} - U_A$$

Άρα

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g h_A \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2 g h_A}$$

που είναι ίδια και για τα τρία βλήματα.

(β) Το ίδιο δεν ισχύει και για τη διεύθυνση της ταχύτητας. Έστω θ_A και θ_0 οι γωνίες που σχηματίζουν οι $\boldsymbol{v}_A$ και $\boldsymbol{v}_0$ με την οριζόντια διεύθυνση. Έχουμε

$$\cos\theta_A = \frac{v_{x,A}}{v_A} = \frac{v_0 \cos\theta_0}{v_A}$$

οπότε αφού οι v_0 και v_A είναι ίδιες για όλα τα βλήματα ενώ οι θ_0 διαφορετικές προκύπτει ότι οι θ_A θα είναι διαφορετικές παρόλο που οι E, $E_{k,A}$ και U_A είναι ίδιες και για τα τρία βλήματα.

Πρόβλημα 5.31 Θεωρήστε ένα σωμάτιο του οποίου η μηχανική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x)$$

με $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ και

$$U(x) = \frac{L^2}{2mx^2} - \frac{k}{x}$$

Θεωρήστε ότι $m = 1\,\mathrm{kg}$ και $k = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}$. Θεωρήστε τις δύο περιπτώσεις $L_1 = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$ και $L_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$.

(α) Προσδιορίστε τις ελάχιστες τιμές $U_{\min,1}$, $U_{\min,2}$ της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ του σωματιδίου και στις δύο περιπτώσεις καθώς και τη θέση των ελαχίστων $x_{\min,1}$ και $x_{\min,2}$.

(β) Πόση ενέργεια χρειάζεται για τη μετάβαση από την κατάσταση ισορροπίας της μιας καμπύλης στην κατάσταση ισορροπίας της άλλης;

(γ) Σε ποιο διάστημα μπορεί το σωμάτιο να κινηθεί όταν έχει ενέργεια $U_{\text{min},2}$ και $L = L_1$; Φτιάξτε στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα δυναμικής ενέργειας του σωματιδίου δείχνοντας καθαρά τα αποτελέσματά σας.

(δ) Προσδιορίστε τη δύναμη (δηλ. μέτρο και φορά) που ασκείται στο σωμάτιο με $L = L_1$ όταν βρίσκεται στη θέση $x_{\text{min},2}$.

Λύση:

$$L_1 = 1\,\text{J}\cdot\text{s} \Rightarrow U_1(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\ \text{J}$$

$$L_2 = \sqrt{2}\,\text{J}\cdot\text{s} \Rightarrow U_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\ \text{J}$$

(α) άρα

$$\frac{\text{d}U_1}{\text{d}x} = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\bigg|_{x=x_{0,1}} = 0 \Rightarrow x_{0,1} = 1\ \text{m}$$

$$\frac{\text{d}U_2}{\text{d}x} = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\bigg|_{x=x_{0,2}} = 0 \Rightarrow x_{0,2} = 2\ \text{m}$$

$$U_1(x_{0,1}) = -\frac{1}{2}\ \text{J}$$

$$U_2(x_{0,2}) = -\frac{1}{4}\ \text{J}$$

(β)

$$\Delta E = U_2(x_{0,2}) - U_1(x_{0,1}) = (-0,25\ \text{J}) - (-0,50\ \text{J}) = 0,25\ \text{J}$$

(γ) Η ολική μηχανική ενέργεια είναι $E = -0.25\text{J}$. Οπότε

$$U_1 = E \Rightarrow \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} = -0,25 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}\ \text{m}$$

Άρα $x_1 = 0.586\text{m}$ και $x_2 = 3.414\text{m}$. (δ) Η δύναμη δίνεται από τη σχέση

$$F_1(x) = -\frac{\text{d}U_1}{\text{d}x} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\ \text{N}$$

οπότε

$$F_1(x_{0,2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\ \text{N} = -\frac{1}{8}\ \text{N}$$

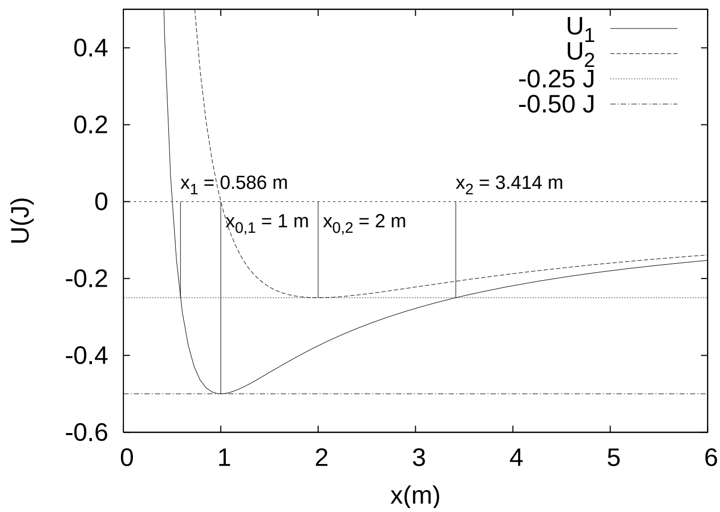
Πρόβλημα 5.32 Σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση πεδίου δυνάμεων που περιγράφεται από τις παρακάτω συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας:

(α) $U(x) = ax^n$

(β) $U(x, y) = axy$

(γ) $U(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$

Σε κάθε περίπτωση εκφράστε το πεδίο δυνάμεων σε διανυσματική μορφή. Τα a, k είναι σταθερές



Σχήμα 5.22

Λύση:

(α)

$$\boldsymbol{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\,\hat{\boldsymbol{x}} = -anx^{n-1}\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

(β)

$$\boldsymbol{F}(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} = -ay\,\hat{\boldsymbol{x}} - ax\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

(γ)

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} = -2k(x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}) = -2k\boldsymbol{r}$$

Πρόβλημα 5.33 Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο κάτω από την επίδραση πεδίου δυνάμεων με δυναμική ενέργεια $U(x,y) = -kx$. Έστω (r,θ) δίνουν τη θέση του σωματιδίου, όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων και θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον άξονα των x με φορά που ορίζεται από την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.23.

(α) Υπολογίστε τις συνιστώσες της δύναμης F_x και F_y που ασκείται στο σωμάτιο ($\boldsymbol{F} = F_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + F_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$).

(β) Υπολογίστε τις συνιστώσες της δύναμης F_r και F_θ, όπου F_r η προβολή της δύναμης στην ακτινική διεύθυνση και F_θ στην κάθετη προς αυτή διεύθυνση με θετική τη φορά που είναι αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

(γ) Δείξτε ότι

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}\,, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

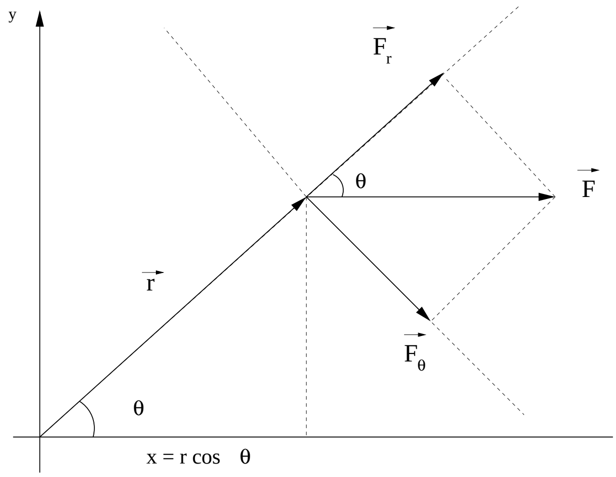
Λύση:

(α)

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = k, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

(β)

$$F_r = F\cos\theta = k\cos\theta, \qquad F_\theta = -F\sin\theta = -k\sin\theta$$



Σχήμα 5.23

Το πρόσημο στην F_θ οφείλεται στην επιλογή της θετικής φοράς να ορίζεται από την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.
(γ)

$$U(x,y) = -kx = -kr\cos\theta$$

Άρα

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = k\cos\theta = F_r$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}(kr\sin\theta) = -k\sin\theta = F_\theta$$

Πρόβλημα 5.34 Το δαχτυλίδι μάζας $m = 5,0\,\mathrm{kg}$ ολισθαίνει πάνω σε λείο μεταλλικό τόξο ABC που αντιστοιχεί σε τόξο κύκλου ακτίνας $1,2\,\mathrm{m}$ όπως φαίνετια στο σχήμα 5.24. Στο δαχτυλίδι ασκούνται δύο δυνάμεις $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{F}'$ που έχουν μέτρα $40\,\mathrm{N}$ και $150\,\mathrm{N}$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα 5.24. Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ παραμένει εφαπτόμενη στον κύκλο. Η $\boldsymbol{F}'$ ασκείται σε σταθερή διεύθυνση και σχηματίζει γωνία $30°$ μοιρών με την οριζόντια διεύθυνση. Και οι δύο δυνάμεις βρίσκονται πάνω στο επίπεδο ABC. Υπολογίστε το ολικό έργο που παράγεται από το σύστημα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα όταν μετατοπίζεται από το A στο B και από το A στο C.

Λύση:

Έχουμε

$$W_{AB} = W_{AB,F} + W_{AB,F'}$$

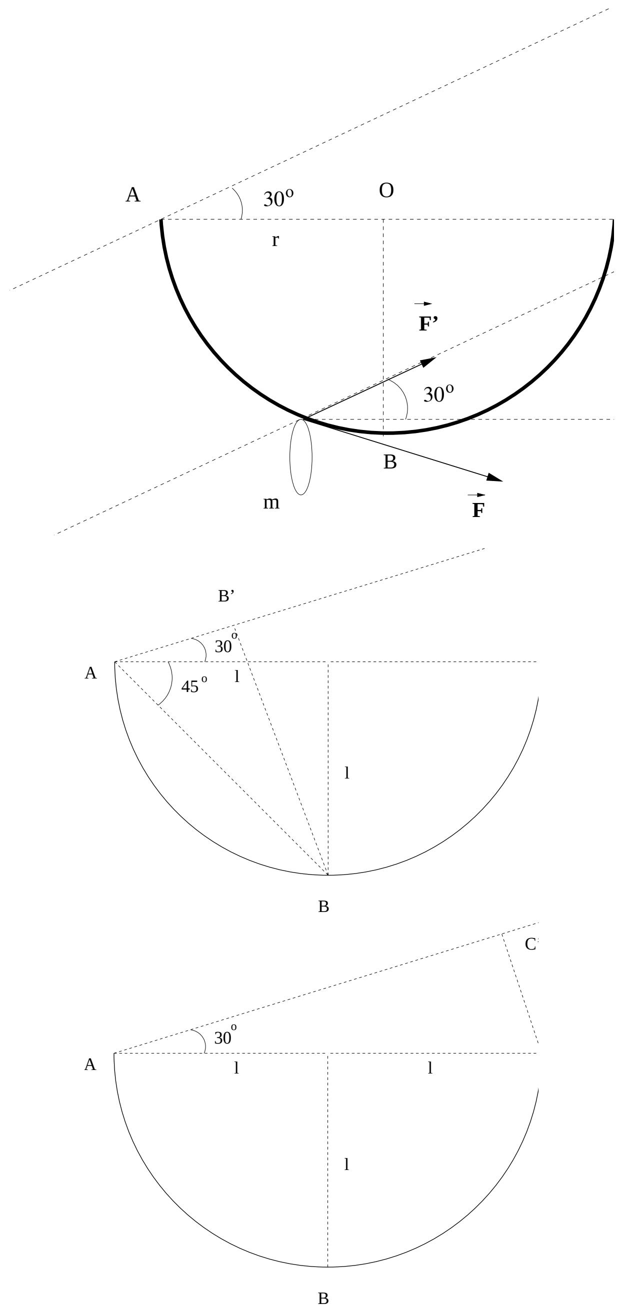
$$W_{AB,F} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B F\,\mathrm{d}r = F\int_A^B \mathrm{d}r = FS_{AB} = F\left(\frac{2\pi}{4}l\right) = 75,40\,\mathrm{J}$$

όπου $S_{AB} = \frac{2\pi}{4}l = 1,885\mathrm{m}$ το μήκος του τόξου AB. Η δύναμη $\boldsymbol{F}'$ είναι σταθερή. Όπως γνωρίζουμε το έργο σταθερής δύναμης (λ.χ. το έργο του βάρους κοντά στην επιφάνεια της γης) είναι ίσο με τη δύναμη επί την (αλγεβρική) προβολή της μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της δύναμης πάνω στη διεύθυνση της δύναμης. Διαλέγοντας τον άξονα των x να συμπίπτει με τη διεύθυνση της $\boldsymbol{F}'$ παίρνουμε

$$W_{AB,F'} = \int_A^B \boldsymbol{F}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{x_A}^{x_B} F'\,\mathrm{d}x = F'\int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x = F'(x_B - x_A)$$

Αλλά επειδή $x_A = 0$ και $(AB) = \sqrt{l^2+l^2} = \sqrt{2}l$ έχουμε

$$x_B = (AB)\cos(45° + 30°) = \sqrt{2}l\cos(75°) = 0.3660l = 0,439\mathrm{m}$$



Σχήμα 5.24

οπότε παίρνουμε

$$W_{AB,F'} = 65,88\text{J}$$

Τελικά

$$W_{AB} = 75.40\text{J} + 65.88\text{J} = 141,28\text{J}$$

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε

$$W_{AC} = W_{AC,F} + W_{AC,F'} = FS_{AC} + F'(x_C - x_A)$$

όπου αντικαθιστώντας $S_{AC} = \pi l = 3,770\text{m}$ και $x_C = (AC)\cos 30° = 2l\frac{\sqrt{3}}{2} = 2,078\,\text{m}$ παίρνουμε

$$W_{AC} = 40 \times 3,770 + 150 \times 2,078\ \text{J} = 462,5\,\text{J}$$

Πρόβλημα 5.35 Δίνεται η δύναμη $\boldsymbol{F} = k\,\hat{\jmath} \times \boldsymbol{v}$ που ασκείται πάνω σε σωμάτιο μάζας m, όπου $\hat{\jmath}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση στη θετική διεύθυνση του άξονα των y και $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ η ταχύτητα του σωματιδίου.

(α) Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου παραμένει σταθερή.

(β) Ποιο είναι το έργο που παράγει η δύναμη;

(γ) Ποια η επίδραση της δύναμης πάνω στο διάνυσμα της ταχύτητας;

Λύση:

(α)
$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = k(\hat{\jmath}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = k(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v})\cdot\hat{\jmath}\,\mathrm{d}t = 0$$
Χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα του τριπλού γινομένου
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot c = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot b$$
Άρα
$$W_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}W = 0 \Rightarrow \Delta E_{k,AB} = 0$$
(β) Όπως είπαμε παραπάνω $W_{AB} = 0$ για οποιαδήποτε A και B και οποιαδήποτε διαδρομή τα ενώνει.
(γ) Εφόσον $\Delta E_{k,AB} = 0$ το μέτρο της ταχύτητας δε μεταβάλλεται. Εφόσον $\boldsymbol{F} = k\,\hat{\jmath}\times\boldsymbol{v}$ έχουμε $\boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{v}$ οπότε η $\boldsymbol{F}$ μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνση της $\boldsymbol{v}$ και δρα ως κεντρομόλος*.

Πρόβλημα 5.36 Σωματίδιο μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ και συγκρούεται ελαστικά με σωματίδιο μάζας m_2 πού είναι ακίνητο ώς προς το σύστημα του εργαστηρίου L. Παρατηρητής κινείται με ταχύτητα
$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1\boldsymbol{v}}{m_1+m_2}$$
ως προς το εργαστήριο και παρατηρεί στο σύστημά του C την ίδια κρούση.

(α) Δείξτε ότι στο σύστημα C τα δύο σωμάτια πριν και μετά την κρούση κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις.

(β) Δείξτε ότι οι γωνίες θ και ϕ που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του m_1 μετά την κρούση σε σχέση με τη αρχική διεύθυνση της κίνησής του στα συστήματα L και C αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση
$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \frac{m_1}{m_2}}$$

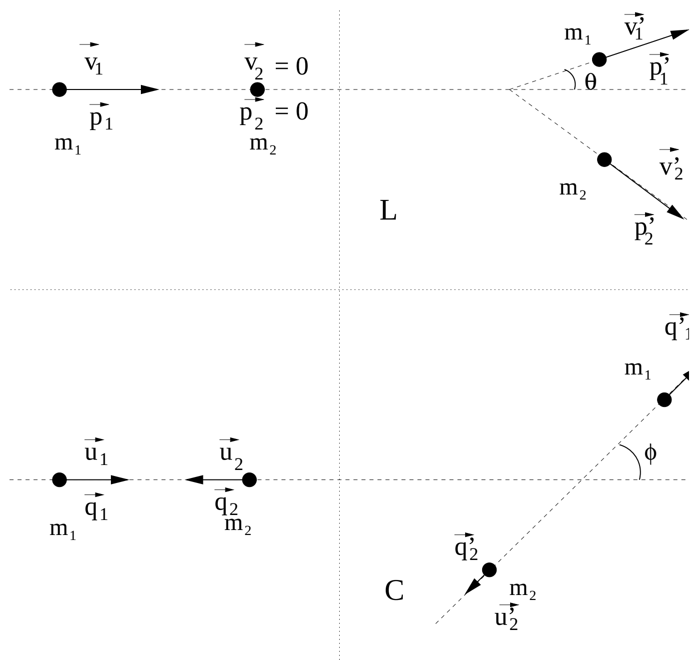
(γ) Βρίσκεται πειραματικά ότι η μέγιστη εκτροπή σωματιδίων άλφα από το υδρογόνο (πρακτικά δηλ. από το πρωτόνιο του πυρήνα του) στο σύστημα αναφοράς που το υδρογόνο είναι ακίνητο είναι περίπου 15^o. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα εκτιμήστε το λόγο των μαζών του σωματιδίου άλφα ως προς το υδρογόνο.

Λύση:

(α)

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \frac{m_1\boldsymbol{v}}{m_1+m_2} = \frac{m_2\boldsymbol{v}}{m_1+m_2}$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{V} = -\frac{m_1\boldsymbol{v}}{m_1+m_2}$$

*Παρατήρηση: Όταν η $\boldsymbol{v}$ βρίσκεται στο επίπεδο x-z το σωμάτιο κινείται πάνω σε κύκλο που βρίσκεται στο επίπεδο αυτό. Στη γενική περίπτωση διαγράφει ελικοειδή τροχιά με κατεύθυνση τον $\pm y$ άξονα. Τέτοιου τύπου δύναμη δρα πάνω σε κινούμενο φορτισμένο σωμάτιο από ομογενές μαγνητικό πεδίο.



Σχήμα 5.25

Άρα τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1$ και $\boldsymbol{u}_2$ είναι αντιπαράλληλα

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{u}_1$$

Η συνολική ορμή στο σύστημα C πριν την κρούση είναι

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = m_1\frac{m_2\boldsymbol{v}}{m_1+m_2} - m_2\frac{m_1\boldsymbol{v}}{m_1+m_2} = \boldsymbol{0}$$

Αφού η ορμή στο σύστημα C διατηρείται θα έχουμε

$$\boldsymbol{q}_1' + \boldsymbol{q}_2' = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{q}_1' = -\boldsymbol{q}_2'$$

άρα οι ταχύτητες $\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{q}_1'/m_1$ και $\boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{q}_2'/m_2$ είναι αντιπαράλληλες. Συνοψίζοντας

$$\boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_2 \qquad \boldsymbol{q}_1' = -\boldsymbol{q}_2'$$

(β) Έχουμε

$$\tan\theta = \frac{p_{1y}'}{p_{1x}'}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} p_{1x}' &= m_1 v_{1x}' = m_1(u_{1x}' + \frac{m_1 v}{m_1+m_2}) = q_{1x}' + \frac{m_1 p}{m_1+m_2} \\ p_{1y}' &= m_1 v_{1y}' = m_1(u_{1y}' + 0) = q_{1y}' \end{aligned}$$

Άρα

$$\tan\theta = \frac{q_{1y}'}{q_{1x}' + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}p} = \frac{q_1'\sin\phi}{q_1'\cos\phi + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}p} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dfrac{p}{q_1'}} \tag{5.54}$$

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_2 \Rightarrow q \equiv |\boldsymbol{q}_1| = |\boldsymbol{q}_2|$$
$$\boldsymbol{q}_1' + \boldsymbol{q}_2' = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{q}_1' = -\boldsymbol{q}_2' \Rightarrow q\,' \equiv |\boldsymbol{q}_1'| = |\boldsymbol{q}_2'|$$

και από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας (ελαστική κρούση) έχουμε

$$\frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{{q_1'}^2}{2m_1} + \frac{{q_2'}^2}{2m_2} \Rightarrow \frac{q^2}{2m_1} + \frac{q^2}{2m_2} = \frac{q\,'^2}{2m_1} + \frac{q\,'^2}{2m_2} \Rightarrow q = q\,'$$

Άρα

$$q_1' = q\,' = q = |\boldsymbol{q}_2| = |m_2 \boldsymbol{u}_2| = \left| m_2 \left(-\frac{m_1 \boldsymbol{v}}{m_1 + m_2} \right) \right| = \left| \frac{m_2 \boldsymbol{p}}{m_1 + m_2} \right| = \frac{m_2 p}{m_1 + m_2}$$

Συνεπώς

$$\frac{p}{q_1'} = \frac{p}{\dfrac{m_2 p}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \tag{5.55}$$

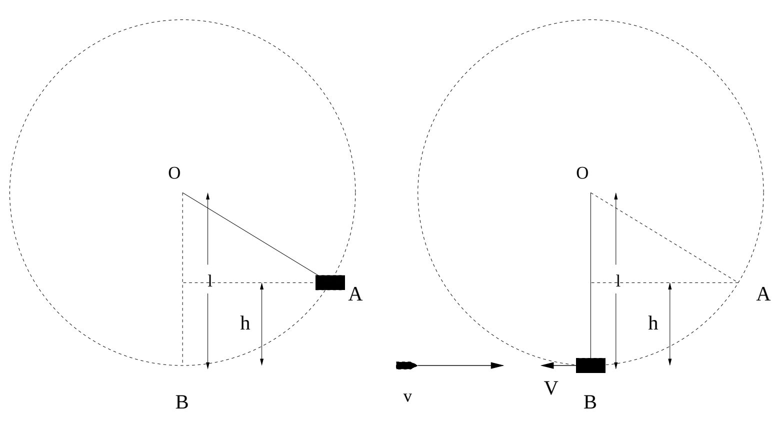
Η (5) συνεπάγεται από τη (5):

$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\dfrac{m_1 + m_2}{m_2}} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \dfrac{m_1}{m_2}} \tag{5.56}$$

(γ) Η μέγιστη εκτροπή είναι όταν $\phi = \pi/2$. Τότε η σχέση (5) δίνει

$$\tan\theta_{\max} = \frac{1}{0 + \dfrac{m_1}{m_2}} = \frac{m_2}{m_1} \approx 0,268 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \approx 3,73$$

Πρόβλημα 5.37 Σφαίρα μάζας m και ταχύτητας $\boldsymbol{v} = v\,\hat{\imath}$ περνάει μέσα από το βαρίδι εκκρεμούς μάζας M όταν αυτό βρίσκεται στο σημείο Β, και βγαίνει από αυτό με ταχύτητα $\boldsymbol{v}' = (v/3)\,\hat{\imath}$. Το βαρίδι του εκκρεμούς βρίσκεται στην άκρη αβαρούς νήματος μήκους l και αρχικά ήταν ακίνητο στη θέση Α σε ύψος h ως προς το Β. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της v ώστε το βαρίδι του εκκρεμούς να διαγράψει ολόκληρο κύκλο;



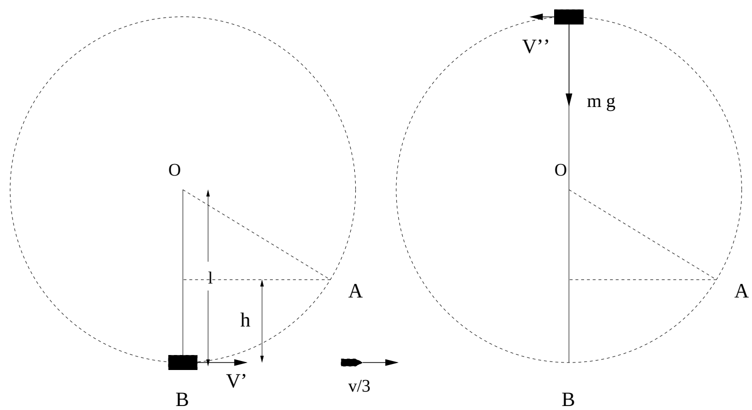
Λύση:

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των σημείων A, B δίνει

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

Η ορμή διατηρείται κατά την κρούση οπότε η ταχύτητα V' του βαριδιού αμέσως μετά την κρούση θα δίνεται από τη σχέση:

$$mv - MV = m\frac{v}{3} + MV' \Rightarrow V' = \frac{2}{3}\left(\frac{m}{M}\right)v - \sqrt{2gh} \tag{5.57}$$



Σχήμα 5.26: *Άσκηση 9*

Αν η ταχύτητα του βαριδιού στο ανώτατο σημείο της τροχιάς είναι V'', τότε η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μας δίνει:

$$\frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}MV''^2 + Mg(2l) \Rightarrow V''^2 = V'^2 - 4gl \tag{5.58}$$

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει η V'' ώστε να μη χαλαρώσει το νήμα είναι όταν το βάρος του βαριδιού είναι η κεντρομόλος δύναμη στο ανώτατο σημείο της τροχιάς. Αυτή αντιστοιχεί και στη ζητούμενη ελάχιστη τιμή της v. Η συνθήκη αυτή δίνει:

$$M\frac{V''^2}{l} = Mg \Rightarrow V''^2 = gl \tag{5.59}$$

Από τις σχέσεις (5) και (5) παίρνουμε:

$$gl = V'^2 - 4gl \Rightarrow V' = \sqrt{5gl} \tag{5.60}$$

Από τις σχέσεις (5) και (5) παίρνουμε

$$\sqrt{5gl} = \frac{2}{3}\left(\frac{m}{M}\right)v - \sqrt{2gh} \Rightarrow v = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{m}\right)\left(\sqrt{5gl} + \sqrt{2gh}\right)$$

Πρόβλημα 5.38 Έχει βρεθεί πειραματικά ότι κατά τη μετωπική κρούση[†] δύο στερεών σφαιρών η σχετική ταχύτητα της σφαίρας 2 ως προς τη σφαίρα 1 μετά την κρούση $v'_{12} = v'_2 - v'_1$ σχετίζεται με την αντίστοιχη σχετική ταχύτητα πριν την κρούση $v_{12} = v_2 - v_1$ με τη σχέση

$$v'_{12} = -e\,v_{12}$$

Η τιμή του *συντελεστή αποκατάστασης*, e, είναι μεταξύ 0 και 1. Αυτό το αποτέλεσμα ανακαλύφθηκε από το Νεύτωνα και ισχύει μόνο προσεγγιστικά. Επιπλέον η ορμή διατηρείται κατά την κρούση. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(α) Οι ταχύτητες μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v'_1 = \frac{\mu v_2(1+e)}{m_1} + \frac{\mu v_1(1 - e m_2/m_1)}{m_2} \qquad v'_2 = \frac{\mu v_1(1+e)}{m_2} + \frac{\mu v_2(1 - e m_1/m_2)}{m_1}$$

όπου

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

[†]Θα θεωρήσετε δηλ. ότι οι σφαίρες κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση. Οι ποσότητες v_1, v_2, $v_{12}\ldots$ είναι αλγεβρικές, δηλ. αναφέρονται στις συνιστώσες των αντίστοιχων διανυσμάτων πάνω στον άξονα που ορίζεται από τη διεύθυνση κίνησης και παίρνουν θετικές ή αρνητικές τιμές ανάλογα με τη φορά των αντίστοιχων διανυσμάτων.

(β) Έστω παρατηρητής C που παρατηρεί την κρούση κινούμενος με ταχύτητα $V = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$. Η ποσότητα $Q = E_k^{(C)'} - E_k^{(C)}$ στο σύστημα του C μετράει την απώλεια ενέργειας του συστήματος και είναι‡

$$Q = -\frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^2)\mu v_{12}^2$$

Υπόδειξη:

$$E_k^{(C)} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

όπου $u_1 = v_1 - V$ *και* $u_2 = v_2 - V$. *Αντίστοιχα*

$$E_k^{(C)'} = \frac{1}{2} m_1 (u_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_2')^2$$

(γ) Ποια είναι η τιμή του e όταν η κρούση είναι ελαστική και ποια όταν είναι πλαστική (τα δύο σωμάτια κινούνται μαζί);

Λύση:

(α) Από τον ορισμό του e παίρνουμε

$$v_{12}' = -e v_{12} \Rightarrow (v_2' - v_1') = -e(v_2 - v_1)$$

και μαζί με τη διατήρηση της ορμής παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} m_1 v_1' + m_2 v_2' &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ -v_1' + v_2' &= e v_1 - e v_2 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών του παραπάνω συστήματος είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = m_1 + m_2$$

Άρα η λύση του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{vmatrix} m_1 v_1 + m_2 v_2 & m_2 \\ e v_1 - e v_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 e v_1 + m_2 e v_2) \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left[(m_1 - e m_2) v_1 + (m_2 + m_2 e) v_2 \right] \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left[m_1 \left(1 - e\frac{m_2}{m_1} \right) v_1 + m_2 (1 + e) v_2 \right] \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(1 - e\frac{m_2}{m_1} \right) \frac{v_1}{m_2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + e) \frac{v_2}{m_1} \\ &= \frac{\mu v_2 (1 + e)}{m_1} + \frac{\mu v_1 \left(1 - e\frac{m_2}{m_1} \right)}{m_2} \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή αντικαταστήσαμε

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

‡Παρατήρηση: Μπορείτε να αποδείξετε ότι η ποσότητα Q θα ήταν η ίδια αν την ορίζαμε στο σύστημα του εργαστηρίου.

Όμοια παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
v_2' &= \frac{1}{m_1+m_2}\begin{vmatrix} m_1 & m_1v_1+m_2v_2 \\ -1 & ev_1-ev_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1ev_1 - em_1v_2 + m_1v_1 + m_2v_2\right] \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1(1+e)v_1 + (m_2-em_1)v_2\right] \\
&= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+e)\frac{v_1}{m_2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(1-e\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{v_2}{m_1} \\
&= \frac{\mu v_1(1+e)}{m_2} + \frac{\mu v_2\left(1-e\frac{m_1}{m_2}\right)}{m_1}
\end{aligned}
$$

(β) Από τον ορισμό του Q παίρνουμε

$$Q = \frac{1}{2}m_1{u_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{u_2'}^2 - \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

Αντικαθιστούμε τις ταχύτητες

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1 - V = v_1 - \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2} = -\frac{m_2v_{12}}{m_1+m_2} \\
u_2 &= v_2 - V = v_2 - \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(v_2-v_1)}{m_1+m_2} = \frac{m_2v_{12}}{m_1+m_2} \\
u_1' &= v_1' - V' = v_1' - \frac{m_1v_1'+m_2v_2'}{m_1+m_2} = \frac{m_2(v_1'-v_2')}{m_1+m_2} = -\frac{m_2v_{12}'}{m_1+m_2} \\
u_2' &= v_2' - V' = v_2' - \frac{m_1v_1'+m_2v_2'}{m_1+m_2} = \frac{m_2(v_2'-v_1')}{m_1+m_2} = \frac{m_2v_{12}'}{m_1+m_2}
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2{v_{12}'}^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{m_1^2m_2{v_{12}'}^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2v_{12}^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{1}{2}\frac{m_1^2m_2v_{12}^2}{(m_1+m_2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(m_1+m_2){v_{12}'}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(m_1+m_2)v_{12}^2 \\
&= \frac{1}{2}\mu({v_{12}'}^2 - v_{12}^2) = \frac{1}{2}\mu(\mathrm{e}^2v_{12}^2 - v_{12}^2) \\
&= \frac{1}{2}\mu(1-\mathrm{e}^2)v_{12}^2
\end{aligned}
$$

(γ) Όταν η κρούση είναι πλαστική τα δύο σώματα κινούνται μαζί και $v_{12}' = 0 \Rightarrow e = 0$. Τότε η απώλεια ενέργειας παίρνει τη μέγιστη τιμή

$$Q = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2$$

Όταν η κρούση είναι ελαστική δεν υπάρχουν απώλειες κινητικής ενέργειας των σωματιδίων και περιμένουμε ότι $Q = 0 \Rightarrow e = 1$ (αρκεί για απόδειξη του ζητούμενου). Αυτό μπορούμε να το δούμε αναλυτικά από τις σχέσεις διατήρησης ορμής και κιν. ενέργειας

$$
\begin{aligned}
m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \\
\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2
\end{aligned}
$$

που δίνει

$$m_1(v_1' - v_1) = -m_2(v_2' - v_2)$$

$$m_1({v_1'}^2 - v_1^2) = -m_2({v_2'}^2 - v_2^2)$$

από όπου αναπτύσσοντας τη διαφορά τετραγώνων παίρνουμε:

$$m_1(v_1' - v_1) = -m_2(v_2' - v_2)$$
$$m_1(v_1' - v_1)(v_1' + v_1) = -m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$v_1' + v_1 = v_2' + v_2 \Rightarrow v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1) \Rightarrow v_{12}' = -v_{12} \Rightarrow e = 1$$

Παρατήρηση: Το Q μετράει την απώλεια κιν. ενέργειας και στο σύστημα L

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(u_1 + V)^2 + \frac{1}{2}m_2(u_2 + V)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + (m_1 u_1 + m_2 u_2)V \\ &= E_k^{(C)} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \end{aligned}$$

Στην προτελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (γεγονός που διαφοροποιεί το σύστημα C από τα υπόλοιπα)

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1\left(-\frac{m_2 v_{12}}{m_1 + m_2}\right) + m_2\left(\frac{m_1 v_{12}}{m_1 + m_2}\right) = 0$$

Άρα

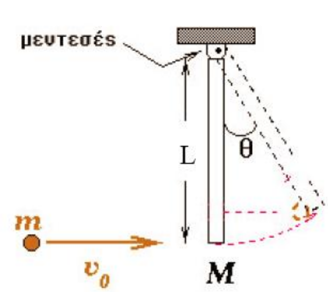
$$\left.\begin{array}{l} E_k = E_k^{(C)} + \frac{1}{2}MV^2 \\ E_k' = E_k^{(C)\prime} + \frac{1}{2}MV'^2 \\ V = V' \end{array}\right\} \Rightarrow E_k - E_k' = E_k^{(C)} - E_k^{(C)\prime} = Q$$

Η σχέση $V = V'$ προκύπτει επειδή $V = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$ και $V' = (m_1 v_1' + m_2 v_2')/(m_1 + m_2)$ και $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ λόγω της διατήρησης της ορμής κατά την κρούση.

Πρόβλημα 5.39 Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L κρέμεται από το ταβάνι και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβή από ειδικό "μεντεσέ" (βλ. σχήμα 5.27). Ένα μικρό σώμα μάζας m και αρχικής ταχύτητας v_0 συγκρούεται με τη ράβδο στο κατώτερο άκρο της και κολλάει σε αυτή (ενσωματώνεται). Να βρεθούν:

(α) η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-σώμα αμέσως μετά την κρούση και

(β) η μέγιστη γωνία θ που διαγράφει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και η ροπή αδρανείας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το άκρο της $I = (1/3)ML^2$.



Σχήμα 5.27

Λύση:

Η στροφορμή του συστήματος ράβδου-σώματος ως προς το μεντεσέ διατηρείται:

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

Η αρχική στροφορμή $L_{\text{αρχ}} = L_m + L_M = mv_0L + 0$. Μετά τη συσσωμάτωση $L_{\text{τελ}} = L_{mM}\omega$, όπου βεβαίως I_{mM} είναι η ροπή αδρανείας του συσσωματώματος ράβδου-σώματος και ω η ζητούμενη γωνιακή ταχύτητα. Από το βιβλίο (σελ. 196, τόμος Β) είναι σαφές ότι η ροπή αδρανείας του συσσωματώματος είναι:

$$I_{mM} = \frac{1}{2}ML^2 + mL^2 = \frac{(M+3m)L^2}{3}$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε $L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$:

$$mv_0L = \frac{(M+3m)L^2\omega}{3},$$

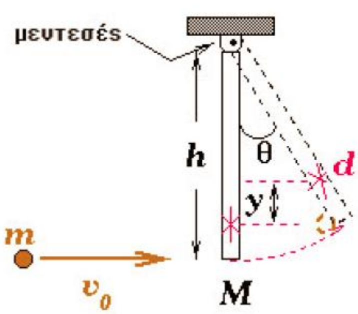
από το οποίο προκύπτει η γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \frac{3mv_0}{(M+3m)L} \tag{5.61}$$

Η ενέργεια διατηρείται και επομένως μπορούμε να βρούμε το ύψος στο οποίο θα ανέλθει το κέντρο μάζας του συσσωματώματος. Το κέντρο μάζας βρίσκεται εύκολα ως:

$$d = \frac{(M+2m)L}{2(M+m)},$$

όπου d είναι βεβαίως η απόσταση του κέντρου μάζας από το μεντεσέ (βλ. σχήμα).



Σχήμα 5.28

Στη μέγιστη γωνία γ το κέντρο μάζας ανέρχεται κατά απόσταση y. Επομένως

$$(M+m)gy = \frac{1}{2}I_{mM}\omega^2$$

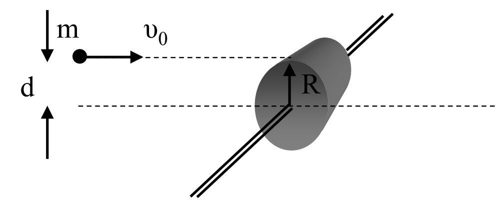
στην οποία αντικαθιστώντας το ω με την εξίσωση (5) που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να υπολογίσουμε το y

$$y = \frac{3m^2v_0^2}{2(M+m)(M+3m)g}$$

από το σχήμα 5.28 είναι σαφές ότι $\cos\theta = (d-y)/d$ και αντικαθιστώντας την τιμή του d και y που υπολογίσαμε πιο πριν έχουμε

$$\cos\theta = \frac{d-y}{d} = 1 - \frac{3m^2v_0^2}{(M+2m)(M+3m)gL}$$

Πρόβλημα 5.40 Ένα βλήμα μάζας m και αρχικής ταχύτητας υ_0 εκτοξεύεται εναντίον κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.29. Ο κύλινδρος βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας και είναι εξαρτημένος σε ένα σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Η τροχιά του βλήματος είναι κάθετη στον άξονα και σε απόσταση $d < R$ πάνω από τον άξονα. Το βλήμα χτυπάει τον κύλινδρο και ενσωματώνεται σάυτόν. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σύστημα κύλινδρος-βλήμα. Αγνοήστε το βάρος του βλήματος. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι $I = 1/2MR^2$.



Σχήμα 5.29

Λύση:

Αν αγνοήσουμε το βάρος του βλήματος, η συνισταμένη εξωτερική ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο του άξονα του κυλίνδρου είναι μηδενική. Επομένως η στροφορμή του συστήματος είναι ίδια πριν και μετά την κρούση. Πριν από την κρούση μόνο το βλήμα έχει στροφορμή με μέτρο $L_1 = m\upsilon_0 d$. Μετά την κρούση η ολική στροφορμή του συστήματος είναι

$$L_2 = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

Επομένως η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται ως

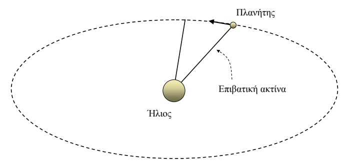
$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow m\upsilon_0 d = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega \quad \Rightarrow \omega = \frac{m\upsilon_0 d}{1/2MR^2 + mR^2}$$

Πρόβλημα 5.41 Ένας πλανήτης γυρίζει γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτική τροχιά όπως δείχνει το σχήμα 5.30. Υποθέστε ότι η βαρυτική έλξη είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στον πλανήτη και ότι ο ήλιος είναι ακίνητος. Αποδείξτε το δεύτερο νόμο του Kepler που λέει ότι η επιβατική ακτίνα (αν θεωρηθεί ο ήλιος ως αρχή των συντεταγμένων) του πλανήτη σαρώνει ίσες επιφάνειες σε ίσα χρονικά διαστήματα (δηλαδή $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t =$ σταθερό, όπου $\mathrm{d}S$ η στοιχειώδης επιφάνεια που σαρώνεται σε χρόνο $\mathrm{d}t$).

Λύση:

Θεωρώντας τον ήλιο ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων η ροπή των δυνάμεων που ασκείται στον πλανήτη είναι $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, όπου $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα θέσης του πλανήτη και $\boldsymbol{F}$ η βαρυτική έλξη. Όμως $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$ γιατί τα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$ είναι συγγραμμικά. Επομένως η στροφορμή του πλανήτη παραμένει σταθερή αφού $0 = \boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$. Η στροφορμή εκφράζεται μέσω του διανύσματος θέσης $\boldsymbol{r}(t)$ και ορμής $\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}(t)$ ως ακολούθως

$$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{v}(t) = mv(t)r(t)\hat{k} = \text{ σταθερό} \tag{5.62}$$



Σχήμα 5.30

με $\hat{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς και με φορά προς τα πάνω. Αν θεωρήσουμε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα $\mathrm{d}t$ όπου ο πλανήτης κινείται κατά $\mathrm{d}l = v(t)\mathrm{d}t$ και η επιβατική ακτίνα είναι $r(t)$, η μεταβολή της επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου είναι

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r(t)\mathrm{d}l = \frac{1}{2}r(t)v(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r(t)v(t)$$

το οποίο σύμφωνα με την εξίσωση (5) είναι σταθερό.

6

Αρμονικός Ταλαντωτής

Πρόβλημα 6.1 Σωματίδιο μάζας m κινείται με την επίδραση της δύναμης που έχει δυναμική ενέργεια

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 \boldsymbol{r}^2$$

Να δείξετε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα σ' ένα επίπεδο και να καθορίσετε με βάσει τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Αν κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ κάθετη προς το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_0$, να δείξετε ότι τούτο διαγράφει κάποια τροχιά που η πολική του ακτίνα κυμαίνεται μεταξύ των τιμών

$$r_0 \leq r \leq \frac{v_0}{\omega}$$

Λύση:

Από τη δυναμική ενέργεια, U, θα έχουμε τη δύναμη

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}^2$$

Αν $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ είναι η ορμή του σωματιδίου τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ θα δώσει για την παράγωγο ως προς το χρόνο

$$\dot{\boldsymbol{N}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} - m\omega^2 \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0$$

Άρα το διάνυσμα $\boldsymbol{N}$ παραμένει σταθερό με το χρόνο. Εφ' όσον το $\boldsymbol{N}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα της θέσης

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

συνεπώς το $\boldsymbol{r}$ θα βρίσκεται στο επίπεδο το κάθετο στο $\boldsymbol{N}$ και δεν θα μεταβάλλεται με το χρόνο. Επιπλέον και για το αρχικό διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_0$ θα ισχύει

$$\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

Το επίπεδο το κάθετο στο $\boldsymbol{N}$ θα καθοριστεί από τη σχέση που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = 0 \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

δηλαδή

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

Η εξίσωση κίνησης για την ελκτική δύναμη $\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}$ θα είναι

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 \boldsymbol{r} \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 \boldsymbol{r} = 0$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον αρμονικό ταλαντωτή, που έχει λύση της μορφής

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}' \sin(\omega t + \phi)$$

όπου $\boldsymbol{A}', \phi$ είναι σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Η παραπάνω λύση μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{A}\sin(\omega t) + \boldsymbol{B}\cos(\omega t)$$

όπου οι νέες σταθερές $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ μπορούν να εκφραστούν μέσω των σταθερών $\boldsymbol{A}', \phi$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'\cos\phi, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}'\sin\phi$$

Για την αρχική συνθήκη $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{B}$$

και με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης $\boldsymbol{v}(0) = \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{v}_0$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 = \omega\boldsymbol{A} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega}$$

όπου η ταχύτητα είναι

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \omega\boldsymbol{A}\cos(\omega t) - \omega\boldsymbol{B}\sin(\omega t)$$

Με τον ανωτέρω προσδιορισμό των σταθερών $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ το διάνυσμα θέσης θα είναι

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega}\sin(\omega t) + \boldsymbol{r}_0\cos(\omega t)$$

Το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{r}$ με τον εαυτό του θα είναι

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = r^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t + r_0^2\cos(\omega t) + \frac{2}{\omega}\boldsymbol{v_0}\cdot\boldsymbol{r}_0\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

Μας δίνεται ότι $\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{r}_0 = 0$ (εφ' όσον το σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ κάθετη προς το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_0$), άρα

$$r^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t) + r_0^2\cos(\omega t) = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\sin^2(\omega t) + r_0^2\left(1 - \sin^2(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2(\omega t) = \frac{r^2 - r_0^2}{(v_0/\omega)^2 - r_0^2}$$

αλλά για το ημίτονο ισχύει $0 \le \sin^2(\omega t) \le 1$, συνεπώς

$$0 \le \frac{r^2 - r_0^2}{(v_0/\omega)^2 - r_0^2} \le 1 \quad \Rightarrow r_0^2 \le r^2 \le \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r_0 \le r \le \frac{v_0}{\omega}$$

Πρόβλημα 6.2 Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης απλού εκκρεμούς μάζας m του οποίου το νήμα είναι ελαστικό φυσικού μήκους l και σταθεράς ελατηρίου C θεωρώντας ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα στο κατακόρυφο επίπεδο.

Λύση:

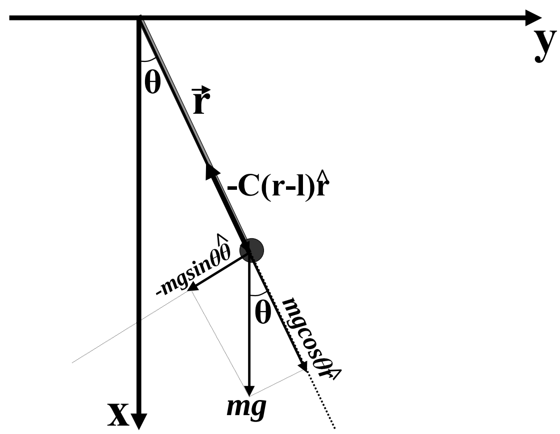
Θα αναλύσουμε το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες, όπου η επιτάχυνση, $\boldsymbol{a}$, εκφράζεται ως εξής

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

με τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) όπως φαίνεται στο σχήμα.
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι:
- το βάρος $\boldsymbol{B} = mg\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - mg\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$,
- και η ελκτική δύναμη του ελαστικού νήματος (δύναμη του Hooke), $\boldsymbol{F}_h = -C(r - l)\hat{\boldsymbol{r}}$, όταν υπάρχει μια επιμήκυνση $r > l$ με φυσικό μήκος l.

Άρα η εξίσωση κίνησης θα δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton όπου η συνολική δύναμη είναι $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_h$

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_h = m\boldsymbol{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



Σχήμα 6.1

$$\Rightarrow m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}}+m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}=mg\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-mg\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}-C(r-l)\hat{\boldsymbol{r}}$$

και συνεπώς θα έχουμε δύο διαφορικές εξισώσεις όταν εξισώσουμε τους συντελεστές των δύο πολικών μοναδιαίων διανυσμάτων

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=mg\cos\theta-C(r-l)$$

$$\Rightarrow \ddot{r}-r\dot{\theta}^2+\frac{C}{m}C(r-l)-g\cos\theta=0$$

και

$$m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=-mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+g\sin\theta=0$$

Πρόβλημα 6.3 Η κίνηση μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση κυβερνάται από τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{x}=-\frac{1}{\tau}\dot{x}-\omega_0^2x$$

όπου οι τ, ω είναι θετικές σταθερές. Δείξατε ότι αν $1/2\tau<\omega_0$ η κίνηση θα είναι ταλαντούμενη με αποσβενώμενο πλάτος και να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του ταλαντωτή ως συνάρτηση του χρόνου δεδομένου ότι $x(0)=x_0$ και $v(0)=0$.

Λύση:

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$\ddot{x}+\frac{1}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

Ορίζοντας τον τελεστή της παραγώγου $D\equiv d/\mathrm{d}t$, η διαφορική εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\left(D^2+\frac{1}{\tau}D+\omega_0^2\right)x(t)=0$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού τριωνύμου $D^2+D/\tau+\omega_0^2=0$ θα καθορίσουν τη λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού τριωνύμου θα είναι μιγαδικές

$$\rho_{1,2}=\frac{-(1/\tau)\pm\left[(1/\tau)^2-4\omega_0^2\right]^{1/2}}{2} \qquad \Rightarrow \rho_{1,2}=-\frac{1}{2\tau}\pm\frac{i}{2\tau}\sqrt{4\omega_0^2\tau^2-1}$$

εφ' όσον $1-4\omega_0^2\tau^2<0$.

Ορίζουμε μια νέα θετική σταθερά

$$\Delta = \sqrt{4\omega_0^2\tau^2 - 1}$$

συνεπώς η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης κίνησης θα είναι

$$x(t) = A_1 \mathrm{e}^{-t/2\tau + i\Delta/2\tau} + A_2 \mathrm{e}^{-t/2\tau - i\Delta/2\tau} = \mathrm{e}^{-t/2\tau}(A_1 \mathrm{e}^{i\Delta/2\tau} + A_2 \mathrm{e}^{-i\Delta/2\tau})$$

όπου οι σταθερές $A_1,\ A_2$ στη γενική τους μορφή είναι μιγαδικές σταθερές. Με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών σχέσεων Euler

$$\mathrm{e}^{\pm i\Delta/2\tau} = \cos\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right) \pm i \sin\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)$$

η λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης μπορεί να γραφτεί

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-t/2\tau} \sin\left(\frac{\Delta}{2\tau}t + \phi\right)$$

και η ταχύτητα θα γραφτεί ως εξής

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{A}{2\tau}\mathrm{e}^{-t/2\tau}\left[\sin\left(\frac{\Delta}{2\tau}t + \phi\right) - \Delta\cos\left(\frac{\Delta}{2\tau}t + \phi\right)\right]$$

όπου $A,\ \phi$ είναι νέες σταθερές κίνησης που θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $v(0) = 0$. Η αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ μας δίνει

$$x_0 = A\sin\phi \tag{6.1}$$

και η συνθήκη $v(0) = 0$ μας δίνει

$$0 = -\frac{A}{2\tau}\sin\phi + \frac{A\Delta}{2\tau}\cos\phi$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{x_0}{2\tau} + \frac{\Delta}{2\tau}\cos\phi$$

$$\Rightarrow A\cos\phi = \frac{x_0}{\Delta} \tag{6.2}$$

Αν διαιρέσουμε την εξίσωση (6) με την (6) η σταθερά ϕ μπορεί να καθοριστεί

$$\tan\phi = \Delta$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan\Delta$$

και η A από την εξίσωση (6) είναι

$$A = \frac{x_0}{\sin\phi}$$

Από την τριγωνομετρική σχέση $\sin\phi = \tan\phi/(1 + \tan^2\phi)^{1/2} = \Delta/(1 + \Delta^2)^{1/2}$, η σταθερά A είναι

$$A = \frac{x_0\sqrt{1 + \Delta^2}}{\Delta}$$

και επομένως η χρονική συνάρτηση της θέσης είναι

$$x(t) = \frac{x_0\sqrt{1 + \Delta^2}}{\Delta}\mathrm{e}^{-t/2\tau}\sin\left(\frac{\Delta}{2\tau}t + \phi\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0\sqrt{1 + \Delta^2}}{\Delta}\mathrm{e}^{-t/2\tau}\sin\left(\frac{\Delta}{2\tau}t + \arctan\Delta\right)$$

Άρα η κίνηση είναι μια περιοδική κίνηση με ελαττούμενο πλάτος

$$A = \frac{x_0\sqrt{1 + \Delta^2}}{\Delta}\mathrm{e}^{-t/2\tau}$$

Πρόβλημα 6.4 Μονοδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής μάζας m και ιδιοσυχνότητας ω_0 βρίσκεται υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης της μορφής

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

όπου $\omega \neq \omega_0$. Ζητείται η θέση και η ταχύτητα του ταλαντωτή δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θέση του είναι x_0 και η ταχύτητα του μηδέν.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή με την εξωτερική δύναμη $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ θα είναι

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + f(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega t)$$

όπου ο όρος $-m\omega_0^2 x(t)$ είναι η δύναμη Hooke. Η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \sin(\omega t) \tag{6.3}$$

Η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $\ddot{x} + \omega_0^2 t = 0$ είναι

$$x_{o\mu}(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

όπου οι σταθερές A, ϕ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (6) είναι της μορφής

$$x_\mu(t) = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_\mu = B\omega\cos(\omega t) - C\omega\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_\mu = -B\omega^2\sin(\omega t) - C\omega^2\cos(\omega t)$$

όπου οι σταθερές B, C θα προσδιοριστούν με αντικατάσταση της $x_\mu(t)$ στη διαφορική εξίσωση (6). Συνεπώς θα πάρουμε

$$B(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t) + C\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos(\omega t) = \frac{f_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{f_0}{m} \\ \\ C(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ \\ C = 0. \end{cases}$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (6) είναι

$$x(t) = x_{o\mu}(t) + x_\mu(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)$$

και η ταχύτητα $v(t) = \dot{x}(t)$ θα είναι

$$v(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f_0\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t)$$

Οι αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $v(0) = 0$ θα μας δώσουν

$$x_0 = A\sin\phi$$

$$0 = A\omega_0 \cos\phi + \frac{f_0 \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

και διαιρώντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε τον προσδιορισμό της σταθεράς ϕ

$$\tan\phi = \frac{m\omega_0 x_0(\omega^2 - \omega_0^2)}{f_0\omega}$$

και από τη σχέση $x_0 = A\sin\phi$, έχουμε για την σταθερά A

$$A = \frac{x_0}{\sin\phi} = x_0 \frac{\sqrt{1+\tan^2\phi}}{\tan\phi}$$

Πρόβλημα 6.5 Η εξίσωση που κυβερνά τη χρονική εξέλιξη του φορτίου Q σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά δίδεται από τη διαφορική εξίσωση

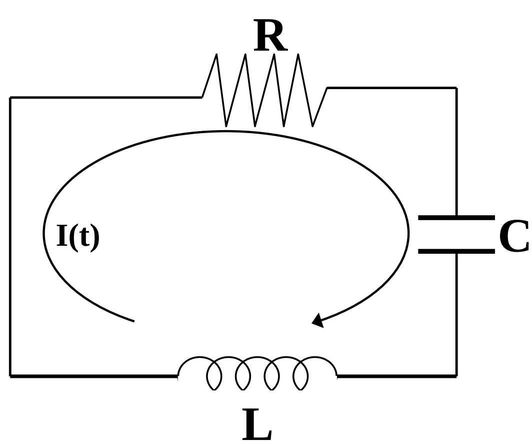
$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = 0$$

Δείξατε ότι αν $R^2 < 4L/C$, τότε το φορτίο ταλαντώνεται με πλάτος που ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου. Βρείτε το φορτίο $Q(t)$ και το ρεύμα $I(t) = \mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t$, όταν $Q(0) = Q_0$ και $I(0) = 0$.

Λύση:

Η εξίσωση που κυβερνά τη χρονική εξέλιξη του φορτίου σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι

$$\begin{aligned} L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q &= 0 \end{aligned} \qquad (6.4)$$



Αυτή η διαφορική εξίσωση περιγράφει ένα αρμονικό ταλαντωτή που περιέχει έναν όρο απόσβεσης, R/L. Αφού ορίσουμε τον τελεστή της παραγώγου $D \equiv d/\mathrm{d}t$, η διαφορική εξίσωση (6) θα γραφτεί

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)Q(t) = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)$ αυτής της διαφορικής εξίσωσης έχει δύο ρίζες

$$\rho_{1,2} = \frac{-R \pm i\Delta}{2L}$$

όπου ο όρος Δ, είναι θετικός

$$\Delta = \left(\frac{4L}{C} - R^2\right)^{1/2} > 0$$

αφού $R^2 < 4L/C$. Το $i = \sqrt{-1}$ είναι η μιγαδική μονάδα.
Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (6) θα βρεθεί με τη βοήθεια των δύο ριζών, $\rho_{1,2}$

$$Q(t) = A\mathrm{e}^{\rho_1 t} + B\mathrm{e}^{\rho_2 t}$$

όπου οι σταθερές A, B μπορούν να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $Q(0) = Q_0$ και $I(0) = 0$. Επομένως το φορτίο, $Q(t)$ θα γραφτεί

$$Q(t) = \mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left(A\mathrm{e}^{i(\Delta/2L)t} + B\mathrm{e}^{-i(\Delta/2L)t}\right)$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, $\mathrm{e}^{\pm i(\Delta/2L)t}$, με τη βοήθεια της σχέσης Euler

$$\mathrm{e}^{\pm i(\Delta/2L)t} = \cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) \pm i\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)$$

επομένως η λύση για το φορτίο, $Q(t)$, θα είναι

$$Q(t) = \mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[C_1\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right] \tag{6.5}$$

όπου C_1, C_2 είναι δύο νέες σταθερές που και αυτές μπορούν να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $Q(0) = Q_0$ και $I(0) = 0$.
Από το φορτίο $Q(t)$, εξίσωση (6) το ρεύμα, $I(t)$, είναι

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{2L}\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[C_1\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right] +$$

$$\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[-\frac{C_1\Delta}{2L}\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + \frac{C_2\Delta}{2L}\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right]$$

Η αρχική συνθήκη $Q(0) = Q_0$ από την εξίσωση (6) θα μας δώσει

$$Q(0) = Q_0 = C_1$$

και η αρχική συνθήκη $I(0) = \dot{Q}(0) = 0$ από την εξίσωση (6) θα μας δώσει

$$0 = -\frac{R}{2L}C_1 + C_2\frac{\Delta}{2L}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{\Delta}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{Q_0}{\Delta}$$

Συνεπώς με αυτές τις εκφράσεις των σταθερών C_1, C_2 θα έχουμε για το φορτίο

$$Q(t) = Q_0\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + \frac{1}{\Delta}\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right]$$

Αν ορίσουμε μια γωνία ϕ έτσι ώστε

$$\tan\phi = \frac{1}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{(1+\tan^2\phi)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{\Delta}{(1+\Delta^2)^{1/2}}$$

το φορτίο, $Q(t)$, θα είναι

$$Q(t) = Q_0 \mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + \tan\phi \sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right]$$

$$\Rightarrow Q(t) = \frac{Q_0}{\cos\phi}\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[\cos\phi\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + \sin\phi \sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right]$$

$$\Rightarrow Q(t) = \frac{Q_0}{\cos\phi}\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t - \phi\right)$$

όπου η γωνία $\phi = \arctan(1/\Delta)$. Το ρεύμα $I(t) = \dot{Q}(t)$ θα είναι

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0 R}{2L\cos\phi}\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t - \phi\right) + \frac{\Delta}{R}\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t - \phi\right)\right]$$

Ομοίως, αν ορίσουμε μια νέα γωνία θ έτσι ώστε

$$\tan\theta = \frac{\Delta}{R} = \left(\frac{4L}{R^2C} - 1\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{4L}{R^2C} - 1\right)^{1/2}$$

το ρεύμα θα γραφτεί

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0 R}{2L\cos\phi}\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t - \phi\right) + \tan\theta\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t - \phi\right)\right]$$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0 R}{2L\cos\phi\cos\theta}\mathrm{e}^{-(R/2L)t}\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t - \phi - \theta\right)$$

Πρόβλημα 6.6 Ένα αβαρές ελατήριο (με σταθερά ελατηρίου C) και με φυσικό μήκος l φέρει δύο μάζες m_1, m_2 στα δύο άκρα του. Η μάζα m_1 είναι προσκολλημένη σε ένα σημείο Ο όπως φαίνεται στο σχήμα και η μάζα m_2 βρίσκεται σε ισορροπία. Κάποια στιγμή ξεκολλάμε τη μάζα από το σημείο Ο, βρείτε την κίνηση των δύο μαζών του ελατηρίου, δηλαδή βρείτε τα $x_1(t),\ x_2(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση:

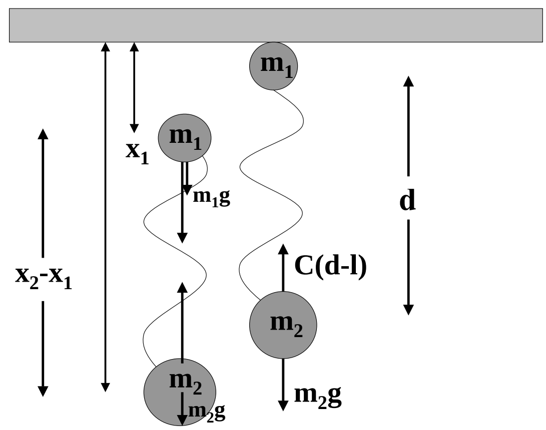
Στη θέση ισορροπίας το βάρος $m_2 g$ θα πρέπει να είναι ίση με τη δύναμη Hooke, $C(d-l)$, του ελατηρίου, όπου η επιμήκυνση του ελατηρίου πέρα του φυσικού του μήκους είναι $d-l$

$$m_2 g = C(d-l)$$

$$\Rightarrow d = l + \frac{m_2}{C}g$$

Αν η θέση του σωματιδίου m_1, m_2 είναι x_1, x_2 αντιστοίχως, η εξίσωση κίνησης για κάθε σωματίδιο για μια τυχαία χρονική στιγμή θα είναι

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g + C(x_2 - x_1 - l)$$



Σχήμα 6.2

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - C(x_2 - x_1 - l)$$

όπου η δύναμη στο σωματίδιο m_1 είναι το άθροισμα του βαρυτικής δύναμης, $m_1 g$ (θεωρούμε θετικό τον κατακόρυφο άξονα προς τα κάτω) και της δύναμης Hooke, $C(x_2 - x_1 - l)$, με επιμήκυνση $x_2 - x_1 - l$ από το φυσικό μήκος, l, του ελατηρίου. Ομοίως, η δύναμη στο σωματίδιο m_2 είναι το άθροισμα του βαρυτικής δύναμης, $m_2 g$ και της δύναμης Hooke, $-C(x_2 - x_1 - l)$ με επιμήκυνση $x_2 - x_1 - l$ από το φυσικό μήκος, l του ελατηρίου. Η δύναμη Hooke στη μάζα m_2 είναι αντίθετη της δύναμης Hooke στη μάζα m_1.
Αν προσθέσουμε τις σχέσεις (6 και 6) και το αποτέλεσμα θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}^2(m_1 x_1 + m_2 x_2)}{\mathrm{d}t^2} = (m_1 + m_2) g$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)/(m_1+m_2)} \mathrm{d}\left(\frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2}\right) = \int_0^t g \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2} = gt$$

$$\Rightarrow \int_{m_2 d/(m_1+m_2)}^{(m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1+m_2)} \mathrm{d}\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right) = \int_0^t g t \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \tag{6.6}$$

όπου οι αρχικές συνθήκες για $t = 0$ είναι $x_1(0) = 0, x_2(0) = d, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Παρατηρούμε ότι η σχέση (6) είναι η εξίσωση κίνησης (ελεύθερη πτώση) του κέντρου μάζας (ΚΜ) των δύο σωματιδίων.
Οι εξισώσεις (6 και 6) μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = g + \frac{C}{m_1}(x_2 - x_1 - l)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{C}{m_2}(x_2 - x_1 - l)$$

Αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις (6 και 6) θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -C \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(x_2 - x_1 - l)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2(x_2 - x_1 - l)}{\mathrm{d}t^2} = -C\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(x_2 - x_1 - l)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2(x_2 - x_1 - l)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2(x_2 - x_1 - l) = 0$$

όπου

$$\omega^2 = \frac{C(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$$

Αυτή είναι η εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα ω και επομένως η λύση για τη μεταβλητή $x_2 - x_1 - l$ είναι

$$x_2 - x_1 - l = A\sin(\omega t + \phi)$$

όπου οι σταθερές A, ϕ θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = d$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ για τη χρονική στιγμή $t = 0$. Άρα για αυτές τις αρχικές συνθήκες θα έχουμε

$$d - l = A\cos\phi$$

$$0 = A\omega\cos\phi$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

και $A = d - l$. Συνεπώς η λύση για τη μεταβλητή $x_2 - x_1 - l$ είναι

$$x_2 - x_1 - l = (d - l)\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + l + (d - l)\cos(\omega t)$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτήν την έκφραση x_1 στη σχέση (6) θα έχουμε

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{m_2(d - l)}{m_1 + m_2}(1 - \cos(\omega t))$$

και από τη σχέση $x_2 = x_1 + l + (d - l)\cos(\omega t)$ θα έχουμε

$$x_2 = d + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{m_1(d - l)}{m_1 + m_2}(1 - \cos\omega t)$$

όπου $d - l = m_2 g/C$.

Πρόβλημα 6.7 Θεωρήστε τρεις μονοδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές σε κίνηση της ίδιας μάζας και συχνότητας, αλλά με διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Δείξτε ότι το εμβαδό του τριγώνου, στο διάγραμμα των φάσεων, με κορυφές τα σημεία (q, p) των ταλαντωτών είναι για κάθε χρονική στιγμή το ίδιο, δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου στο χώρο των φάσεων είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα.

Λύση:

Ας θεωρήσουμε τρις αρμονικούς ταλαντωτές μάζας m και συχνότητας ω που περιγράφονται στο χώρο των φάσεων από τις θέσεις και ορμές (q_i, p_i), $\forall i = 1, 2, 3$, όπου $p_i = m\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$. Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες για το i-ταλαντωτή είναι $q_i(t = 0) = q_{i0}$ και $p_i(t = 0) = p_{i0}$.
Η εξίσωση κίνησης κάθε ταλαντωτή θα περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Newton

$$m\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = -m\omega^2 q_i$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \omega^2 q_i = 0$$

Γνωρίζουμε ότι η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$q_i(t) = q_{i0}\cos(\omega t) + \frac{p_{i0}}{m\omega}\sin(\omega t)$$

και η ορμή $p_i(t) = m\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$ θα είναι

$$p_i(t) = -m\omega q_{i0}\sin(\omega t) + p_{i0}\cos(\omega t)$$

Σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή το εμβαδόν E τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(q_i(t), p_i(t))$ στο διάγραμμα φάσεων θα δίνεται από την ορίζουσα

$$E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_1(t) & p_1(t) & 1 \\ q_2(t) & p_2(t) & 1 \\ q_3(t) & p_3(t) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10}\cos(\omega t) + (p_{10}/m\omega)\sin(\omega t) & -m\omega q_{10}\sin(\omega t) + p_{10}\cos(\omega t) & 1 \\ q_{20}\cos(\omega t) + (p_{20}/m\omega)\sin(\omega t) & -m\omega q_{20}\sin(\omega t) + p_{20}\cos(\omega t) & 1 \\ q_{30}\cos(\omega t) + (p_{30}/m\omega)\sin(\omega t) & -m\omega q_{30}\sin(\omega t) + p_{30}\cos(\omega t) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10}\cos(\omega t) & -m\omega q_{10}\sin(\omega t) & 1 \\ q_{20}\cos(\omega t) & -m\omega q_{20}\sin(\omega t) & 1 \\ q_{30}\cos(\omega t) & -m\omega q_{30}\sin(\omega t) & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10}\cos(\omega t) & p_{10}\cos(\omega t) & 1 \\ q_{20}\cos(\omega t) & p_{20}\cos(\omega t) & 1 \\ q_{30}\cos(\omega t) & p_{30}\cos(\omega t) & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} (p_{10}/m\omega)\sin(\omega t) & -m\omega q_{10}\sin(\omega t) & 1 \\ (p_{20}/m\omega)\sin(\omega t) & -m\omega q_{20}\sin(\omega t) & 1 \\ (p_{30}/m\omega)\sin(\omega t) & -m\omega q_{30}\sin(\omega t) & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} (p_{10}/m\omega)\sin(\omega t) & p_{10}\cos(\omega t) & 1 \\ (p_{20}/m\omega)\sin(\omega t) & p_{20}\cos(\omega t) & 1 \\ (p_{30}/m\omega)\sin(\omega t) & p_{30}\cos(\omega t) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow E = 0 + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10} & p_{10} & 1 \\ q_{20} & p_{20} & 1 \\ q_{30} & p_{30} & 1 \end{vmatrix}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_{10} & q_{10} & 1 \\ p_{20} & q_{20} & 1 \\ p_{30} & q_{30} & 1 \end{vmatrix}\left(-\frac{1}{m\omega}\right)(m\omega)\sin^2(\omega t) + 0$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10} & p_{10} & 1 \\ q_{20} & p_{20} & 1 \\ q_{30} & p_{30} & 1 \end{vmatrix}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10} & p_{10} & 1 \\ q_{20} & p_{20} & 1 \\ q_{30} & p_{30} & 1 \end{vmatrix}\sin^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10} & p_{10} & 1 \\ q_{20} & p_{20} & 1 \\ q_{30} & p_{30} & 1 \end{vmatrix}\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_1(t) & p_1(t) & 1 \\ q_2(t) & p_2(t) & 1 \\ q_3(t) & p_3(t) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_{10} & p_{10} & 1 \\ q_{20} & p_{20} & 1 \\ q_{30} & p_{30} & 1 \end{vmatrix}$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι παρακάτω ιδιότητες των οριζουσών:

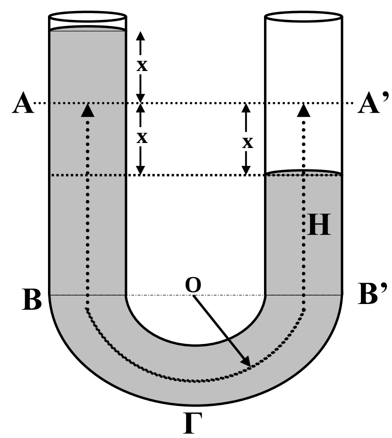
- Ιδίοτητα 1: εναλλάσσοντας δύο διαδοχικές γραμμές ή στήλες πολλαπλασιάζουμε την ορίζουσα με -1.
- Ιδίοτητα 2: αν δύο γραμμές ή στήλες είναι ίδιες τότε η ορίζουσα είναι μηδέν.
- Ιδίοτητα 3: αν μια γραμμή ή στήλη της ορίζουσας πολλαπλασιαστεί με ένα αριθμό k τότε όλη η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με k.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν, Ε, του τριγώνου είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα!

Πρόβλημα 6.8 Έστω ο κυλινδρικός U/οειδής σωλήνας όπως φαίνεται στο σχήμα (6.3). Θεωρούμε ότι ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή εμβαδού S. Επιπλέον το κυρτό μέρος ΒΓΒ′ προέρχεται από περιστροφή περί του σημείου Ο της ανωτέρω επιφάνειας S. Γεμίζουμε το σωλήνα με υγρό πυκνότητας ρ όπου ισορροπεί στην θέση ΑΑ′. Αν αναγκάσουμε το υγρό να ανέλθει στο ένα σκέλος του σωλήνα (προφανώς θα κατέλθει στο άλλο σκέλος), να μελετηθεί η κίνησης που θα εκτελέσει αν αφεθεί σε αυτή τη θέση ελεύθερον. Αποδείξετε ότι αυτή η κίνηση είναι μια αρμονική ταλάντωση με περίοδο, T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

όπου H είναι το μήκος του υγρού μέσα στο σωλήνα (H είναι το μήκος της διακεκομμένης ΑΒΓΒ′Α′ γραμμής όπως φαίνεται στο σχήμα και διέρχεται από το κέντρο βάρους της επιφάνειας S).



Σχήμα 6.3

Λύση:

Έστω ότι το Α ανήλθε κατά μια απόσταση x τότε κατά x έχει κατέλθει η στάθμη στο σημείο Α′. Η κίνηση του υγρού θα γίνει υπό την επίδραση του βάρους της στήλης υγρού ύψους $2x$. Το βάρος αυτής της στήλης είναι

$$F = -m'g = -\rho V'g = -\rho 2xSg = -(2S\rho g)x$$

όπου $\rho = m'/V'$ είναι η πυκνότητα του υγρού, $V' = S2x$ είναι ο όγκος της στήλης του υγρού ύψους $2x$ και εμβαδού S. m' είναι η μάζα της στήλης του υγρού ύψους $2x$. Παρατηρούμε ότι η απομάκρυνση είναι αντίθετη του διανύσματος της δύναμης του βάρους και επομένως θεωρούμε ένα αρνητικό πρόσημο στη δύναμη F.
Η κινούμενη μάζα του υγρού είναι $M = \rho V = \rho HS$ όπου M είναι η ολική μάζα του υγρού ύψους H. Επομένως η διαφορική εξίσωση κίνησης θα είναι

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F = -(2S\rho g)x$$

$$\Rightarrow HS\rho\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + (2S\rho g)x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{g}{H} = 0$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση περιγράφει μια απλή αρμονική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα, ω

$$\omega^2 = 2\frac{g}{H}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 2\frac{g}{H}$$

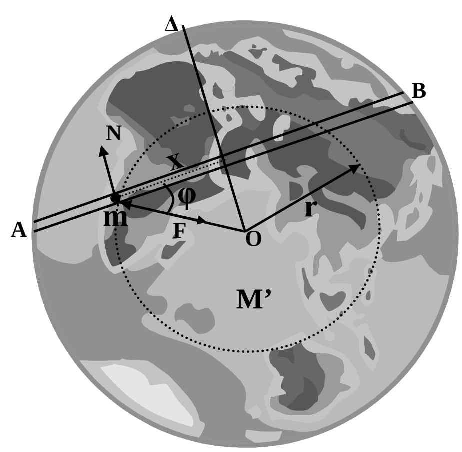
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

δηλαδή η περίοδος της αρμονικής κίνησης είναι ανεξάρτητη της πυκνότητας του υγρού, αλλά εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας, g, και το μήκος συνολικού H του υγρού.

Πρόβλημα 6.9 Έστω ότι η Γη είναι μια ομογενής σφαίρα, με πυκνότητα μάζας ρ, ακίνητη και ότι αυτή διαπεράται από ένα τούνελ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να μελετηθεί η κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται μέσα στο τούνελ, χωρίς τριβές, και μόνο υπό την επίδραση της έλξεως της Γης. Θεωρήστε ότι η δύναμη F που προέρχεται από την έλξη της Γης, όταν αυτό βρίσκεται σε μια ακτίνα r από το κέντρο της Γης, οφείλεται μόνο στη μάζα M' που περικλείει η σφαίρα ακτίνας r (Μπορείτε να το αποδείξετε;) Αποδείξετε ότι το σωματίδιο θα εκτελέσει μια απλή αρμονική κίνηση με περίοδο

$$T = \left(\frac{3\pi}{G\rho}\right)^{1/2}$$

όπου G είναι η παγκόσμια σταθερά έλξης.



Σχήμα 6.4

Λύση:

Η δύναμη F, όταν το σωματίδιο βρεθεί σε μια ακτίνα r, οφείλεται μόνο στη μάζα M' που περικλείει η σφαίρα ακτίνας r

$$F = G\frac{mM'}{r^2}$$

όπου η μάζα M' εκφράζεται από την πυκνότητα μάζας ως εξής

$$M' = \rho V' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

Άρα το μέτρο της δύναμης F θα είναι

$$F = \frac{4}{3}Gm\rho\pi r$$

Όταν η μάζα m βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο της Γης, όπως φαίνεται στο σχήμα, η δύναμη, F' κατά μήκος του τούνελ AB θα προκαλέσει την κίνηση του σωματιδίου

$$F' = -F\cos\phi = -F\frac{x}{r} = -\frac{4}{3}Gm\rho\pi x$$

Το αρνητικό πρόσημο υπάρχει διότι η διεύθυνση της δύναμης είναι αντίθετη προς τη μετατόπιση x.

Η εξίσωση κίνησης για το σωματίδιο μάζας m όταν αυτό μετατοπιστεί σε απόσταση x από την κατακόρυφο $O\Delta$, είναι

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F' = -\frac{4}{3}Gm\rho\pi x$$
$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4}{3}Gm\rho\pi x = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4}{3}G\rho\pi x = 0$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση περιγράφει απλή αρμονική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω

$$\omega^2 = \frac{4}{3}G\rho\pi$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4}{3}G\rho\pi}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Πρόβλημα 6.10 Ένα σωματίδιο είναι ελεύθερο να κινηθεί στο επίπεδο (x, y) υπό την επίδραση μιας δύναμης που κατευθύνεται προς την αρχή των συντεταγμένων και εκφράζεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{F} = -C(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}) = -C\boldsymbol{r}$$

Αν M είναι η μάζα του σωματιδίου, να καταστρώσετε και να λύσετε τις εξισώσεις της κίνησης ως προς x και ως προς y.
(α) Ποιες είναι οι συνθήκες για να γίνεται η κίνηση πάνω σε κύκλο, και ποια είναι η περίοδος;
(β) Ποιες είναι οι συνθήκες για να γίνεται η κίνηση κατά μήκος ευθείας που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα των x, και ποια είναι η περίοδος;

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} = -C(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})$$
$$\Rightarrow M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{x}} + M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{y}} = -C(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}})$$
$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -Cx$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{C}{M}x = 0$$

και

$$M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -Cy$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{C}{M}y = 0$$

Ορίζουμε την παράμετρο $\omega^2 = C/M$ που είναι η γωνιακή ταχύτητα της αρμονικής κίνησης στις δύο διαστάσεις των x και y. Η λύση των δύο διαφορικών εξισώσεων είναι της μορφής

$$x = A\sin(\omega t + \phi_1)$$
$$y = B\sin(\omega t + \phi_2)$$

όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης A, B, ϕ θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες.

(α) Για να έχουμε μια κίνηση πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας R, θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 \sin^2(\omega t + \phi_1) + B^2 \sin^2 \sin(\omega t + \phi_2) = R^2$$

Παρατηρούμε ότι θα πρέπει να έχουμε

$$A = B = R^2$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

και η περίοδος, T, της αρμονικής κίνησης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{C}}$$

(β) Για να γίνεται η κίνηση κατά μήκος ευθείας που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα των x, θα πρέπει να ισχύει $y = x$ ή

$$B \sin(\omega t + \phi_2) = A \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$\Rightarrow A = B, \qquad \phi_1 = \phi_2 = 0$$

όπου θα έχουμε αρμονικές κινήσεις σε x, y

$$x = A \sin(\omega t)$$

$$y = A \sin(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{C}{M}$$

με περίοδο, T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{C}}$$

Πρόβλημα 6.11 Σώμα μερικώς (ή ολικώς) βυθισμένο σε υγρό, υφίσταται μια δύναμη άνωσης, που είναι ίση με το βάρος του υγρού που το σώμα εκτοπίζει (αρχή του Αρχιμήδη). Να αποδειχθεί ότι ένα σώμα με ομοιόμορφη οριζόντια διατομή, που εξαναγκάζεται να κινηθεί κατακόρυφα μέσα σε υγρό με πυκνότητα μεγαλύτερη από την πυκνότητα του, εκτελεί απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Πόση είναι η περίοδος; Ποιο είναι το όριο στο πλάτος των ταλαντώσεων;

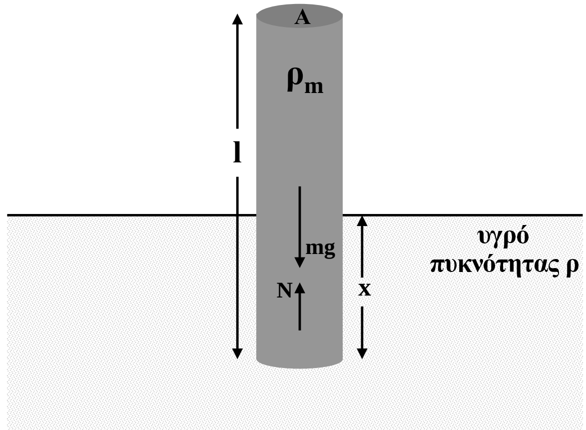
Λύση:

Έστω η οριζόντια διατομή του βυθισμένου σώματος (μάζας m και μήκους l) είναι A όπως φαίνεται στο σχήμα 6.5. Επιπλέον έστω ότι x είναι το μήκος του σώματος που είναι βυθισμένο μέσα στο υγρό και επομένως ο όγκος αυτού του τμήματος είναι $V' = xA$ και από την αρχή του Αρχιμήδη η δύναμη της άνωσης, N, που ασκείται στο σώμα είναι ίση με το βάρος του υγρού που το σώμα εκτοπίζει, δηλαδή

$$N = m'g = \rho V'g = \rho xAg$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού και m' η μάζα του υγρού που εκτοπίζεται από το βυθισμένο μέρος του σώματος.
Εκτός από τη δύναμη της άνωσης θα έχουμε και τη δύναμη της βαρύτητας $B = mg = \rho_m V g = \rho_m l A g$ (όπου ρ_m είναι η πυκνότητα της σώματος, $V =$όγκος του σώματος μάζας m).
Η εξίσωση κίνησης του σώματος περιγράφεται από το δεύτερο νόμο του Newton

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = B - N$$



Σχήμα 6.5

$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mg - Ag\rho x$$

$$\Rightarrow \rho_m lA\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + Ag\rho x = \rho_m lAg$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g\rho}{l\rho_m}x = g$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = g$$

όπου ω είναι

$$\omega^2 = \frac{g\rho}{l\rho_m}$$

Επομένως το σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με περίοδο, T ταλάντωσης

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{l\rho_m}{g\rho}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

με λύση $x_{o\mu} = A\sin(\omega t + \phi)$ (A, ϕ είναι σταθερές που προσδιορίζονται από δεδομένες αρχικές συνθήκες), και μια μερική λύση της μορφής

$$x_\mu = \frac{g}{\omega^2}$$

δηλαδή η γενική λύση είναι

$$x(t) = x_{o\mu} + x_\mu = A\sin(\omega t + \phi) + \frac{g}{\omega^2}$$

Το σημείο ισορροπίας του σώματος θα επιτευχθεί όταν η δύναμη του βάρους του είναι ίση με τη δύναμη της άνωσης

$$N = B \Rightarrow m'g = mg$$

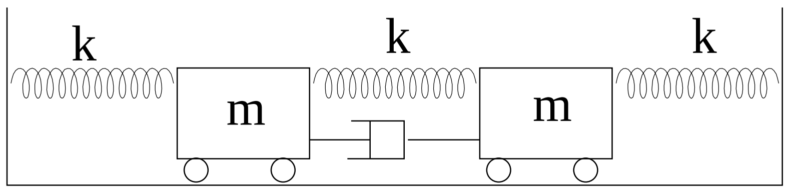
$$\Rightarrow Al\rho_m = Ax_{\text{ισορ}}x\rho$$

$$\Rightarrow x_{\text{ισορ}} = l\frac{\rho_m}{\rho}$$

όπου προφανώς είναι $x_{\text{ισορ}} < l$ διότι $\rho_m < \rho$.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι τέτοιο ώστε το σώμα να μην είναι εντελώς έξω από το υγρό ή εντελώς μέσα στο νερό.
Αν $x_{ισορ} > l/2$, το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να είναι μικρότερο από $l - x_{ισορ}$ ώστε να αποφύγουμε το σώμα να βυθιστεί ολοκληρωτικά στο υγρό.
Αν $x_{ισορ} < l/2$, το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να είναι μικρότερο από $x_{ισορ}$ ώστε να αποφύγουμε το σώμα να βγει ολοκληρωτικά έξω από το υγρό.

Πρόβλημα 6.12 Αναλύστε τις ταλαντώσεις των μαζών, m, στο μηχανικό σύστημα της εικόνας. Τα τρία ελατήρια είναι ίδια με σταθερά k και το πιστόνι παρέχει μια δύναμη επιβράδυνσης που είναι ανάλογη της ταχύτητας, $a\dot{x}$.



Σχήμα 6.6

Λύση:

Έστω ότι x_1 είναι η μετατόπιση του πρώτου σώματος και x_2 η μετατόπιση του δεύτερου. Από το δεύτερο νόμο του Newton έχουμε

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) + a(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{6.7}$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) - a(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{6.8}$$

Προσθέτοντας τις (6) και (6) έχουμε

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}(x_1 + x_2)$$

Αντικαθιστώντας το $x = (x_1 + x_2)$ παίρνουμε

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \tag{6.9}$$

Αφαιρώντας την (6) από την (6) έχουμε

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{2k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{2a}{m}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Αντικαθιστώντας το $x' = (x_1 - x_2)$ παίρνουμε

$$\ddot{x}' = -\frac{3k}{m}x' - \frac{2a}{m}\dot{x}' \tag{6.10}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο κινήσεις, μία που περιγράφεται από την σχέση (6) κατά την οποία τα σώματα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση και μία που περιγράφεται από τη σχέση (6) κατά την οποία τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Για την πρώτη κίνηση έχουμε απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Για τη δεύτερη κίνηση η λύση είναι της μορφής

$$x' = A\mathrm{e}^{i\omega_2 t}$$

και αντικαθιστώντας στην (6) έχουμε

$$-\omega_2^2 = -\frac{3k}{m} - \frac{i2a\omega_2}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_2^2 - \frac{i2a}{m}\omega_2 - \frac{3k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_2 = i\left(\frac{a}{m} \pm \sqrt{\frac{3k}{m} - \frac{a^2}{m^2}}\right)$$

Πρόβλημα 6.13
Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας $\mu = 1$ kg του οποίου η μηχανική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r), \qquad \text{όπου} \quad V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k = 1 \text{ Jm}$$

Θεωρήστε τις δυο περιπτώσεις $L_1 = 1$ kgm^2/s και $L_2 = \sqrt{2}$ kg $\cdot$ m^2/s.
(α) Προσδιορίστε τις ελάχιστες τιμές $V_{\min,1}$, $V_{\min,2}$ της δυναμικής ενέργειας $V(r)$ του σωματιδίου και στις δυο περιπτώσεις καθώς και τη θέση $r_{\min,1}$, $r_{\min,2}$ οι οποίες αντιστοιχούν στις ελάχιστες τιμές $V_{\min,1}$, $V_{\min,2}$ της δυναμικής ενέργειας.
(β) Πόση ενέργεια χρειάζεται για τη μετάβαση από την κατάσταση ισορροπίας της μιας καμπύλης στην κατάσταση ισορροπίας της άλλης;
(γ) Σε ποιο διάστημα μπορεί το σωματίδιο να κινηθεί όταν έχει ενέργεια $V_{\min,2}$ και $L = L_1$; Φτιάξτε στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα δυναμικής ενέργειας του σωματιδίου δείχνοντας καθαρά τα αποτελέσματά σας.
(δ) Προσδιορίστε τη δύναμη (μέτρο και φορά) που ασκείται στο σωματίδιο με $L = L_1$ όταν βρίσκεται στη θέση $r_{\min,2}$.
(ε) Δείξτε ότι αν το σωματίδιο με $L = L_1$ απομακρυνθεί λίγο από τη θέση ισορροπίας $r_{\min,1}$, θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

Λύση:

$$L_1 = 1 \text{ Js} \Rightarrow U_1(r) = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r} \text{ J}$$
$$L_2 = \sqrt{2} \text{ Js} \Rightarrow U_2(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \text{ J}$$

(α) Άρα

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2}\bigg|_{r=r_{0,1}} = 0 \Rightarrow r_{0,1} = 1 \text{ m}$$
$$\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}r} = -\frac{2}{r^3} + \frac{1}{r^2}\bigg|_{r=r_{0,2}} = 0 \Rightarrow r_{0,2} = 2 \text{ m}$$
$$U_1(r_{0,1}) = -\frac{1}{2} \text{ J} = -0,5 \text{ J}$$
$$U_2(r_{0,2}) = -\frac{1}{4} \text{ J} = -0,25 \text{ J}$$

(β)
$$\Delta E = U_2(r_{0,2}) - U_1(r_{0,1}) = (-0,25 \text{ J}) - (-0,50 \text{ J}) = 0,25 \text{ J}$$

(γ) Η ολική μηχανική ενέργεια είναι $E = -0.25$ J. Οπότε:

$$U_1 = E \Rightarrow \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r} = -0.25 \Rightarrow r^2 - 4r + 2 = 0 \Rightarrow r = (2 \pm \sqrt{2}) \text{ m}$$

Άρα $r_1 = 0,586$ m και $r_2 = 3,414$ m.
(δ) Η δύναμη δίνεται από τη σχέση

$$F_1(r) = -\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2}\ \mathrm{N}$$

οπότε

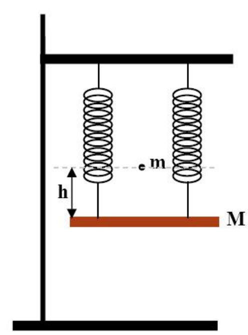
$$F_1(r_{0,2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\ \mathrm{N} = -\frac{1}{8}\ \mathrm{N}$$

(ε)

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_{\min 1}} = \left.\frac{3}{r^4} - \frac{2}{r^3}\right|_{r=1} = 3 - 2 = 1 = C$$

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{\mu}} = 1$$

Πρόβλημα 6.14 Ξύλινος ομογενής δίσκος μάζας M κρέμεται από δύο όμοια ελατήρια το καθένα με σταθερά D και ηρεμεί. Σώμα σημειακής μάζας m πέφτει από ύψος h από το κέντρο του δίσκου και σφηνώνεται σ¨ αυτόν (βλ. σχήμα 6.7). Βρείτε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος (οι τριβές αμελούνται). Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



Σχήμα 6.7

Λύση:

Η ισοδύναμη σταθερά των δύο ελατηρίων είναι $D_{\text{ολ}} = D + D = 2D$ ενώ η περίοδος $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{2D}}$. Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{m+M}}$$

Αρκεί να υπολογιστή η μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος και να χρησιμοποιηθεί η σχέση $A = \nu_{\max}/\omega$. Η ταχύτητα του σωματιδίου m πριν την κρούση είναι

$$u = \sqrt{2gh}$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος βρίσκεται από την αρχή διατήρησης της ορμής

$$mu = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{mu}{m+M} = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$$

Το νέο σημείο ισορροπίας βρίσκεται από τη σχέση $X_0 = \dfrac{(m+M)g}{2D}$ και επομένως το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχει απομάκρυνση

$$X_0 - x_0 = \frac{(M+m)g}{2D} - \frac{Mg}{2D} = \frac{m\gamma}{2D}$$

και επομένως συνολική μηχανική ενέργεια

$$E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2}(2D)\left(\frac{m\gamma}{2D}\right)^2 + \frac{1}{2}(M+m)v^2.$$

Το συσσωμάτωμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του όταν όλη η μηχανική του ενέργεια γίνει κινητική. Οπότε θα έχουμε

$$\frac{1}{2}(M+m)v_{\max}^2 = \frac{1}{2}(2D)\left(\frac{mg}{2D}\right)^2 + \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2}{(M+m)^2}2gh$$

$$\Rightarrow V_{\max}^2 = \frac{(mg)^2}{2(M+m)D} + \frac{2m^2gh}{(M+m)^2} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{(m\gamma)^2(m+M)+4m^2Dgh}{2D(m+M)^2}}$$

Επομένως θα έχουμε

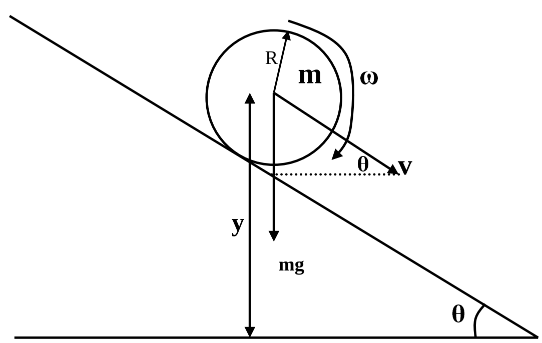
$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{\sqrt{\dfrac{(mg)^2(m+M)+4m^2Dgh}{2D(M+m)^2}}}{\sqrt{\dfrac{2D}{m+M}}} = \sqrt{\frac{(mg)^2(m+M)+4m^2Dgh}{4D^2(m+M)}}$$

7

Δυναμική των Στερεών Σωμάτων

Πρόβλημα 7.1 Ένας συμπαγής κύλινδρος, ένα λεπτότοιχο κυλινδρικό κέλυφος, μια συμπαγής σφαίρα και ένα λεπτότοιχο σφαιρικό κέλυφος, κυλίονται προς τα κάτω σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης θ. Όλα τα σώματα έχουν την ίδια ακτίνα R. Βρείτε την επιτάχυνση του καθενός.

Λύση:



Σχήμα 7.1

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m και ροπής αδρανείας I που κυλάει πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Σε μια τυχαία θέση y η ολική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα της κινητικής, K, και δυναμικής, U, ενέργειας

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy$$

όπου η κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα της περιστροφικής και μεταφορικής ενέργειας. Η γωνιακή ταχύτητα ω συνδέεται με τη μεταφορική ταχύτητα, v, με τη σχέση: $v = \omega R \Rightarrow \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = R\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t \Rightarrow a = R\alpha$ όπου a, α είναι η μεταφορική και γωνιακή επιτάχυνση αντιστοίχως.
Η ολική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή, επομένως $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$, άρα

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)v^2 + mgy$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m(1 + \frac{I}{mR^2})v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)va = -g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{I}{mR^2}\right)va = gv\sin\theta$$

όπου η κατακόρυφος ταχύτητα είναι

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -v\sin\theta$$

Επομένως η μεταφορική επιτάχυνση, a, είναι

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+I/(mR^2)} \tag{7.1}$$

(α) Στην περίπτωση ενός συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R έχουμε για τη ροπή αδρανείας

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

(β) Στην περίπτωση ενός λεπτότοιχου κυλινδρικού κελύφους ακτίνας R έχουμε για τη ροπή αδρανείας

$$I = mR^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}g\sin\theta$$

(γ) Στην περίπτωση μιας συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R έχουμε για τη ροπή αδρανείας

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

(δ) Στην περίπτωση ενός λεπτότοιχου σφαιρικού κελύφους ακτίνας R έχουμε για τη ροπή αδρανείας

$$I = \frac{2}{5}M''R^2 - \frac{2}{5}M'(R-\mathrm{d}R)^2$$

όπου

$$M' = \frac{4}{3}\pi(R-\mathrm{d}R)^3\rho, \qquad M'' = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

Άρα η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho\left(R^5-(R-\mathrm{d}R)^5\right) = \frac{8}{15}\pi\rho\left(R^5-R^5+5\frac{\mathrm{d}R}{R}R^5+\ldots\right) = \frac{8}{3}\pi\rho R^4\mathrm{d}R$$

αλλά η μάζα του σφαιρικού κελύφους είναι

$$m = \rho V = \rho 4\pi R^2\mathrm{d}R$$

$$\Rightarrow \quad \rho\pi\mathrm{d}R = \frac{m}{4R^2}$$

Άρα η η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

και η επιτάχυνση είναι

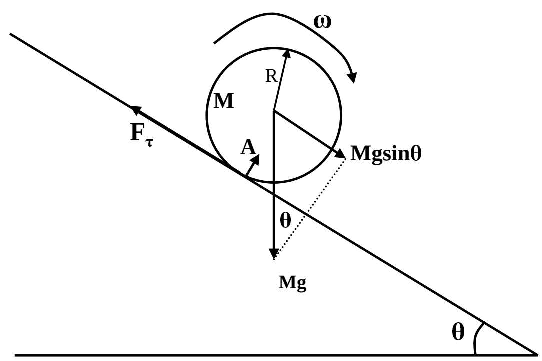
$$a = \frac{3}{5}g\sin\theta$$

Πρόβλημα 7.2 Για ένα συμμετρικό σώμα που κυλά προς τα κάτω, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, να δείξετε ότι

$$\mu \geq \frac{\tan\theta}{1 + MR^2/I_c}$$

όπου μ είναι ο συντελεστής τριβής του κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. Τα R, I_c είναι η ακτίνα και η ροπή αδρανείας ως προς το κέντρου μάζας του συμμετρικού σώματος.

Λύση:



Σχήμα 7.2

Η εξίσωση κίνησης του συμμετρικού σώματος είναι

$$Mg\sin\theta - F_\tau = Ma \tag{7.2}$$

όπου a είναι η μεταφορική επιτάχυνση του σώματος, F_τ είναι η δύναμης τριβής.
Επιπλέον η ροπή που οφείλεται στη δύναμη τριβής F_τ είναι

$$N = F_\tau R = I_c \alpha$$

όπου $\alpha R = a$ είναι η σχέση μεταξύ της μεταφορικής και γωνιακής επιτάχυνσης, εφ' όσον το σημείο επαφής του σώματος με το κεκλιμένο επίπεδο είναι σε ηρεμία. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα περιστρέφεται χωρίς να ολισθαίνει. Κατά τη στιγμή που θα υπάρχει ολίσθηση θα έχουμε

$$F_\tau = \mu A = \mu Mg\cos\theta$$

όπου A είναι η αντίδραση του κεκλιμένου επιπέδου που δρα πάνω στο σώμα. Επομένως η εξίσωση (7) θα γίνει

$$Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta = Ma$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (7), έπεται

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + I_c/(MR^2)}$$

η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$Mg\sin\theta - \frac{Mg\sin\theta}{1 + I_c/(MR^2)} = \mu Mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta\left(1 - \frac{1}{1 + I_c/(MR^2)}\right) = \mu$$

$$\Rightarrow \tan\theta\frac{I_c/(MR^2)}{1 + I_c/(MR^2)} = \mu$$

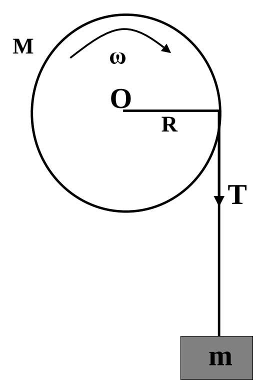
$$\Rightarrow \mu = \frac{\tan\theta}{MR^2/I_c + 1}$$

και επομένως ο συντελεστής τριβής του επιπέδου μπορεί να είναι μεγαλύτερος της ποσότητας $\tan\theta/(MR^2/I_c{+}1)$, δηλαδή

$$\mu \geq \frac{\tan\theta}{MR^2/I_c + 1}$$

Πρόβλημα 7.3 Συμπαγής κύλινδρος με μάζα $2000\,g$ και ακτίνα $4\,cm$, είναι αναγκασμένος να στρέφεται γύρω από τον άξονα του, που είναι οριζόντιος. Ένα νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο και το ένα άκρο του, που κρέμεται ελεύθερο, συγκρατεί μια μάζα $150\,g$ (βλ. σχήμα 7.3). Να βρείτε τη γραμμική επιτάχυνση της μάζας, τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου, την τάση του νήματος και την κατακόρυφη δύναμη που συγκρατεί τον κύλινδρο.

Λύση:



Σχήμα 7.3

Η ροπή, N, που δημιουργεί η τάση του νήματος είναι

$$N = TR = I\alpha$$

όπου α είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου. Η μεταφορική επιτάχυνση, a, του σώματος μάζας, m, δίνεται από το δεύτερο νόμο του Newton

$$mg - T = ma$$

όπου η γωνιακή και μεταφορική επιτάχυνση συνδέονται μέσω της σχέσης

$$a = \alpha R$$

διότι

$$v = \omega R$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}tR$$

$$\Rightarrow a = \alpha R$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$mg = I\frac{\alpha}{R} + ma = \left(\frac{I}{R^2} + m\right) a$$

όπου η ροπή αδρανείας, I, του κυλίνδρου είναι $I = MR^2/2$. Άρα θα έχουμε

$$a = \frac{mg}{m + M/2} = \frac{150 \times 980}{150 + 2000/2}\,\mathrm{cm/s^2} = 128\,\mathrm{cm/s^2}$$

και η γωνιακή επιτάχυνση, α, είναι

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{128}{4}\,\mathrm{rad/s^2} = 32\,\mathrm{rad/s^2}$$

και η τάση, T, του νήματος είναι

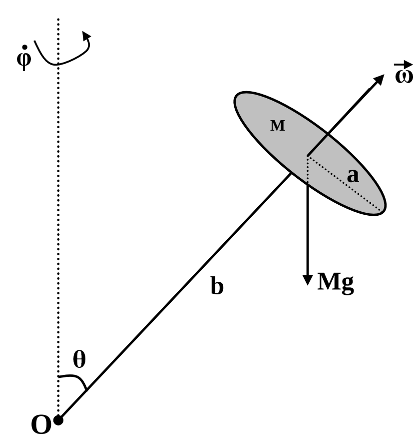
$$T = \frac{I}{R}\alpha = \frac{1}{2}MR\alpha = 1,28 \times 10^5\,\mathrm{dynes} = 1,28\mathrm{N}$$

και η κατακόρυφος δύναμης που συγκρατεί τον κύλινδρο είναι

$$F = Mg + T = 2000 \times 980 + 1,28 \times 10^5\,\mathrm{dynes} = 20,9 \times 10^5\,\mathrm{dynes} = 20,9\,\mathrm{N}$$

Πρόβλημα 7.4 Ένα γυροσκόπιο αποτελείται από συμπαγή κύλινδρο, που έχει ακτίνα $a = 4\,cm$. Ο κύλινδρος στηρίζεται σε αβαρές στέλεχος, του οποίου το άκρο ακουμπά ελεύθερα σε σημείο που απέχει $5\,cm$ από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου. Το σύστημα κινείται με σταθερή μετάπτωση σε μια σταθερή γωνία κλίσης ως προς την κατακόρυφο. Η μετάπτωση συμπληρώνει ένα πλήρη κύκλο διαδρομής σε χρόνο $3\,s$. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής του γυροσκοπίου γύρω από τον άξονα του.

Λύση:



Σχήμα 7.4

Η ροπή, N, της δύναμης βάρους, mg, ως προς το κέντρο O είναι

$$N = Mgb\sin\theta$$

όπου η ροπή αδρανείας του γυροσκοπίου είναι $I = Ma^2/2$. Η στροφορμή, L, είναι

$$L = I\omega$$

και η χρονική μεταβολή της στροφορμής είναι

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = L\sin\theta\dot{\phi} = I\omega\sin\theta\dot{\phi}$$

όπου $\dot{\phi}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του γυροσκοπίου (precession angular velocity), δηλαδή

$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = 3\,\mathrm{s}$$

Επομένως η ροπή μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$N = mg\sin\theta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\omega\sin\theta\dot{\phi} = \frac{1}{2}Ma^2\omega\sin\theta\dot{\phi}$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{2gb}{a^2\dot{\phi}} = \frac{2\times 980\times 5\times 3}{16\times 2\pi} = 292\,\mathrm{rad/s}$$

Πρόβλημα 7.5 Να αποδειχθεί ότι σε ένα φυσικό εκκρεμές υπάρχουν δύο σημεία στήριξης, σε αποστάσεις l_1, και l_2 από το κέντρο μάζας, τέτοια ώστε, αν το εκκρεμές στηριχτεί από αυτά, να ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα για ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Να αποδειχθεί επίσης ότι οι αποστάσεις αυτές συνδέονται με τη σχέση

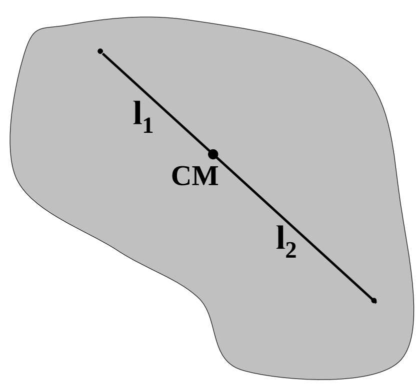
$$l_1 l_2 = \frac{I_c}{M}$$

Επίσης, να αποδειχθεί ότι, αν έχουμε προσδιορίσει ένα τέτοιο ζεύγος από συζυγή σημεία και μετρήσουμε την αντίστοιχη κοινή κυκλική συχνότητα ω, μπορούμε να βρούμε την τιμή του ω από τη σχέση

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2}}$$

(Αυτή είναι μια μέθοδος μέτρησης του ω, που ονομάζεται μέθοδος του αντιστρεπτού εκκρεμούς του Kater. Τα σημεία στήριξης βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία με το κέντρο μάζας. Έτσι, το άθροισμα l_1+l_2 είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων στήριξης. Η γνώση της θέσης του κέντρου μάζας είναι επομένως περιττή).

Λύση:



Σχήμα 7.5

Γνωρίζουμε ότι η συχνότητα ταλάντωσης, ω_1, για ένα φυσικό εκκρεμές με σημείο στήριξης που απέχει απόσταση l_1 από το κέντρο μάζας είναι

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Mgl_1}{I_c + Ml_1^2}}$$

όπου I_c είναι η ροπή αδρανείας του φυσικού εκκρεμούς ως προς το κέντρο μάζας. Όμοια αν η απόσταση είναι l_2 θα έχουμε

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{Mgl_2}{I_c + Ml_2^2}}$$

Στην περίπτωση που $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ θα ισχύει

$$\frac{Mgl_1}{I_c + Ml_1^2} = \frac{Mgl_2}{I_c + Ml_2^2}$$

$$\Rightarrow I_c l_1 + Ml_1 l_2^2 = I_c l_2 + Ml_2 l_1^2$$

$$\Rightarrow I_c(l_1 - l_2) = Ml_1 l_2 (l_1 - l_2)$$

και για όταν $l_1 \neq l_2$ έχουμε

$$I_c = Ml_1 l_2 \Rightarrow = l_1 l_2 = \frac{I_c}{M}$$

και αν αντικαταστήσουμε τη σχέση του I_c στις εκφράσεις των συχνοτήτων ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς

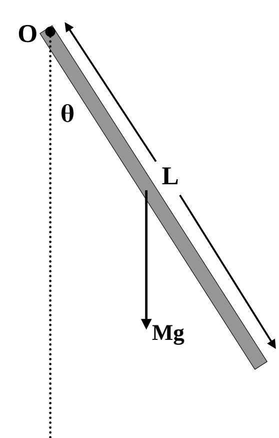
$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl_1}{Ml_1 l_2 + Ml_1^2}} = \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2}}$$

$$\Rightarrow g = \omega^2 (l_1 + l_2)$$

Πρόβλημα 7.6 Να αποδείξετε ότι μια ομογενής ράβδος με μήκος L, που κρέμεται σαν φυσικό εκκρεμές από το ένα της άκρο, έχει τη ίδια συχνότητα για ταλαντώσεις μικρού πλάτους με ένα απλό εκκρεμές με μήκος

$$l = \frac{2}{3}L$$

Λύση:



Σχήμα 7.6

Η ροπή του βάρους, Mg, ως προς το σημείο στήριξης O είναι

$$N = -Mg\left(\frac{L}{2}\right)\sin\theta \simeq -Mg\left(\frac{L}{2}\right)\theta$$

όπου για μικρές γωνίες ταλάντωσης $\sin\theta \approx \theta$. Το μείον σε αυτή τη σχέση υπάρχει διότι η κατεύθυνση της δύναμης είναι αντίθετη με τη γωνία μετατόπισης.
Η εξίσωση κίνησης για την περιστροφή είναι

$$N = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

όπου I είναι η ροπή αδρανείας της ράβδους ως προς το σημείο O

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Άρα η εξίσωση κίνησης είναι

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + Mg\frac{L}{2}\theta = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{MgL}{2I}\theta = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$$

και η συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

και επιπλέον η περίοδος ταλάντωσης, T, θα είναι

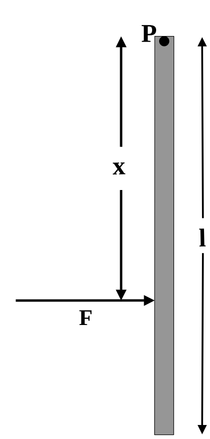
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2L/3}{g}}$$

Γνωρίζουμε ότι η περίοδος ενός απλούς εκκρεμούς μήκους l είναι $2\pi(l/g)^{1/2}$, τότε είναι σαν να έχουμε ένα απλό εκκρεμές μήκους

$$l = \frac{2}{3}L$$

Πρόβλημα 7.7 Θεωρούμε μια στερεά ράβδο με μήκος l, που την κρεμάμε από το ένα της άκρο με τη βοήθεια μιας άρθρωσης στο σημείο P. Μια δύναμη F πρόκειται να εφαρμοστεί για λίγο χρόνο, ώστε με την ώθηση που θα δώσει να θέσει τη ράβδο σε κίνηση εκκρεμούς, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7. Η διάταξη στήριξης στο P είναι πολύ εύθραυστη και η δύναμη F πρέπει να εφαρμοστεί σε απόσταση x, τέτοια, που να μην εκδηλώνεται δύναμη αντίδρασης στο P. Να βρεθεί η απόσταση x που ικανοποιεί αυτή την απαίτηση. Η αντίστοιχη θέση ονομάζεται κέντρο κρούσης για το σημείο εξάρτησης P.
(*Υπόδειξη: Η δύναμη F θα επιταχύνει το κέντρο μάζας, και θα δώσει γωνιακή επιτάχυνση ως προς το σημείο Π εξαιτίας της ροπής ως προς το ίδιο το σημείο. Η συνθήκη για να είναι συμβιβαστές αυτές οι επιταχύνσεις, μαζί με την υπόθεση ότι δεν υπάρχει δύναμη αντίδρασης στο Π, θα καθορίσουν την τιμή του x ως συνάρτηση του l*).

Λύση:



Σχήμα 7.7

Θέλουμε το άθροισμα των δυνάμεων στο σημείο P να είναι μηδέν. Από το δεύτερο νόμο του Newton έχουμε την ώθηση $\Omega = \int F \mathrm{d}t$ της δύναμης

$$F = \frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \int F \mathrm{d}t = \Delta(Mv)$$

όπου $\Delta(Mv)$ είναι η μεταβολή της ορμής. Επιπλέον, η ταχύτητα του κέντρου μάζας εφ' όσον το σημείο P είναι σε ισορροπία, θα είναι

$$v_{\text{KM}} = \omega \frac{l}{2}$$

και η ώθηση της δύναμης είναι

$$\int F \mathrm{d}t = \Delta(Mv) = Mv_{\text{τελική}} - Mv_{\text{αρχική}} = Mv_{\text{KM}} - 0 = M\omega \frac{l}{2} \tag{7.3}$$

Ομοίως, για τη ροπή της δύναμης θα έχουμε

$$N = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \int N \mathrm{d}t = \Delta(I\omega) \tag{7.4}$$

όπου η ροπή της δύναμης είναι $N = Fx$, και η ροπή αδρανείας της ράβδου μήκους l είναι $I = Ml^2/3$. Εξίσωση (7) θα γραφτεί ως εξής

$$\int N \mathrm{d}t = \Delta(I\omega)$$

$$\Rightarrow x \int F \mathrm{d}t = I\omega_{\text{τελική}} - I\omega_{\text{αρχική}}$$

$$\Rightarrow x \int F \mathrm{d}t = I\omega_{\text{τελική}} - 0 = \frac{1}{3} Ml^2 \omega \tag{7.5}$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (7) και (7) θα έχουμε

$$x = \frac{2}{3} l$$

Πρόβλημα 7.8 Ένας βαρύς τροχός έχει σχήμα συμπαγούς κυλίνδρου με ακτίνα $0,50\,m$, πάχος $0,20\,m$ και μάζα $1200\,kg$. Ο τροχός στηρίζεται σε ρουλεμάν και στρέφεται ελεύθερα με γωνιακή ταχύτητα 150 στροφές ανά δευτερόλεπτο. Σε κάποια στιγμή εφαρμόζουμε στον τροχό μια τροχοπέδη, που δρα στην περιφέρεια του τροχού με κάθετη δύναμη ίση με το βάρος μιας μάζας $40\,kg$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των τριβόμενων επιφανειών είναι $0,4$ και δεχόμαστε ότι είναι ανεξάρτητος από τη σχετική ταχύτητα των επιφανειών.
(α) Πόση γωνία θα διαγράψει ο τροχός ώσπου να σταματήσει;
(β) Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει ο τροχός;

Λύση:

Η ροπή της δύναμης της τριβής είναι

$$N = F_\tau R = -\mu A R = -\mu m g R$$

όπου A είναι η κάθετη δύναμη που δρα στον τροχό. Επιπλέον, η ροπή συνδέεται με τη γωνιακή επιτάχυνση, α

$$N = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\alpha = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\frac{d^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

όπου η ροπή αδρανείας, I του κυλίνδρου είναι $I = MR^2/2$ (μάζα του τροχού). Άρα η γωνιακή επιτάχυνση είναι

$$I\alpha = -\mu mgR$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2\mu mgR}{MR^2}$$
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2\mu mg}{MR} = -\frac{2 \times 0.4 \times 40 \times 10^3 \times 980}{1,2 \times 10^6 \times 50}\,\mathrm{rad/s^2}$$
$$\Rightarrow \alpha = -0,523\,\mathrm{rad/s^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -0,523$$
$$\Rightarrow \omega = \omega_0 - 0,523\,t = 150 \times 2\pi - 0,523\,t$$

Άρα θα έχουμε $\omega = 0$ όταν

$$t = \frac{300\pi}{0,523} = 1,8 \times 10^3\,\mathrm{s}$$

Εφ' όσον η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, η μέση γωνιακή ταχύτητα είναι

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}$$

και επομένως η γωνία που θα διαγραφεί ώσπου ο τροχός θα σταματήσει είναι

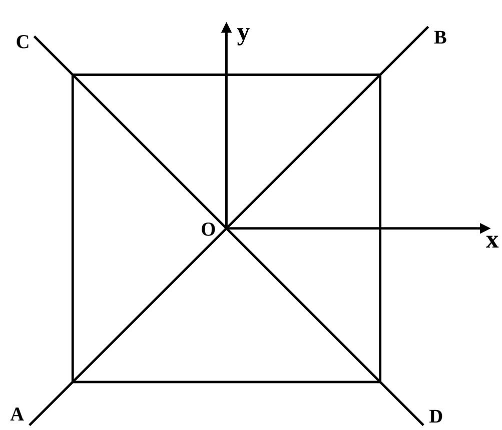
$$\frac{\omega_0}{2}t = 1,35 \times 10^5 \,\text{στροφές}$$

ή σε rad θα είναι

$$\frac{\omega_0 2\pi}{2}t = 8,5 \times 10^5\,\mathrm{rad}$$

Πρόβλημα 7.9 Αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας μιας συμπαγούς τετραγωνικής πλάκας ως προς ένα διαγώνιο άξονα, ισούται με τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που βρίσκεται μέσα στο επίπεδο της πλάκας, περνάει από το κέντρο της, και είναι παράλληλος προς μια πλευρά του τετραγώνου. (Το θεώρημα των κάθετων αξόνων, μαζί με τη συμμετρία του τετραγώνου, μας επιτρέπουν να κάνουμε την απόδειξη χωρίς άλλο υπολογισμό).

Λύση:



Σχήμα 7.8

Λόγω συμμετρίας οι ροπές αδρανείας ως προς τους άξονες AB και CD θα πρέπει να είναι ίσες

$$I_{AB} = I_{CD}$$

Από το θεώρημα των καθέτων αξόνων θα έχουμε

$$I_{AB} + I_{CD} = I_z$$

$$\Rightarrow I_{AB} = I_{CD} = \frac{I_z}{2}$$

όπου I_z είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα των z τον κάθετο στο επίπεδο της τετραγωνικής πλάκας στο σημείο Ο.
Ακόμη από το θεώρημα των καθέτων αξόνων θα έχουμε

$$I_x + I_y = I_z, \qquad I_x = I_y$$

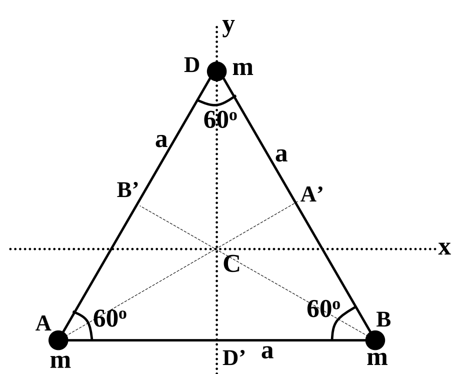
$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_z}{2}$$

Επομένως θα ισχύει

$$I_x = I_y = I_{AB} = I_{CD} = \frac{I_z}{2}$$

Πρόβλημα 7.10 Τρεις ίσες σημειακές μάζες βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a (βλ. σχήμα 7.9) και συνδέονται μεταξύ τους με ένα αβαρές τριγωνικό φύλλο.
(α) Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_z ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο τρίγωνο και περνά από το κέντρο του, C.
(β) Να υπολογίσετε την I_y ως προς τον άξονα y (βλ. σχήμα 7.9).
(γ) Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα των κάθετων αξόνων, για να υπολογίσετε την I_x.

Λύση:



Σχήμα 7.9

(α) Το σημείο C είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου (στο σημείο που τέμνονται οι διάμεσοι του τριγώνου), άρα θα ισχύει από την Ευκλίδεια γεωμετρία: $(CD) = (2/3)(DD')$ και $(DD') = a \sin 60^o$, επομένως

$$(CD) = \frac{2}{3} a \sin 60^o$$

$$\Rightarrow (CD) = \frac{2}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Λόγω συμμετρίας, ομοίως θα ισχύει

$$(CD) = (CA) = (CB) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο C, είναι

$$I_z = 3m(CD)^2 = 3m\frac{a^2}{3} = ma^2$$

(β) Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των y θα είναι

$$I_y = m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{2}$$

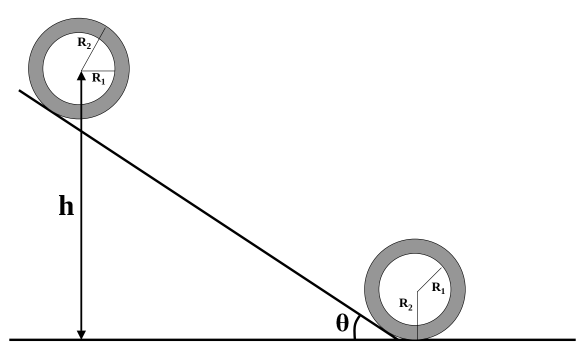
(γ) Από το θεώρημα των καθέτων αξόνων θα έχουμε

$$I_x + I_y = I_z$$

$$\Rightarrow I_x = I_z - I_y = ma^2 - \frac{ma^2}{2} = \frac{ma^2}{2}$$

Πρόβλημα 7.11 Μια κούφια σφαίρα με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2, κυλάει προς τα κάτω, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης θ.
(α) Να βρείτε τη γωνιακή και τη γραμμική επιτάχυνση της σφαίρας.
(β) Στο χαμηλότερο άκρο του, το κεκλιμένο επίπεδο συνδέεται με καμπύλη επιφάνεια, που τελικά καταλήγει σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Με ποια ταχύτητα θα κινείται το σώμα στο τελικό οριζόντιο επίπεδο, αν ξεκινάει από την ηρεμία, και το κέντρο του βρίσκεται σε ύψος H πάνω από το τελικό οριζόντιο επίπεδο; (Να χρησιμοποιήσετε την αρχή διατήρησης της ενέργειας).

Λύση:



Σχήμα 7.10

(α)

Η ροπή αδρανείας της κούφιας σφαίρας μπορεί να βρεθεί αφού θεωρήσουμε δύο σφαίρες ίδιας πυκνότητας μάζας με ακτίνες R_2 και R_1. Βρίσκοντας τις ροπές αδρανείας των δύο αυτών σφαιρών, η διαφορά τους θα είναι η ζητούμενη ροπή αδρανείας.
Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδρανείας μιας σφαίρας ακτίνας r με πυκνότητα μάζας ρ είναι

$$I_s = \frac{2}{5}r^2(\text{Μάζα}) = \frac{2}{5}r^2\rho(\text{Όγκος}) = \frac{2}{5}r^2\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

Η ζητούμενη ροπή αδρανείας, I, είναι

$$I = \frac{2}{5}R_2^2\rho\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{2}{5}R_1^2\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho(R_2^5 - R_1^5)$$

Η μάζα της κούφιας σφαίρας μπορεί να εκφραστεί από την πυκνότητα της μάζας, και είναι

$$M = \rho(\text{Όγκος}) = \rho\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$

$$\Rightarrow \rho\frac{4}{3}\pi = \frac{M}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

επομένως η ροπή αδρανείας, I, είναι

$$I = \frac{2}{5}M\frac{(R_2^5 - R_1^5)}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

Η γραμμική επιτάχυνση δίδεται από την εξίσωση (7)

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + I/MR_2^2} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{2}{5}\frac{M(R_2^5 - R_1^5)}{MR_2^2(R_2^3 - R_1^3)}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{R_2^5(1 - R_1^5/R_2^5)}{R_2^5(1 - R_1^3/R_2^3)}} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{2}{5}\frac{(1 - (R_1/R_2)^5)}{(1 - (R_1/R_2)^3)}}$$

και η γωνιακή επιτάχυνση, α είναι

$$v = R_2\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R_2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow a = R_2\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{R_2} = \frac{1}{R_2}\frac{g\sin\theta}{1 + \frac{2}{5}\frac{(1 - (R_1/R_2)^5)}{(1 - (R_1/R_2)^3)}}$$

(β) Σε ύψος h η κινητική ενέργεια είναι $K_i = 0$ και η δυναμική $U_i = Mgh$. Στο οριζόντιο επίπεδο το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ύψος R_2, επομένως η δυναμική ενέργεια θα είναι $U_f = MgR_2$ και η κινητική ενέργεια θα οφείλεται στη μεταφορική κίνηση συν την περιστροφική κίνηση

$$K_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R_2^2}$$

Από το θεώρημα της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε

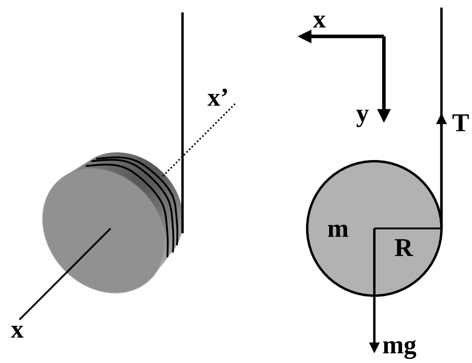
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\Rightarrow Mgh = MgR_2 + \frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{I}{MR_2^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2g(h - R_2)}{1 + I/(MR_2^2)} = \frac{2g(h - R_2)}{1 + \frac{2}{5}\frac{(1 - (R_1/R_2)^5)}{(1 - (R_1/R_2)^3)}}$$

Πρόβλημα 7.12 Το γιο-γιο αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα σχοινί. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σχοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σχοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα τον xx'. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου συναρτήσει της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g. Θεωρήστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το σχοινί παραμένει κατακόρυφο.

Λύση:



Σχήμα 7.11

Στον κύλινδρο του γιο-γιο εξασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος του, mg και η τάση του νήματος, T. Από το δεύτερο νόμο του Newton η γραμμική επιτάχυνση, a, του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι

$$mg - T = ma$$

Επιπλέον, η ροπή, N, ως προς το κέντρο περιστροφής οφείλεται μόνο στην τάση του νήματος διότι το βάρος δεν συνεισφέρει ροπή μιας και η δύναμη περνά από το κέντρο μάζας

$$N = TR = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

όπου η ροπή αδρανείας, I του κυλίνδρου είναι

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Άρα με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Newton θα έχουμε

$$mgR - mRa = I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad g - a = \frac{1}{2}R\alpha \tag{7.6}$$

Όμως η γραμμική και γωνιακή επιτάχυνση συνδέονται με την σχέση

$$a = R\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

επομένως αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε

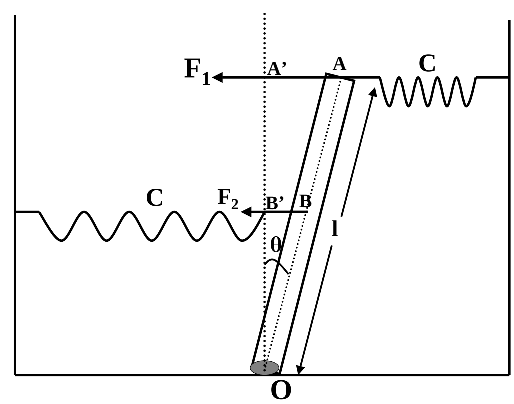
$$g - a = \frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3}g$$

Πρόβλημα 7.13 Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l κρατιέται από δύο ελατήρια A, B με την ίδια σταθερά ελατηρίου C με τέτοιο τρόπο ώστε οι αποστάσεις $OB = AB = l/2$. Αποδείξετε ότι για μικρές αποκλίσεις της γωνίας θ η ράβδος θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση με περίοδο

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{m}{15C}}$$

Λύση:



Σχήμα 7.12

Στη ράβδο εξασκούνται δύο δυνάμεις, F_1, F_2 (δυνάμεις Hooke) που οφείλονται στα δύο ελατήρια

$$F_1 = -C(AA') = -Cl\sin\theta \simeq -Cl\theta$$

και

$$F_2 = -C(BB') = -C\frac{l}{2}\sin\theta \simeq -C\frac{l}{2}\theta$$

Οι δυνάμεις δημιουργούν ροπές, N_1, N_2, ως προς το σημείο O

$$N_1 = F_1(OA') \simeq -Cl\theta l = -Cl^2\theta$$

και

$$N_2 = F_2(OB') \simeq -C\frac{l}{2}\theta\frac{l}{2} = -C\left(\frac{l}{2}\right)^2\theta$$

Η στροφορμή L ως προς το σημείο O είναι $L = I\omega = I\dot{\theta}$. Η εξίσωση κίνηση είναι

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = N = N_1 + N_2$$

$$\Rightarrow \quad I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -C\left(l^2 + \frac{1}{4}l^2\right)\theta$$

$$\Rightarrow I\ddot{\theta} + \frac{5}{4}Cl^2\theta = 0$$

όπου η ροπή αδρανείας, I, της ράβδου ως προς ένα κάθετο άξονα κάθετο στο σημείο O είναι $I = ml^2/3$. Άρα η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{5}{4}Cl^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{15C}{4m}\theta = 0$$

επομένως η ράβδος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{15C}{4m}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{15C}{4m}}$$

και η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{15C}}$$

Πρόβλημα 7.14 Η γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος L αυξάνει από την τιμή λ_0 στο ένα άκρο της $(x = 0)$ σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της $x = L$ σύμφωνα με τη σχέση

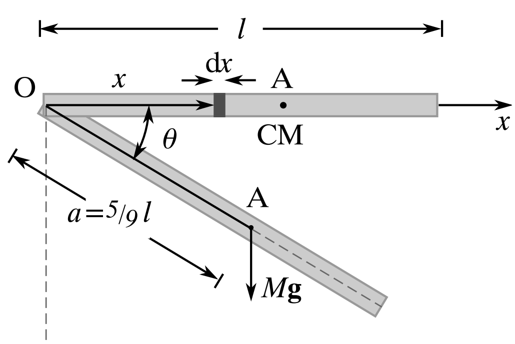
$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

(α) Δείξατε ότι η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα y που περνά από το ελαφρό άκρο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι

$$I = \frac{7}{18}ML^2$$

(β) Η ράβδος ξεκινά από ηρεμία όταν είναι οριζόντια και περιστρέφεται χωρίς τριβές, υπό την επίδραση του βάρους της, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το ελαφρό άκρο της O. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια αρχική θέση.

Λύση:



Σχήμα 7.13

(α) Από το πρόβλημα (5.8) γνωρίζουμε ότι η ολική μάζα της ράβδου είναι

$$M = \frac{3}{2}\lambda_0 l$$

και το κέντρο μάζας της ράβδου απέχει από το ελαφρό άκρο της απόσταση

$$\begin{aligned} a &= \frac{\int_0^l x\mathrm{d}m}{M} = \frac{\int_0^l \lambda x\mathrm{d}x}{M} = \frac{5\lambda_0 l^2}{6M} \\ &= \frac{5}{9}l \end{aligned}$$

Η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα y που περνά από το ελαφρό άκρο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι

$$I = \int_0^l x^2\mathrm{d}m$$

όπου η στοιχειώδης μάζα, $\mathrm{d}m$, είναι

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) \mathrm{d}x$$

Άρα η ροπή αδρανείας της ράβδου μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$I = \int_0^l \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) x^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{12}\lambda_0 l^3$$

Άλλα η ολική μάζα μας δίνει

$$M = \frac{3}{2}\lambda_0 l$$
$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{2}{3l}M$$

και επομένως η ροπή αδρανείας της ράβδου θα είναι

$$I = \frac{7}{12}\lambda_0 l^3 = \frac{7}{12}\frac{2}{3l}Ml^3 = \frac{7}{18}Ml^2$$

(β) Η δύναμη του βάρους δημιουργεί μια ροπή, N, ως προς το σημείο Ο είναι

$$N = Mg(OA) = Mga\cos\theta = Mg\frac{5}{9}l\cos\theta$$

και η εξίσωση κίνησης για την περιστροφή της ράβδου είναι

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = N, \quad \text{όπου } J \text{ στροφορμή}$$
$$\Rightarrow I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = Mg\frac{5}{9}l\cos\theta$$
$$\Rightarrow \frac{7}{18}Ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = Mg\frac{5}{9}l\cos\theta$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{10}{7}\frac{g}{l}\cos\theta \tag{7.7}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\omega$$

και επομένως η εξίσωση (7) θα γραφτεί ως εξής

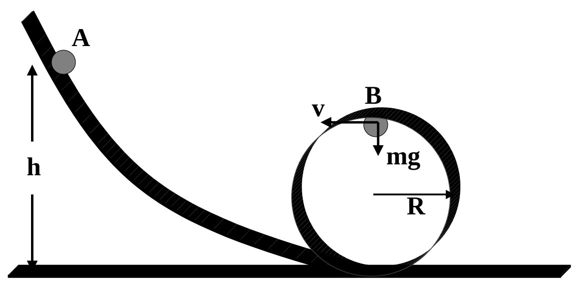
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\omega = \frac{10}{7}\frac{g}{l}\cos\theta$$
$$\Rightarrow \int_0^\omega \omega \mathrm{d}\omega = \frac{10}{7}\frac{g}{l}\int_0^\pi \cos\theta \mathrm{d}\theta$$
$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{2} = \frac{10}{7}\frac{g}{l}\sin\theta$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20}{7}\frac{g}{l}\sin\theta}$$

ή, χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης ενέργειας

$$0 = -Mg\frac{5}{9}l\sin\theta + \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$\omega^2 = \frac{10Mgl\sin\theta}{9I} = \frac{20g\sin\theta}{7l}$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20}{7}\frac{g}{l}\sin\theta}$$

Πρόβλημα 7.15 Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο A, πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h συναρτήσει του R, από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση; Η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R.

Λύση:



Σχήμα 7.14

Στο σημείο A η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι $K_A = 0$ και η δυναμική ενέργεια είναι $U_A = mgh$. Στο σημείο B δυναμική ενέργεια της σφαίρας είναι $U_B = mg(2R-r) \simeq mg2R$ (διότι $R \gg r$) και η κινητική ενέργεια είναι

$$K_B = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

διότι οφείλεται στη γραμμική και περιστροφική κίνηση της σφαίρας. I είναι η ροπή αδρανείας της σφαίρας $I = (2/5)mr^2$.
Από το θεώρημα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας παίρνουμε

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\Rightarrow mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

με τη γωνιακή και γραμμική ταχύτητα να συνδέονται μέσω της σχέσης $v = r\omega$. Άρα η διατήρησης της μηχανικής ενέργειας γράφεται ως εξής

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow gh = 2gR + v^2\frac{7}{10} \tag{7.8}$$

Για να πετύχουμε ανακύκλωση της σφαίρας, θα πρέπει στο σημείο Β η κεντρομόλος επιτάχυνση να είναι ίση με το βάρος της σφαίρας $mv^2/R = mg \Rightarrow v^2 = gR$. Συνεπώς η εξίσωση (7) θα είναι

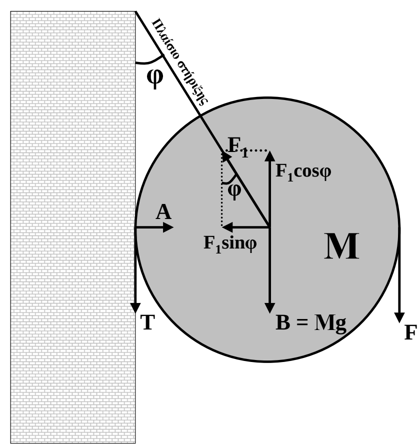
$$gh = 2gR + v^2\frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow gh = gR\left(\frac{7}{10} + 2\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{27}{10}R$$

Πρόβλημα 7.16 Ένα κυλινδρικό ρολό από χαρτί μάζας M και ακτίνας βάσης R (συμπαγής κύλινδρος) ακουμπά σε κατακόρυφο τοίχο και συγκρατείται από ένα πλαίσιο στήριξης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη F ξετυλίγει το ρολό. Ο συντελεστής κινητικής τριβής με τον κατακόρυφο τοίχο είναι η.
(α) Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το πλαίσιο στήριξης στο ρολό.
(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος και τη γωνιακή επιτάχυνση με την οποία περιστρέφεται το ρολό. (Θεωρήστε ότι περιγράφετε την αρχή της κίνησης του συστήματος όπου M, R και ϕ είναι δεδομένα και σταθερά).

Λύση:



Σχήμα 7.15

(α) Από την ισορροπία των δυνάμεων που εξασκούνται στον κύλινδρο στον οριζόντιο άξονα θα έχουμε

$$A = F_1 \sin\phi$$

όπου A είναι η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στο ρολό και F_1 η δύναμη που ασκεί το πλαίσιο στήριξης στο ρολό. Στο κατακόρυφο άξονα θα είναι

$$F + T + B = F_1 \cos\phi \tag{7.9}$$

όπου $F, T = \eta A = \eta F_1 \sin\phi, B = Mg$ είναι η δύναμη που ξετυλίγει το ρολό του χαρτιού, η δύναμη τριβής, και η δύναμη της βαρύτητας, αντιστοίχως.
Η εξίσωση (7) ξαναγράφεται ως εξής

$$F + \eta F_1 \sin\phi + Mg = F_1 \cos\phi$$

$$\Rightarrow F + Mg = F_1(\cos\phi - \eta\sin\phi)$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{F + Mg}{\cos\phi - \eta\sin\phi}$$

(β) Η ολική ροπή, N, που ασκείται στον κύλινδρο ως προς ένα άξονα που περνά από το κέντρο του κυλίνδρου

οφείλεται μόνο στις δυνάμεις F, T, και θα είναι

$$N = (F - T)R$$

και η εξίσωση κίνησης του κυλίνδρου θα είναι

$$N = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

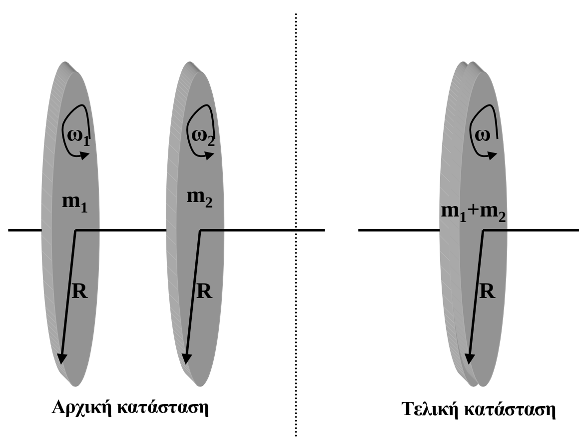
$$\Rightarrow N = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{7.10}$$

όπου η αποκτηθείσα στροφορμή του κυλίνδρου, δίδεται από την $L = I\omega$, όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του, και $I = (1/2)MR^2$ είναι η ροπή αδρανείας του συμπαγούς κυλινδρικού ρολού.
Η εξίσωση κίνησης (7) θα γραφτεί

$$
\begin{aligned}
(F-T)R &= I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow F - \eta F_1 &= \frac{(1/2)MR^2}{R}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow F - \eta\frac{F+Mg}{\cos\phi - \eta\sin\phi} &= \frac{1}{2}MR\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= 2\frac{F(1-2\eta\tan\phi) - Mg\eta\tan\phi}{MR(1-\eta\tan\phi)}
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 7.17 Δυο συμπαγείς δίσκοι με μάζες m_1 και m_2 περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 και στροφορμές L_1 και L_2 αντιστοίχως (Ο άξονας περιστροφής των δίσκων είναι κοινός, γι΄ αυτό μιλάμε μόνο για μέτρα των στροφορμών). Οι δίσκοι έρχονται σε επαφή (βλέπε σχήμα), θα υπάρξει ολίσθηση μεταξύ τους μέχρι να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω, τότε η στροφορμή τους είναι L. Να βρεθούν τα L, ω καθώς και η απώλεια ενέργειας του συστήματος.

Λύση:



Σχήμα 7.16

Από τη διατήρηση της στροφορμής θα έχουμε για την αρχική και τελική κατάσταση

$$
\begin{gathered}
L_{\text{αρχική}} = L_{\text{τελική}} \\
\Rightarrow L_1 + L_2 = L
\end{gathered}
$$

όπου L είναι η τελική στροφορμή που θα αποκτήσουν οι δύο δίσκοι όταν έλθουν σε επαφή.
Γνωρίζουμε ότι η στροφορμή είναι το γινόμενο της ροπής αδρανείας και της γωνιακής ταχύτητας. Επομένως η διατήρηση της στροφορμής θα γραφτεί ως εξής

$$
I\omega = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 \tag{7.11}
$$

όπου οι ροπές αδρανείας των δίσκων είναι

$$
I = \frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2
$$

$$
I_1 = \frac{1}{2}m_1R^2
$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2$$

Επομένως η εξίσωση (7) γράφεται

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) R^2 \omega = \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_1 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2}{m_1 + m_2}$$

Η απώλεια ενέργειας, ΔE, του συστήματος είναι

$$\Delta E = E_1 + E_2 - E$$

όπου $E_1,\ E_2$ είναι οι ενέργειες των δύο δίσκων πριν έλθουν σε επαφή και E η ενέργεια της τελικής κατάστασης. Η ενέργεια λόγω περιστροφής είναι $E = I\omega^2/2$, επομένως θα έχουμε

$$\Delta E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega^2$$

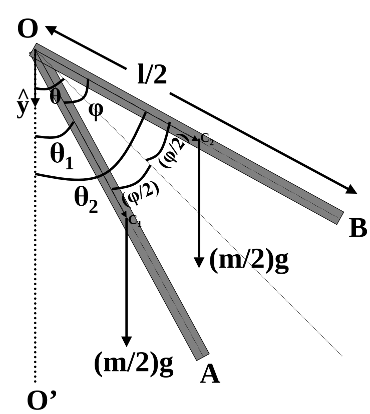
$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_2 R^2 \omega_2^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}(m_1 + m_2) R^2 \left(\frac{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{R^2}{4} \frac{m_1^2 \omega_1^2 + m_1 m_2 \omega_1^2 + m_1 m_2 \omega_2^2 + m_2^2 \omega_2^2 - m_1^2 \omega_1^2 - m_2^2 \omega_2^2 - 2 m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{R^2}{4} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\omega_1 - \omega_2)^2$$

Πρόβλημα 7.18 Διπλώνουμε στη μέση μια ράβδο με μάζα m και μήκος l, έτσι ώστε τα δύο τμήματα της να σχηματίζουν γωνία ϕ. Να υπολογίσετε τη ροπή αδρανείας ως προς άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο AOB και διέρχεται από το σημείο O. Πως εξαρτάται η ροπή αδρανείας από τη γωνία ϕ; Αν η διπλωμένη ράβδος ταλαντώνεται ως προς τον προηγούμενο άξονα, να δείξετε ότι μπορεί να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

Λύση:



Σχήμα 7.17

Η ροπή αδρανείας ως προς άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο AOB και διέρχεται από το σημείο O είναι το άθροισμα των ροπών αδρανείας, I_1, I_2, των δύο τμημάτων $(OA), (OB)$, μάζας $m_1 = m/2$, $m_2 = m/2$ και μήκους $l_1 = l/2$, $l_2 = l/2$, αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδρανείας μιας ομογενούς ράβδου μήκους x και μάζας M είναι $(1/3)Mx^2$. Επομένως η ροπή αδρανείας των δύο τμημάτων θα είναι

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 \tag{7.12}$$

άρα το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της γωνίας ϕ.
Έστω ότι μετατοπίζουμε τη διπλωμένη ράβδο κατά γωνία θ όπως φαίνεται στο σχήμα.
Οι δυνάμεις που ασκούνται στη διπλωμένη ράβδο είναι οι δυνάμεις βαρύτητας

$$\boldsymbol{F}_{OA} = -\frac{m}{2}g\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{F}_{OB} = -\frac{m}{2}g\hat{\boldsymbol{y}}$$

και οι αντίστοιχες ροπές ως προς το σημείο O είναι

$$\boldsymbol{N}_{OA} = \overrightarrow{OC}_1 \times \boldsymbol{F}_{OA} = -\frac{l}{4}\frac{m}{2}\sin\theta_1\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{N}_{OB} = \overrightarrow{OC}_2 \times \boldsymbol{F}_{OB} = -\frac{l}{4}\frac{m}{2}\sin\theta_2\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπου $OC_1 = OC_2 = l/4$, και $\hat{\boldsymbol{z}}$ είναι ο κάθετος άξονας στο επίπεδο AOB.
Η ολική ροπή αδρανείας που ασκείται στη διπλωμένη ράβδο θα είναι

$$N = N_{OA} + N_{OB} = -\frac{1}{4}mlg(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

αλλά

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) \tag{7.13}$$

επειδή

$$\theta = \theta_1 + \phi/2$$
$$\Rightarrow \theta_1 = \theta - \phi/2$$
$$\theta = \theta_2 - \phi/2$$
$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \theta + \phi/2$$

επομένως η εξίσωση (7) γίνεται

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\theta\cos\frac{\phi}{2}$$

άρα η ολική ροπή αδράνειας θα είναι

$$N = -\frac{1}{4}mlg\sin\theta\cos\frac{\phi}{2}$$

και για μικρές γωνίες θ ισχύει $\sin\theta \approx \theta$, η ολική ροπή αδράνειας είναι

$$N = -\frac{1}{4}mlg\cos\frac{\phi}{2}\theta$$

και η εξίσωση της κίνησης θα περιγραφεί από την εξίσωση

$$N = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

όπου η ροπή αδρανείας I της διπλωμένης ράβδου δίνεται από την εξίσωση (7). Άρα η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\frac{1}{12}ml^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{4}mlg\cos\frac{\phi}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{3g}{l}\cos\frac{\phi}{2}\right)\theta = 0$$

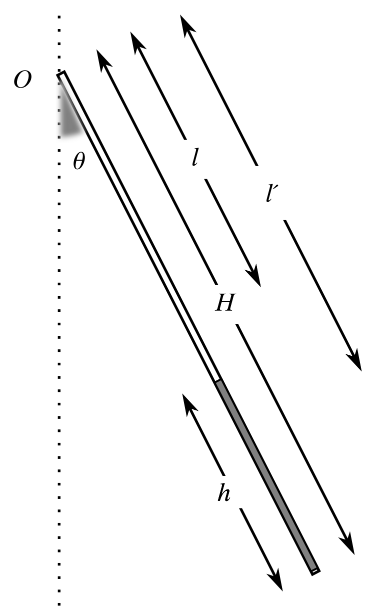
και επομένως η ράβδος εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα ω

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\cos\frac{\phi}{2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g\cos\phi/2}}$$

Πρόβλημα 7.19 Θεωρήστε ένα πολύ λεπτό κούφιο κύλινδρο μάζας M_0 και μήκους H κρεμιέται από ένα σημείο O όπως φαίνεται στο σχήμα.
(α) Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης T_0 του κυλίνδρου για μικρές γωνίες απόκλισης θ.
(β) Τώρα υποθέστε ότι γεμίζουμε τον κύλινδρο σε ύψος h με μια ομοιόμορφη μάζα m. Βρείτε τη νέα περίοδο ταλάντωσης και εκφράστε τη σαν συνάρτηση των παραμέτρων $x = h/H$, $R = m/M_0$. Για ποια τιμή της παραμέτρου x η περίοδος ταλάντωσης στο τετράγωνο T^2 γίνεται μέγιστη. Εκφράστε αυτή την παράμετρο x σαν συνάρτηση του R. Προφανώς το $R > 0$, υπάρχει κάποιο άνω όριο για το R ώστε να έχουμε πραγματική τιμή για την παράμετρο x;

Λύση:



Σχήμα 7.18

(α)

Το σύστημα αυτό είναι ένα φυσικό εκκρεμές που θα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με περίοδο T_0 που δίνεται από τη σχέση

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{M_0 g l}}$$

όπου g, M_0, $l = H/2$, είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, η μάζα και το μήκος από το σημείο στήριξης μέχρι το κέντρο μάζας του λεπτού κυλίνδρου αντιστοίχως. I_0 είναι η ροπή αδρανείας του λεπτού κυλίνδρου ως προς άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο της ράβδου και της κατακόρυφου που περνά από το σημείο O.
Η ροπή αδρανείας I_0 αυτού του λεπτού κυλίνδρου μπορεί να βρεθεί από τη σχέση που δίνει τη ροπή αδρανείας λεπτής ράβδου μήκους H και μάζας M

$$I_0 = \frac{1}{3}M_0 H^2$$

Συνεπώς η περίοδος ταλάντωσης θα είναι

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M_0 H^2/3}{M_0 g H/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2H}{3g}}$$

(β) Αφού προσθέσουμε τη μάζα m το κέντρο μάζας του νέου συστήματος θα είναι βρίσκεται σε σημείο που θα απέχει από το σημείο στήριξης O:

$$l' = \frac{M_0(l/2) + m(H - h/2)}{M_0 + m}$$

και η περίοδος ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(M_0 + m)gl'}}$$

όπου η ροπή αδρανείας, I, του συστήματος λεπτού κυλίνδρου και μάζας m θα είναι

$$I = I_0 + I_m$$

Από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων η ροπή αδρανείας I_m της μάζας m θα είναι το άθροισμα της ροπής αδρανείας του κέντρου μάζας του σώματος μάζας m, $mH^2/3$, και του όρου $m(H - h/2)^2$ ($H - h/2$ είναι η απόσταση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και της μάζας m από το σημείο στήριξης O). Επομένως η ροπή αδρανείας, I_m, είναι

$$I_m = \frac{1}{3}mH^2 + m(H - \frac{h}{2})^2 = m\left(H^2 - Hh + \frac{h^2}{4}\right) + \frac{1}{3}mH^2$$

και το I θα είναι

$$I = \frac{1}{3}M_0 H^2 + I_m = \frac{1}{3}M_0 H^2 + m\left(H^2 - Hh + \frac{h^2}{3}\right)$$

και η περίοδος ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(M_0 + m)gl'}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M_0 H^2/3 + m(H^2 - Hh + h^2/3)}{(M_0 + m)gl'}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{(1/3)M_0 H^2 + m(H^2 - Hh + h^2/3)}{g[M_0 H/2 + m(H - h/2)]}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{1/3 + R(1 - x + x^2/3)}{1/2 + R(1 - x/2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1/3 + R(1 - x + x^2/3)}{1/2 + R(1 - x/2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3T^2 g}{8\pi^2} = \frac{1 + 3R(1 - x + x^2/3)}{1 + 2R(1 - x/2)}$$

$$\Rightarrow \frac{3T^2 g}{8\pi^2} = \frac{1 + R(3 - 3x + x^2)}{1 + R(2 - x)}$$

Για να έχουμε μέγιστη ταλάντωση στο τετράγωνο θα πρέπει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1 + R(3 - 3x + x^2)}{1 + R(2 - x)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(-3R+2Rx)[1+R(2-x)]+[1+R(3-3x+x^2)]R}{[1+R(2-x)]^2}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{R[3Rx^2-6x+(2+3R)]}{[1+R(2-x)]^2}=0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $3Rx^2-6x+(2+3R)=0$ θα μας δώσει την τιμή του x που θα δώσει τη μέγιστη T^2. Οι ρίζες είναι

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-12R(2+3R)}}{6R}=\frac{1+\sqrt{1-2R/3-R^2}}{R}$$

Για πραγματική ρίζα θα πρέπει η διακρίνουσα $1-2R/3-R^2$ να είναι θετική

$$1-\frac{2}{3}R-R^2>0$$

$$\Rightarrow R^2+\frac{2}{3}R-1<0$$

όπου το R θα είναι

$$\frac{-1-\sqrt{10}}{3}<R<\frac{-1+\sqrt{10}}{3}$$

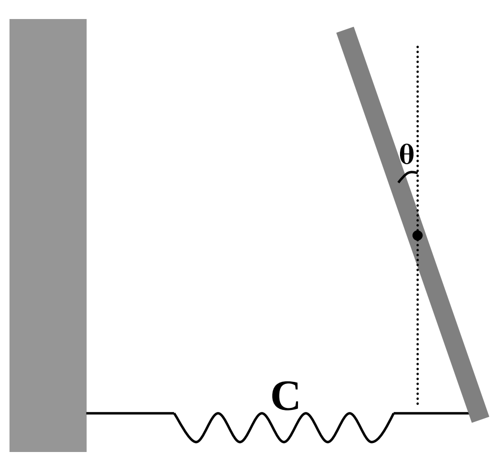
αλλά το $R>0$, συνεπώς θα έχουμε τη συνθήκη

$$0<R<\frac{-1+\sqrt{10}}{3}$$

Πρόβλημα 7.20

Μια λεπτή και ομοιόμορφη μεταλλική ράβδος με μάζα M και μήκους l μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος σε αυτήν. Ένα ελατήριο σε οριζόντια διεύθυνση, με σταθερά C, έχει συνδεδεμένο το ένα άκρο του με το κάτω άκρο της ράβδου, ενώ το άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένο σε σταθερό στήριγμα. Αν η ράβδος μετατοπιστεί κατά μια μικρά γωνία θ από την κατακόρυφο (βλέπε στο σχήμα) και αφεθεί ελεύθερη, να δείξετε ότι η ράβδος εκτελεί γωνιακή απλή αρμονική κίνηση και να βρείτε την περίοδο της T.

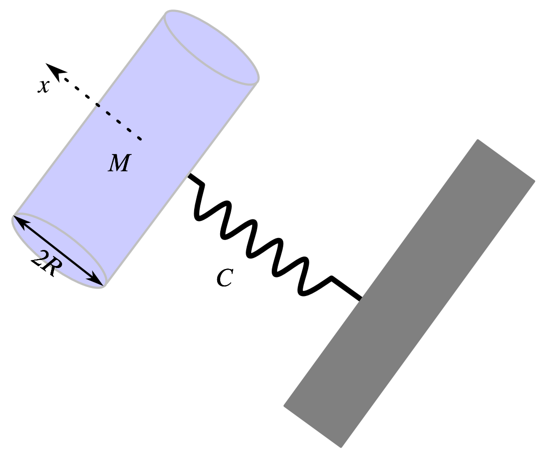
Λύση:



Σχήμα 7.19

Πρόβλημα 7.21 Συμπαγής κύλινδρος με μάζα M και ακτίνα R ισορροπεί πάνω στην οριζόντια επιφάνεια ενός τραπεζιού (βλ. σχήμα 7.20). Ένα ελατήριο με σταθερά C έχει το ένα άκρο του συνδεδεμένο με ένα στήριγμα δεξιά. Το άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένο με τον κεντρικό άξονα του κυλίνδρου γύρω από τον οποίο ο κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. (Το ελατήριο συνδέεται μέσα από μια λεπτή σχισμή που έχει ανοιχτεί στον κύλινδρο, έτσι ώστε να μην παρεμποδίζεται η περιστροφή του κυλίνδρου γύρω από τον άξονα του). Ο κύλινδρος μετακινείται προς τα αριστερά σε απόσταση x, με αποτέλεσμα να επιμηκυνθεί το ελατήριο, και αφήνεται ελεύθερος. Υπάρχει αρκετή τριβή μεταξύ της επιφάνειας του τραπεζιού και του κυλίνδρου ώστε να μπορεί ο κύλινδρος να κυλά χωρίς να γλυστράει καθώς κινείται μπροσ-πίσω με το άκρο του ελατηρίου. Να δείξετε ότι το κέντρο του κυλίνδρου εκτελεί απλή αρμονική κίνηση και να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης συναρτήσει της μάζας M και της σταθεράς ελατηρίου C.

Λύση:



Σχήμα 7.20

Ας θεωρήσουμε το σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο του κυλίνδρου στη θέση ισορροπίας όπως φαίνεται στο σχήμα 7.20. Αν ο κύλινδρος μετατοπιστεί προς τ' αριστερά κατά x από το άθροισμα των ροπών έχουμε

$$\sum \boldsymbol{N} = I_{cm}\boldsymbol{\alpha}$$

όπου α είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου. Μόνο η δύναμη της τριβής δημιουργεί ροπή, άρα

$$f_s R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

$$\Rightarrow f_s = \frac{1}{2} M R \alpha$$

Αλλά $R\alpha = a_{cm}$, όπου a_{cm} είναι η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Άρα

$$f_s = \frac{1}{2} M a_{cm} \tag{7.14}$$

Από το άθροισμα των δυνάμεων έχουμε

$$\sum \boldsymbol{F}_x = m\boldsymbol{a}_x$$

$$\Rightarrow f_s - kx = -M a_{cm}$$

$$\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{2} M a_{cm} - kx = -M a_{cm}$$

$$\Rightarrow kx = \frac{3}{2} M a_{cm}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - \frac{2k}{3M} x = 0$$

Βλέπουμε ότι ο κύλινδρος εκτελεί αρμονική ταλάντωση με

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

και περίοδο

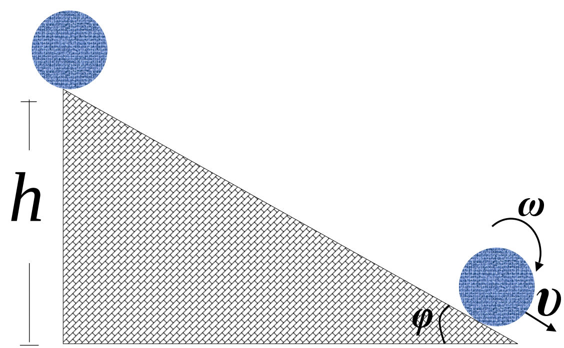
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

Πρόβλημα 7.22 Δίδονται ομογενής συμπαγής κύλινδρος και ομογενές κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας R, και ύψους L. Εξηγήστε ποιοτικά:

(α) Ποιο από τα δύο σώματα έχει μεγαλύτερη ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα συμμετρίας του;

(β) Εάν τα δύο σώματα αφεθούν στην κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης ϕ και κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν, ποιο από τα δύο θα φθάσει νωρίτερα στο κάτω άκρο του κεκλιμένου επιπέδου;

Λύση:



Σχήμα 7.21

(α)

Είναι γνωστό ότι

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{7.15}$$

Στο συμπαγή κύλινδρο η μάζα κατανέμεται ομοιόμορφα σε αποστάσεις από τον άξονά του $r_i \leq R$. Στο κυλινδρικό φλοιό ΟΛΗ η μάζα είναι κατανεμημένη σε αποστάσεις $r_i = R$. Τότε, από τη σχέση (7), προκύπτει ότι $I_\kappa < I_{\kappa\kappa}$. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι $I_\kappa = mR^2/2$ και $I_{\kappa\kappa} = mR^2$.

(β)

Για την αρχική θέση και τελική θέση, γράφουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{7.16}$$

όπου I η ροπή αδράνειας του σώματος. Επειδή, $v = \omega R$, από τη σχέση (7) έχουμε

$$v = \frac{R\sqrt{2mgh}}{mR^2 + I}$$

οπότε λόγω του ερωτήματος (α) $v_{\kappa\kappa} < v_\kappa$. Υπολογίζεται ότι

$$v_\kappa = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

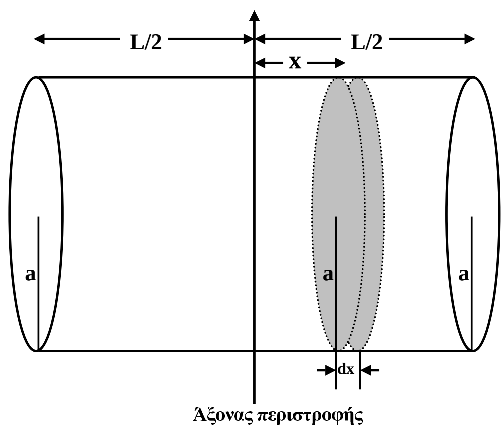
και

$$v_{\kappa\kappa} = \sqrt{gh}$$

Πρόβλημα 7.23 Θεωρούμε γνωστό ότι η ροπή αδράνειας ενός λεπτού δίσκου ως προς ένα διαμετρικό άξονα είναι $ma^2/4$. Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων, για να αποδείξετε ότι για ένα συμπαγή κύλινδρο, του οποίου η μάζα είναι M, η ακτίνα α και το μήκος L, η ροπή αδράνειας ως προς έναν εγκάρσιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του, είναι

$$I = \frac{1}{4}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

Λύση:



Σχήμα 7.22

Η μάζα του στοιχειώδους γραμμοσκιασμένου δίσκου πάχους (ύψους) $\mathrm{d}x$, όπως φαίνεται στο σχήμα είναι

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho(\text{Επιφάνεια})(\text{ύψος}) = \rho S \mathrm{d}x = \rho \pi a^2 \mathrm{d}x$$

όπου ρ είναι πυκνότητα μάζας του κυλίνδρου.
Η στοιχειώδης ροπή αδράνειας, $\mathrm{d}I'$, γύρω από ένα διαμετρικό του άξονα είναι

$$\mathrm{d}I' = \frac{1}{4}\mathrm{d}ma^2 = \frac{1}{4}\pi\rho a^4 \mathrm{d}x$$

Από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα του Steiner) η στοιχειώδης ροπή αδρανείας, $\mathrm{d}I$ γύρω από τον άξονα περιστροφής του σχήματος (άξονας συμμετρίας) είναι

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}I' + \mathrm{d}mx^2 = \frac{1}{4}\pi\rho a^4 \mathrm{d}x + \rho\pi a^2 \mathrm{d}x x^2$$

όπου x η απόσταση του στοιχειώδους δίσκου από τον άξονα συμμετρίας. Ολοκληρώνοντας το $\mathrm{d}I$ θα έχουμε τη ροπή αδρανείας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονα συμμετρίας

$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{4}\pi\rho a^4 \mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{+L/2} \rho\pi a^2 \mathrm{d}x x^2 = \frac{1}{4}\pi a^4 \rho L + \pi a^2 \rho \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\pi a^4 \rho L + \frac{1}{12}\pi a^2 \rho L^3 \tag{7.17}$$

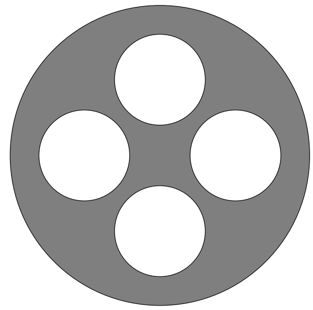
Η ολική μάζα, M, του κυλίνδρου ακτίνας a και ύψους L, είναι

$$M = \int \mathrm{d}m = \int \rho \mathrm{d}V = \rho \int \mathrm{d}V = \rho(\text{Επιφάνεια})(\text{ύψος}) = \rho\pi a^2 L$$

και επομένως η ροπή αδρανείας από την εξίσωση (7) είναι

$$I = \frac{1}{4}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

Πρόβλημα 7.24 Χρησιμοποιώντας την αρχή ότι οι ροπές αδράνειας μπορούν να προστεθούν, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντρικό άξονα του κυλινδρικού σώματος του οποίου η διατομή φαίνεται στο σχήμα 7.23. Η μάζα του σώματος είναι M, η ακτίνα του a, η ακτίνα καθενός από τα τέσσερα κυλινδρικά κενά είναι $a/3$ και ο άξονας κάθε κενού βρίσκεται σε απόσταση $a/2$ από τον κεντρικό άξονα.



Σχήμα 7.23

Λύση:

Η ροπή αδρανείας ενός στερεού κυλίνδρου πυκνότητας ρ, ακτίνας $a/3$ και μήκους L γύρω από τον άξονα συμμετρίας (άξονας που περνά από το κέντρο του) είναι

$$I^{\text{KM}} = \frac{1}{2}m'\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 L\left(\frac{a}{3}\right)^2$$

Η ροπή αδρανείας καθενός από τους μικρότερους κυλίνδρους πυκνότητας ρ και ακτίνας $a/3$ γύρω από τον άξονα συμμετρίας του κύριου κυλίνδρου ακτίνας a είναι

$$I' = I^{\text{KM}} + m'\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

διότι η απόσταση μεταξύ του κέντρου του κύριου κυλίνδρου ακτίνας a και του κέντρου κάθε μικρού κυλίνδρου ακτίνας $a/3$ είναι $a/2$. Επομένως η ροπή αδρανείας είναι

$$I' = \frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 L\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \rho\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 L\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Υπάρχουν 4 τέτοιοι μικροί κύλινδροι που συνεισφέρουν αρνητικά στην ολική ροπή αδρανείας, I, όταν αφαιρεθούν οι μάζες τους

$$I = \frac{1}{2}m''a^2 - 4I'$$

όπου m'' είναι η μάζα του κυλίνδρου ακτίνας a και μήκους L όταν υπάρχει μάζα σε όλο τον όγκο

$$m'' = \rho\pi a^2 L$$

Επομένως η ροπή αδρανείας θα είναι

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi a^4 L - \frac{11}{81}\rho\pi a^4 L$$

Η μάζα του κυλίνδρου, M, αφού αφαιρέσουμε τους 4 μικρούς κυλίνδρους ακτίνας $a/3$ θα είναι

$$M = m'' - 4m' = \rho\pi a^2 L - 4\rho\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 L = \frac{5}{9}\rho\pi a^2 L$$

$$\Rightarrow \rho\pi a^2 L = \frac{9}{5}M$$

και συνεπώς η ολική ροπή αδρανείας του σώματος είναι

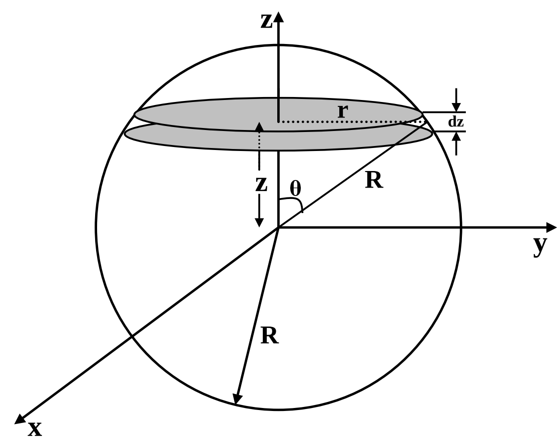
$$I = \frac{9}{5}Ma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{81}\right) = \frac{59}{90}Ma^2$$

Πρόβλημα 7.25 Να αποδειχθεί ότι η ροπή αδράνειας συμπαγούς σφαίρας ως προς ένα διαμετρικό άξονα είναι

$$\frac{2}{5}MR^2$$

(Η απόδειξη γίνεται εύκολα, αν θεωρήσουμε ότι η σφαίρα είναι ένα σύνολο από κυκλικούς δίσκους απειροστού πάχους, προσαρμοσμένους μέσα στη σφαιρική επιφάνεια.)

Λύση:



Σχήμα 7.24

Θεωρούμε ένα στοιχειώδη δίσκο ύψους $\mathrm{d}z$ και ακτίνας $r = R\sin\theta$ και μάζας, $\mathrm{d}m$

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho\pi r^2 \mathrm{d}z = \rho\pi R^2 \sin^2\theta \mathrm{d}z$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας της σφαίρας.
Η στοιχειώδης ροπή αδρανείας, $\mathrm{d}I$, αυτού του δίσκου είναι

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\mathrm{d}mr^2 = \frac{1}{2}R^4(\sin\theta)^4\rho\pi R\mathrm{d}(\cos\theta)$$

όπου $z = R\cos\theta \Rightarrow \mathrm{d}z = R\mathrm{d}(\cos\theta)$. Άρα αφού ολοκληρώσουμε το $\mathrm{d}I$ θα έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi R^5 \int_{\pi}^{0} \sin^4\theta \mathrm{d}(\cos\theta) = \frac{1}{2}\rho\pi R^5 \int_{-1}^{+1} (1-\omega^2)^2 \mathrm{d}\omega$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει $\cos\theta = \omega$ και $\sin^4\theta = (\sin^2\theta)^2 = (1-\cos^2\theta)^2 = (1-\omega^2)^2$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{+1} (1-\omega^2)^2 \mathrm{d}\omega = \frac{16}{15}$$

Άρα η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$$

και η πυκνότητα μάζας της σφαίρας είναι

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$$

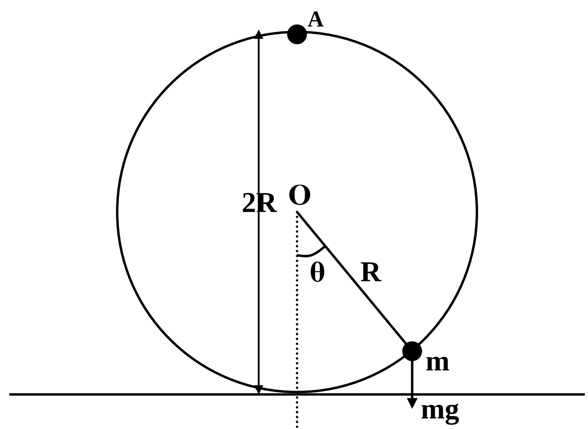
$$\Rightarrow \rho\pi R^3 = \frac{3M}{4}$$

Άρα η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \frac{8}{15}\rho\pi R^5 = \frac{8}{15}\frac{3M}{4}R^2 = \frac{2}{5}MR^2$$

Πρόβλημα 7.26 Ένας λεπτός δακτύλιος με μάζα M και ακτίνα R, είναι συναρμολογημένος έτσι, ώστε να περιστρέφεται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του. Ένα σωματίδιο με μάζα m δένεται στο δακτύλιο και το σύστημα κρέμεται ακίνητο με τη μάζα m στο κάτω μέρος. Να βρείτε τη συχνότητα του συστήματος για ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Επίσης να βρείτε τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που το σύστημα αποκτά, αν ελευθερωθεί από τη θέση ισορροπίας με τη μάζα m στην ανώτατη θέση.

Λύση:



Σχήμα 7.25

Ο δακτύλιος είναι συμμετρικός ως προς το σημείο Ο, επομένως δεν υπάρχει ροπή πάνω στο δακτύλιο και που να οφείλεται στη βαρύτητα.
Η μόνη ροπή ως προς το σημείο Ο οφείλεται στη μάζα m και είναι

$$N = -mgR\sin\theta \simeq -mgR\theta$$

εφ' όσον για μικρές γωνίες $\theta \ll$ το $\sin\theta \simeq \theta$.
Η εξίσωση κίνησης του συστήματος θα είναι

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = N = -mgR\theta$$

όπου η ροπή αδρανείας, I, ως προς το σημείο O από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων θα είναι

$$I = MR^2 + mR^2 = (M+m)R^2$$

άρα η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$(M+m)R^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgR\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mg\theta}{(M+m)R} = 0$$

επομένως θα έχουμε μια απλή αρμονική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα, ω

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{(M+m)R}}$$

Όταν η μάζα βρίσκεται στην κορυφή του δακτυλίου, A, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι

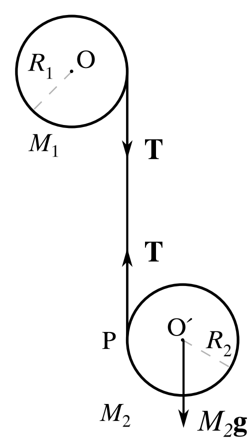
$$E = mg2R$$

Από διατήρηση της ενέργειας μπορούμε να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα που το σύστημα θα αποκτήσει

$$mg2R = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{4mgR}{(M+m)R^2}} = 2\sqrt{\frac{mg}{(M+m)R}} = 2\omega$$

Πρόβλημα 7.27 Ένας κύλινδρος που έχει μάζα M_1 και ακτίνα R_1 είναι αναγκασμένος να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του, ο οποίος είναι οριζόντιος. Ένα νήμα τυλιγμένο γύρω από αυτόν τον κύλινδρο είναι επίσης τυλιγμένο, από το άλλο του άκρο, γύρω από ένα δεύτερο κύλινδρο με μάζα M_2 και ακτίνα R_2. Ο δεύτερος κύλινδρος είναι ελεύθερος να πέφτει, διατηρώντας τον άξονα του οριζόντιο καθώς το νήμα ξετυλίγεται, όπως φαίνεται στην εικόνα . θεωρούμε, κατά προσέγγιση, ότι το νήμα μένει κατακόρυφο και ζητούμε:
(α) Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δεύτερου κυλίνδρου
(β) Τη γωνιακή επιτάχυνση του δεύτερου κυλίνδρου
(γ) Τη γωνιακή επιτάχυνση του πρώτου κυλίνδρου.
(δ) Την τάση του νήματος. Αν πάρουμε τις ροπές ως προς το σημείο P του σχήματος, ποια είναι η ύποθετική δύναμη΄ που ασκείται στο κέντρο μάζας του δεύτερου κυλίνδρου;
(ε) Θεωρήστε τις ροπές για το M_2 γύρω από το P. Βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση a_2.



Σχήμα 7.26

Λύση:

(α) Η ροπή, N_1, ως προς το σημείο O (σταθερό σημείο) είναι

$$N_1 = TR_1 = I_1\alpha_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2\alpha_1$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M_1R_1\alpha_1 \tag{7.18}$$

όπου T είναι η τάση του νήματος και α_1 η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου R_1.
Η κίνηση του κέντρου μάζας, O', του κυλίνδρου R_2 θα υπακούει στο δεύτερο νόμο του Newton

$$M_2g - T = M_2a_2 \tag{7.19}$$

όπου a_2 είναι η μεταφορική επιτάχυνση του κυλίνδρου μάζας M_2.
Η ταχύτητα, v_2, του κέντρου μάζας O' είναι

$$v_2 = R_1\omega_1 + R_2\omega_2$$

όπου $R_1\omega_1$ είναι η ταχύτητα του P σχετικά ως προς το O, και $R_2\omega_2$ είναι η ταχύτητα του O' σχετικά ως προς το σημείο P. Επομένως η μεταφορική επιτάχυνση, a_2 είναι

$$a_2 = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = R_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + R_2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2 \tag{7.20}$$

Η ροπή, N_2, ως προς το σημείο O' είναι

$$N_2 = TR_2 = I_2\alpha_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2\alpha_2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M_2R_2\alpha_2$$

και από την εξίσωση (7) η τάση του νήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}M_2R_2\alpha_2 = \frac{1}{2}M_1R_1\alpha_1$$

$$\Rightarrow M_2R_2\alpha_2 = M_1R_1\alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{M_2R_2}{M_1R_1}\alpha_2 \tag{7.21}$$

και από την εξίσωση (7) θα έχουμε

$$M_2g - \frac{1}{2}M_2R_2\alpha_2 = M_2a_2$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (7) η εξίσωση (7) μας δίνει

$$a_2 = R_2\alpha_2\left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) = R_2\alpha_2\frac{(M_2 + M_1)}{M_1} \tag{7.22}$$

και

$$g - \frac{1}{2}\frac{M_1a_2}{M_1 + M_2} = a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2 + \frac{3}{2}M_1}\right)g \tag{7.23}$$

(β) Από τις εξισώσεις (7) και (7) έχουμε

$$R_2\alpha_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}a_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(\frac{M_1 + M_2}{M_2 + \frac{3}{2}M_1}\right)g$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{g}{R_2}\left(\frac{M_1}{M_2 + \frac{3}{2}M_1}\right) \tag{7.24}$$

(γ) Από τη σχέση $M_2R_2\alpha_2 = M_1R_1\alpha_1$, έχουμε

$$\alpha_1 = \frac{M_2R_2\alpha_2}{M_1R_1} = \frac{M_2g}{R_1(M_2 + \frac{3}{2}M_1)} = \frac{g}{R_1}\left(\frac{M_2}{M_2 + \frac{3}{2}M_1}\right)$$

(δ) Η τάση, T, του νήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}M_2R_2\alpha_2 = \frac{1}{2}\frac{M_1M_2g}{(M_2 + \frac{3}{2}M_1)}$$

(ε) Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου M_2 κινείται προς τα κάτω. Η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση της κίνησης του νήματος και της περιστροφής του M_2 γύρω από το P (στιγμιαίος πόλος περιστροφής).

1. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό παίρνοντας τη στροφορμή ως προς το P σε σχέση με το επιταχυνόμενο σύστημα που είναι συνδεδεμένο με το κινούμενο ξετυλιγμένο νήμα. Αυτό σημαίνει ότι οι ταχύτητες είναι σε σχέση με ένα επιταχυνόμενο σύστημα, οπότε πρέπει να εισάγουμε υποθετικές επιταχύνσεις και δυνάμεις. Είναι ξεκάθαρο ότι στην περίπτωση αυτή η υποθετική επιτάχυνση θα είναι $-a_s$, όπου a_s είναι η επιτάχυνση του νήματος (Θυμηθείτε ότι ο στιγμιαίος πόλος περιστροφής P καθορίζει την κίνηση σε σχέση με το επιταχυνόμενο νήμα). Έστω $F = -a_s M_2$ η υποθετική δύναμη. Θα έχουμε

$$M_2 g R_2 - M_2 a_s R_2 = \frac{3}{2} M_2 R_2^2 a_2 \tag{7.25}$$

Το ξετυλιγμένο νήμα εκτελεί μεταφορική κίνηση (χωρίς περιστροφή) με το a_s να δίνεται από την $a_s = a_1 R_1$, οπότε από την Εξ. (1) λαμβάνουμε

$$g - a_1 R_1 = \frac{3}{2} R_2 a_2 \tag{7.26}$$

Έχουμε τις εξισώσεις (7), (7), (7), δηλαδή

$$\begin{aligned} a_2 &= R_1 a_1 + R_2 a_1 \\ T &= \frac{1}{2} M_1 R_1 \alpha_1 \\ M_2 g - T &= M_2 a_2 \end{aligned}$$

αντίστοιχα. Επομένως από τις Εξ. (1), (7), (7) και (7) παίρνουμε πάλι την Εξ. (7).

$$a_2 = \frac{g}{R_2} \left(\frac{M_1}{M_2 + \frac{3}{2} M_1} \right)$$

2. Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας το παρακάτω θεώρημα: μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\mathbf{N} = \mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t$ ως προς επιταχυνόμενο άξονα, δεδομένου ότι οι σχετιζόμενες ταχύτητες στο $\mathbf{L}$ ή το L είναι σε σχέση με αδρανειακό σύστημα και ότι το σημείο ή άξονας έχει ταχύτητα παράλληλη κάθε φορά με το κέντρο της μάζας του κινούμενου συστήματος. Στην περίπτωσή μας το L ως προς το P, που είναι το σημείο του επιταχυνόμενου νήματος, στιγμιαίο, σε σύμπτωση με το αντίστοιχο σημείο του κυλίνδρου, δίνεται από την

$$L = L_{\text{"M}} + L_{\text{"MΠ}}$$

ωηερε

$$L_{\text{"M}} = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 \omega^2$$

ανδ

$$L_{\text{"MΠ}} = M_2 v_{\text{"M}} R_2$$

επομένως

$$N = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L_{\text{"M}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}L_{\text{"MΠ}}}{\mathrm{d}t}$$

ορ

$$M_2 g R_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 \alpha_2 + M_2 R_2 a_2$$

Εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης είναι σαφές ότι

$$\begin{aligned} a_2 &= a_2 R_2 + a_1 \\ &= a_2 R_2 + g \frac{M_2}{M_2 + \frac{3}{2} M_1} \end{aligned}$$

και επομένως

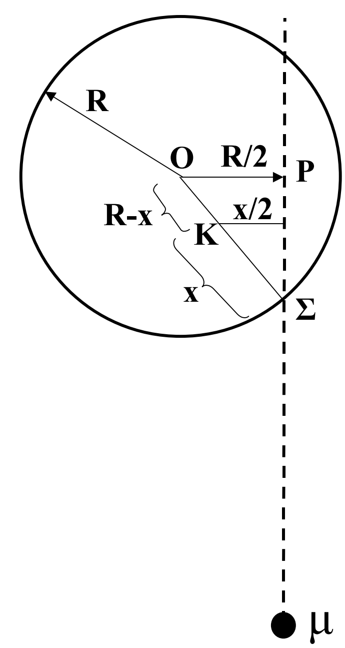
$$M_2 g R_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 \alpha_2 + M_2 R_2 \left(\alpha_2 R_2 + g \frac{M_2}{M_2 + \frac{3}{2} M_1} \right)$$

Τελικά

$$\alpha_2 = \frac{g}{R_2} \frac{M_1}{M_2 + \frac{3}{2} M_1}$$

που είναι το ίδιο με τα προηγούμενα.

Πρόβλημα 7.28 Ένας κυλινδρικός δίσκος με μάζα m και ακτίνα R βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα με μάζα μ, πού κινείται οριζόντια με ταχύτητα v, κτυπά το δίσκο στη διεύθυνση μιας ευθείας πού απέχει από το κέντρο $R/2$. Να βρεθεί τι κίνηση θα κάνει ο δίσκος
(α) αν η σφαίρα σταματήσει στο σημείο Σ,
(β) αν η σφαίρα σταματήσει στο σημείο Ρ και
(γ) αν η σφαίρα αναπηδήσει ελαστικά, σχηματίζοντας γωνία 90^o με την αρχική της τροχιά. Δίνεται $I = mR^2/2$.



Σχήμα 7.27

Λύση:

(α)

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\mu \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_k (m + \mu) \quad \Rightarrow \boldsymbol{v}_k = \frac{\mu}{m + \mu} \boldsymbol{v}$$

Άρα το κέντρο μάζας μετά την κρούση αποκτά μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_k$ της ίδιας διεύθυνσης με τη $\boldsymbol{v}$. Η θέση του κέντρου μάζας K βρίσκεται πάνω στην ακτίνα $O\Sigma$ και ισχύει

$$x = \frac{mR}{m + \mu} \quad \text{και} \quad R - x = \frac{\mu R}{m + \mu} \tag{7.27}$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$$\frac{x}{2} \mu v = I_k \omega \tag{7.28}$$

όπου I_k είναι η ροπή αδρανείας του συστήματος δίσκος - σφαίρα σχετικά με κατακόρυφο άξονα που περνά από το K. Άρα

$$I_k = I_0 + m(R-x)^2 + \mu x^2 \tag{7.29}$$

όπου I_0 είναι η ροπή αδρανείας του δίσκου σχετικά με άξονα που περνά από το κέντρο του.

$$(7) \Rightarrow I_k = \frac{1}{2}mR^2 + m(R-x)^2 + \mu x^2 = \frac{3}{2}mR^2 + (m+\mu)x^2 - 2mRx$$

χρησιμοποιώντας το x από την (7) έχουμε

$$I_k = \frac{3}{2}mR^2 + (m+\mu)\frac{m^2R^2}{(m+\mu)^2} - 2mR\frac{mR}{m+\mu} = \frac{3m\mu R^2 + m^2R^2}{2(m+\mu)}$$

και η (7) γίνεται

$$\frac{mR}{2(m+\mu)}\mu v = \frac{3m\mu R^2 + m^2R^2}{2(m+\mu)}\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v\mu}{R(m+3\mu)}$$

Άρα βλέπουμε ότι εκτός από τη μεταφορική κίνηση ο δίσκος εκτελεί και περιστροφική κίνηση.

(β) Αυτή η περίπτωση λύνεται όμοια με την προηγούμενη και βρίσκουμε

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{\mu}{m+\mu}\boldsymbol{v}$$

$$\omega = \frac{2v\mu}{R(2m+3\mu)}$$

(γ) Σ' αυτή την περίπτωση το κέντρο μάζας του δίσκου παραμένει το κέντρο O. Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\mu\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}_0 + \mu\boldsymbol{V}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{v}_0 = \frac{\mu}{m}(v\hat{\boldsymbol{y}} - V\hat{\boldsymbol{x}}) \\ \\ v_0 = \frac{\mu}{m}\sqrt{v^2+V^2}. \end{array} \right\} \tag{7.30}$$

Από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}\mu V^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu V^2 \tag{7.31}$$

Η στροφορμή της σφαίρας σε σχέση με το O μετά την κρούση έχει μέτρο

$$\mu RV \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}RV\mu$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

$$\frac{R}{2}\mu v = I_0\omega + \frac{\sqrt{3}}{2}RV\mu$$

$$\frac{R}{2}\mu v = \frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{\sqrt{3}}{2}RV\mu$$

$$\Rightarrow \mu v = mR\omega + \sqrt{3}\mu V \tag{7.32}$$

Από τις εξισώσεις (7), (7) και (7) έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους τα V, v_0 και ω.

Πρόβλημα 7.29 Μία ράβδος με μάζα m και μήκος ℓ μπορεί να περιστραφεί γύρω από σταθερό άξονα πού περνά από τη μία της άκρη. Αρχικά η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση με το κέντρο μάζας της πάνω από τον άξονα. Με μικρή μετατόπιση η ράβδος πέφτει εξαιτίας του βάρους της.
(α) Ποια η ταχύτητα της ελεύθερης άκρης της, όταν περνά από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας;
(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στη ράβδο από τον άξονα, όταν αυτή έχει διαγράψει τόξο 120^o; (Δίνεται $I = m\ell^2/3$)

Λύση:

(α) Η θέση ευσταθούς ισορροπίας της ράβδου είναι κατακόρυφη με το κέντρο μάζας κάτω από τον άξονα. Άρα κατά την πτώση της ράβδου το κέντρο μάζας μετατοπίζεται κατακόρυφα κατά ℓ και η δυναμική ενέργεια της ράβδου μειώνεται κατά $mg\ell$. Το ποσό αυτό της δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε περιστροφική κινητική ενέργεια. Άρα έχουμε

$$mg\ell = \frac{1}{2} I\omega_1^2 \tag{7.33}$$

όπου ω_1 είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν περνά από τη θέση ισορροπίας και $I = m\ell^2/3$. Αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6g}{\ell}}$$

Η ταχύτητα της άκρης της ράβδου είναι

$$v_1 = \omega_1 \ell = \sqrt{6g\ell}$$

(β) Όταν κινείται η ράβδος το κέντρο μάζας της έχει επιτάχυνση που αποτελείται από δύο συνιστώσες, την κεντρομόλο $\boldsymbol{a}_k$ και την εφαπτομενική $\boldsymbol{a}_e$ Στην περίπτωση αυτή η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας είναι

$$mg\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell\cos\phi}{2}\right) = \frac{3mg\ell}{4} \qquad \text{(η γωνία } \phi = 60^o\text{)}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\frac{3}{4} mg\ell = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{7.34}$$

αντικαθιστώντας το I στην (7) βρίσκουμε

$$\omega^2 = \frac{9g}{2\ell}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι

$$a_k = \omega^2 \frac{\ell}{2} = \frac{9g}{4}$$

με συνιστώσες

$$a_{kx} = -a_k \sin\phi = -\frac{9\sqrt{3}g}{8}$$
$$a_{ky} = a_k \cos\phi = \frac{9g}{8}$$

Στη θέση αυτή το σώμα περιστρέφεται υπό την επίδραση της ροπής του βάρους του ως προς τον άξονα. Η ροπή έχει μέτρο

$$\boldsymbol{N} = \left|\frac{\boldsymbol{\ell}}{2} \times \boldsymbol{B}\right| = \frac{\ell mg\sin\phi}{2} = \frac{\sqrt{3}\ell mg}{4}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $N = I\dot{\omega}$ βρίσκουμε

$$\dot{\omega} = \frac{\frac{\sqrt{3}\ell mg}{4}}{\frac{m\ell^2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}g}{4\ell}$$

Η εφαπτομενική επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι

$$a_e = \dot{\omega}\frac{\ell}{2} = \frac{3\sqrt{3}g}{8}$$

με συνιστώσες

$$a_{ex} = -a_e \cos\phi = -\frac{3\sqrt{3}g}{16}$$
$$a_{ey} = -a_e \sin\phi = -\frac{9g}{16}$$

Οι συνιστώσες της δύναμης $\boldsymbol{F}$ που ασκείται πάνω στον άξονα είναι

$$F_x = ma_x = m(a_{kx} + a_{ex}) = -\frac{21\sqrt{3}mg}{16} = -2,27\text{mg}$$

Για την y συνιστώσα ισχύει

$$F_y - B = ma_y = m(a_{ky} + a_{ey})$$

$$\Rightarrow F_y = 0,56\text{mg}$$

Το μέτρο της δύναμης $\boldsymbol{F}$ είναι

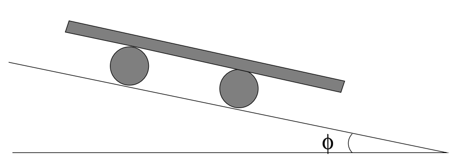
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2,34\text{mg}$$

και η γωνία που σχηματίζει με την κατακόρυφο είναι

$$\tan\theta = \frac{F_x}{F_y} = 4,054$$

$$\Rightarrow \theta = 76,14^o$$

Πρόβλημα 7.30 Μία δοκός με βάρος B στηρίζεται πάνω σε δύο όμοιους κυλίνδρους με βάρος $B/2$ και ακτίνα r και κατεβαίνει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 7.28. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ολίσθηση, να βρεθεί η επιτάχυνση a της ράβδου. Η ροπή αδρανείας κάθε κυλίνδρου είναι $I = mr^2/2$.



Σχήμα 7.28

Λύση:

Εφόσον δεν υπάρχει ολίσθηση οι δύο κύλινδροι περιστρέφονται γύρω από τα σημεία A και B απ' όπου περνούν οι στιγμιαίοι άξονες περιστροφής. Άρα οι κύλινδροι έχουν γωνιακή επιτάχυνση

$$\dot{\omega} = \frac{a}{2r}$$

όπου a η επιτάχυνση της δοκού. Η επιτάχυνση της μεταφορικής κίνησης είναι

$$a_k = \dot{\omega}r = \frac{a}{2}$$

Θεωρούμε τις δυνάμεις πάνω στη δοκό και πάνω στον κύλινδρο. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

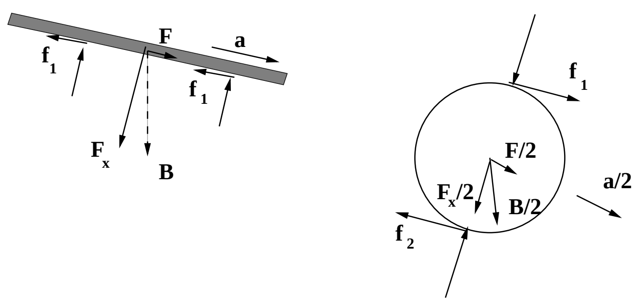
$$\sum \boldsymbol{N} = I\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

Για τη δοκό από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$F - 2f_1 = ma \tag{7.35}$$

όπου

$$F = mg\sin\phi \tag{7.36}$$



Σχήμα 7.29

όπου f_1 είναι η δύναμη της τριβής μεταξύ της δοκού και του κυλίνδρου.
Για κάθε κύλινδρο από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$\frac{F}{2} + f_1 - f_2 = \frac{m}{2}\frac{a}{2} \tag{7.37}$$

$$f_1 2r + \frac{F}{2}r = I_A\frac{a}{2r} \tag{7.38}$$

από τον κανόνα των παραλλήλων αξόνων έχουμε

$$I_A = I + \frac{m}{2}r^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{2}r^2 + \frac{m}{2}r^2 = \frac{3}{2}\frac{m}{2}r^2$$

αντικαθιστώντας στην (7) έχουμε

$$f_1 2r + \frac{F}{2}r = \frac{3}{2}\frac{m}{2}r^2\frac{a}{2r}$$

$$\Rightarrow 2f_1 = \frac{3ma}{8} - \frac{F}{2}$$

αντικαθιστώντας στην (7) έχουμε

$$F - \frac{3ma}{8} + \frac{F}{2} = ma$$

Χρησιμοποιώντας την (7) έχουμε

$$mg\sin\phi - \frac{3ma}{8} + \frac{mg\sin\phi}{2} = ma$$

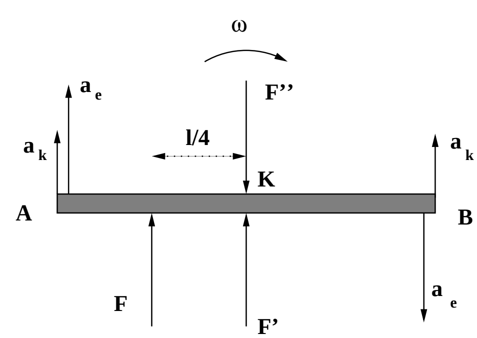
απ΄ όπου έχουμε

$$a = \frac{12g\sin\phi}{11}$$

Από την (7) μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη τριβής f_1 και από την (7) μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη τριβής f_2. Να σημειωθεί ότι οι δυνάμεις τριβής f_1 και f_2 είναι στατικές τριβές με τιμή μικρότερη από τη μέγιστη τιμή στατικής τριβής διότι δεν υπάρχει ολίσθηση.

Πρόβλημα 7.31 Μία οριζόντια δύναμη F επιδρά πάνω σε μία ράβδο με μάζα m και μήκος ℓ σε απόσταση $\ell/4$ από τη μία άκρη της. Η ράβδος βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και δεν έχει τριβή. Υπολογίστε:
(α) Την αρχική επιτάχυνση του κέντρου μάζας.
(β) Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου γύρω από άξονα πού περνά από το κέντρο μάζας.
(γ) Τις αρχικές εφαπτομενικές επιταχύνσεις των άκρων της ράβδου.

Λύση:



Σχήμα 7.30

Επειδή η ράβδος είναι πάνω στο επίπεδο το βάρος της ισορροπείται από την αντίδραση του επιπέδου και επομένως μπορεί να κινηθεί μόνο από την επίδραση της δύναμης $\boldsymbol{F}$. Ας μελετήσουμε την κίνηση σε σχέση με το κέντρο μάζας, Κ, της ράβδου.Όπως φαίνεται στο σχήμα θεωρούμε ότι στο κέντρο βάρους εφαρμόζονται οι δυνάμεις $\boldsymbol{F}_1$ και $\boldsymbol{F}_2$ που έχουν το ίδιο μέτρο με την $\boldsymbol{F}$ και εξουδετερώνονται μεταξύ τους . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $\boldsymbol{F}_1$ ενεργεί πάνω στο κέντρο μάζας και του δίνει μεταφορική κίνηση ενώ οι $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{F}_2$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων του οποίου η ροπή δημιουργεί περιστροφική κίνηση. Άρα έχουμε:

(α)

$$\boldsymbol{a}_k = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{F}{m}$$

(β)

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{\ell}}{4} \times \boldsymbol{F} \tag{7.39}$$

Επίσης

$$\boldsymbol{N} = I\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{7.40}$$

όπου

$$I = \frac{1}{12}m\ell^2$$

Από τις (7) και (7) βρίσκουμε

$$\dot{\omega} = \frac{\frac{\ell}{4}F}{\frac{1}{12}ml^2} = \frac{3F}{m\ell}$$

(γ) Για κάθε σημείο της ράβδου έχουμε την επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_k$ λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας καθώς και την επιτάχυνση εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης της οποίας η εφαπτομενική συνιστώσα δίνεται από τη σχέση $a_e = \dot{\omega}r$ με r την απόσταση του σημείου από το κέντρο μάζας. Για τα δύο άκρα A και B της ράβδου έχουμε

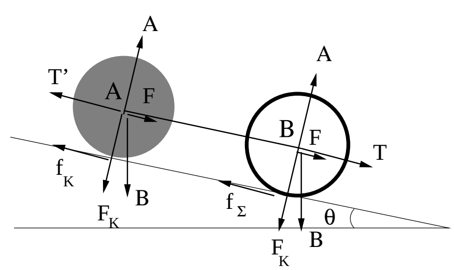
$$a_e = \dot{\omega}\frac{\ell}{2} = \frac{3F}{2m}$$

Άρα

$$a_A = a_k + a_e = \frac{F}{m} + \frac{3F}{2m} = \frac{5F}{2m}$$
$$a_B = a_k - a_e = \frac{F}{m} - \frac{3F}{2m} = -\frac{F}{2m}$$

Πρόβλημα 7.32 Ένας στερεός κύλινδρος και μία λεπτή στεφάνη με το ίδιο βάρος B και την ίδια ακτίνα R συνδέονται με μία αβαρή ράβδο AB και κυλάνε χωρίς ολίσθηση πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο πού έχει κλίση θ, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κατεβαίνει το σύστημα και τη δύναμη από τη ράβδο. Δίνονται: $I_K = mR^2/2$, $I_\Sigma = mR^2$.

Λύση:



Σχήμα 7.31

Στη γενική περίπτωση που αφήνουμε ένα σώμα να κυλήσει από ένα ύψος h από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{7.41}$$

εφόσον δεν έχουμε ολίσθηση $v = \omega R$ και από την (7) έχουμε

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = \text{σταθ.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = \text{σταθ.}$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι όσο αυξάνεται το I τόσο ελαττώνεται η ταχύτητα v και αντίστροφα. Άρα στο πρόβλημα μας ο κύλινδρος που έχει τη μικρότερη ροπή αδρανείας τείνει να κατέβει με μεγαλύτερη ταχύτητα από τη στεφάνη άρα τη σπρώχνει με μία δύναμη $\boldsymbol{T}$. Η αντίδραση στη δύναμη αυτή πάνω στον κύλινδρο είναι η $\boldsymbol{T}'$ που είναι ίση και αντίθετη στην $\boldsymbol{T}$. Τα δύο σώματα θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα και επιτάχυνση. Αν θεωρήσουμε τους στιγμιαίους άξονες περιστροφής που περνάνε από τα σημεία O και O' τότε οι εξισώσεις κίνησης για τα δύο σώματα είναι:
Κύλινδρος

$$F - T' - f_K = ma$$

$$(F - T')R = I_O\dot{\omega} \tag{7.42}$$

Στεφάνη

$$F + T - f_\Sigma = ma$$

$$(F+T)R = I_{O'}\dot{\omega} \tag{7.43}$$

έχοντας

$$I_O = I_K + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

$$I_{O'} = I_\Sigma + mR^2 = 2mR^2$$

Επίσης επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση έχουμε

$$a = a_e = \dot{\omega}R$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{a}{R} \tag{7.44}$$

από τις (7) και (7) βρίσκουμε

$$\frac{F-T'}{F+T} = \frac{I_O}{I_{O'}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mg\sin\theta - T}{mg\sin\theta + T} = \frac{\frac{3mR^2}{2}}{2mR^2}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{mg\sin\theta}{7}$$

Επίσης από την (7)έχουμε

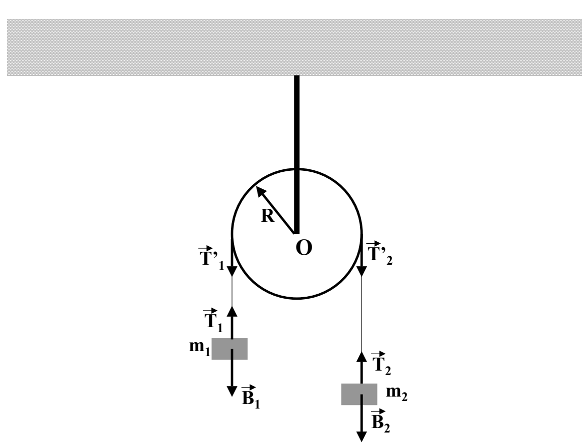
$$\dot{\omega} = \frac{(F+T)R}{I_{O'}}$$

και αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε

$$\frac{a}{R} = \frac{(mg\sin\theta + \frac{mg\sin\theta}{7})R}{2mR^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{4g\sin\theta}{7}$$

Πρόβλημα 7.33 Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $m = 6\,kg$ και ακτίνα $R = 0,4\,\mathrm{m}$. Στις άκρες του νήματος κρέμονται οι μάζες $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ και $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$. Αν το νήμα δε μπορεί να γλιστρήσει πάνω στην τροχαλία, να βρεθούν οι επιταχύνσεις των m_1, m_2 και οι τάσεις πάνω στο νήμα. Επίσης ή κινητική ενέργεια του συστήματος $5\,\mathrm{s}$ ύστερα από το ξεκίνημα.



Σχήμα 7.32

Λύση:

Πάνω στις δύο μάζες ενεργούν οι δυνάμεις $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ και $\boldsymbol{T}_2$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ας σημειώσουμε ότι οι τάσεις $\boldsymbol{T}_1$ και $\boldsymbol{T}_2$ δεν έχουν το ίδιο μέτρο επειδή η τροχαλία έχει μάζα άρα χρειάζεται ροπή για την περιστροφή της. Άρα

$$N = T_2' R - T_1' R = (T_2 - T_1)R$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $N = I\dot{\omega}$ με $I = \frac{1}{2}mR^2$. Άρα

$$(T_2 - T_1)R = I\dot{\omega} \tag{7.45}$$

Επίσης έχουμε

$$T_1 - B_1 = m_1 a \qquad \text{και} \qquad B_2 - T_2 = m_2 a \tag{7.46}$$

Η επιτάχυνση a είναι ίση με την εφαπτομενική επιτάχυνση οποιουδήποτε σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας άρα

$$a = \dot{\omega} R \tag{7.47}$$

Από τις (7), (7) και (7) βρίσκουμε

$$a = \frac{2(m_2 - m_1)g}{m + 2(m_1 + m_2)} = 1\,\mathrm{m/s^2}$$

$$T_2 = m_2(g - a) = 36\,\mathrm{N}$$

$$T_1 = m_1(g + a) = 33\,\mathrm{N}$$

Πέντε δευτερόλεπτα μετά το ξεκίνημα τα σώματα έχουν αποκτήσει ταχύτητες

$$v_1 = v_2 = at = 5\,\mathrm{m/s}$$

και η τροχαλία γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \dot{\omega} t = \frac{at}{R}$$

Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

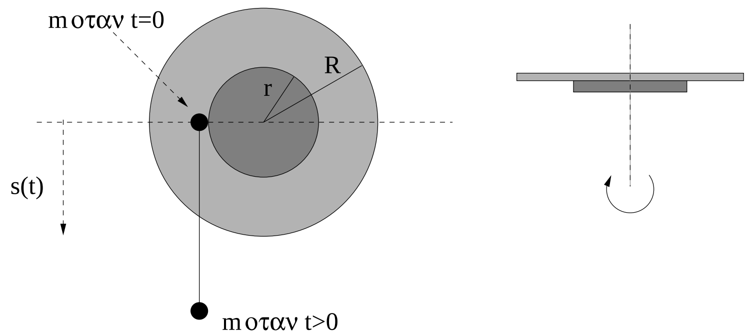
$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{at}{R}\right)^2 = 125\,\mathrm{J}$$

Πρόβλημα 7.34 Ένας τροχός αποτελείται από δύο ομόκεντρους δίσκους με ακτίνες $R = 0,5\,\mathrm{m}$ και $r = 0,3\,\mathrm{m}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο μικρότερος δίσκος έχει μάζα $m_r = 0,2\,\mathrm{Kg}$ και ο μεγαλύτερος $m_R = 10\,\mathrm{kg}$. Γύρω από το μικρότερο δίσκο είναι τυλιγμένο σχοινί μήκους $L = 10\,\mathrm{m}$ αμελητέου βάρους και στη μια άκρη του είναι συνδεδεμένη μια μάζα $m = 0,1\,\mathrm{kg}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα m αφήνεται ελεύθερη και πέφτει ξετιλύγωντας το σχοινί.

(α) Ποια είναι η τάση που αναπτύσσεται στο σχοινί ενώ ξετυλίγεται.

(β) Υπολογίστε τη γωνιακή επιτάχυνση $\alpha(t)$, τη γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$ των δίσκων και τη θέση $s(t)$ της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου t.

(γ) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί όλο το σχοινί.



Σχήμα 7.33

Λύση:

(α) Το σώμα κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του, mg, ενώ στο σχοινί αναπτύσσεται μία τάση T προς τα πάνω. Το σύστημα των δύο τροχών έχει ροπή αδρανείας I

$$I = \frac{1}{2}m_r r^2 + \frac{1}{2}m_R R^2 = 1,259\,\text{kg m}^2$$

Η ροπή του συστήματος είναι

$$Tr = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha(t) \tag{7.48}$$

Η ταχύτητα μετατόπισης και η επιτάχυνση της μάζας m είναι

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \omega r \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \alpha(t) r \tag{7.49}$$

αντίστοιχα. Επίσης από το δεύτερο νόμο του Newton έχουμε

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = mg - T$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{T}{m}$$

Από τις σχέσεις (7,7,7) έχουμε

$$g - \frac{T}{m} = \frac{T}{I}r^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{I}} = 0,992\,\text{N}$$

(β) Αντικαθιστώντας στην (7) έχουμε

$$\alpha(t) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{Tr}{I} = 0,236\,\text{s}^{-2}$$

ολοκληρώνοντας

$$\Rightarrow \omega(t) = 0,236t\,\text{s}^{-1} \tag{7.50}$$

Από την (7) έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = (0,236t)0,3 = 0,0708\,t$$

και ολοκληρώνοντας

$$s(t) = \frac{0,0708}{2}t^2 = 0,0354t^2 \tag{7.51}$$

(γ) Από την (7) για το συνολικό μήκος του σχοινιού βρίσκουμε το συνολικό χρόνο που θα χρειαστεί για να ξετυλιχτεί

$$t_{tot} = \sqrt{\frac{10}{0,0354}} = 16,807\,\mathrm{s}$$

και αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε την γωνιακή ταχύτητα

$$\omega(t_{tot}) = 3,966\,\mathrm{s}^{-1}$$

Πρόβλημα 7.35 Η γραμμική πυκνότητα μάζας ($\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}x$) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος L αυξάνεται από την τιμή λ_0 στο ένα άκρο της ($x = 0$) σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της ($x = L$) σύμφωνα με τη σχέση $\lambda(x) = \lambda_0(1 + x^2/L^2)$.

(α) Υπολογίστε το κέντρο μάζας της ράβδου.

(β) Υπολογίστε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα y που περνά από το ελαφρύ άκρο της και είναι κάθετο σε αυτήν.

(γ) Η ράβδος ξεκινά από την ηρεμία όταν είναι οριζόντια και περιστρέφεται χωρίς τριβές, υπό την επίδραση του βάρους της, γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το ελαφρό άκρο της. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα όταν η ράβδος φθάσει στην κατακόρυφη θέση;

Λύση:

(α) Το κέντρο βάρους της ράβδου δίνεται από τη σχέση

$$x_{cm} = \frac{\int_0^L x\mathrm{d}m}{\int_0^L \mathrm{d}m}$$

Για το ολοκλήρωμα του αριθμητή έχουμε

$$\int_0^L x\mathrm{d}m = \int_0^L x\lambda_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right) \mathrm{d}x = \lambda_0 \frac{3L^2}{4}$$

Για το ολοκλήρωμα του παρονομαστή έχουμε

$$M = \int_0^L \mathrm{d}m = \int_0^L \lambda_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right) \mathrm{d}x = \lambda_0 \frac{4L}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{\lambda_0 \frac{3L^2}{4}}{\lambda_0 \frac{4L}{3}} = \frac{9}{16} L$$

(β) Η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς το άκρο της με τη μικρότερη πυκνότητα είναι

$$I = \int_0^L x^2\mathrm{d}m = \int_0^L x^2\lambda_0 \left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{8\lambda_0 L^3}{15} = \frac{2}{5} M L^2$$

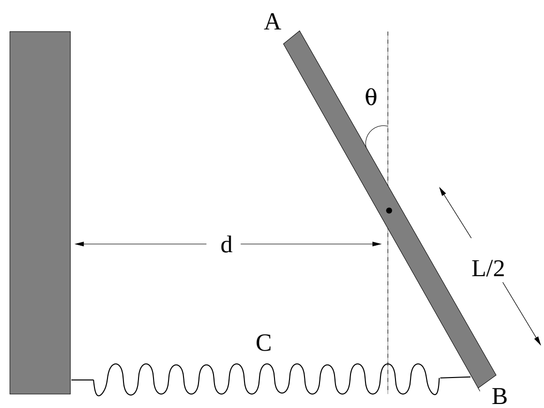
(γ) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται όλη σε περιστροφική ενέργεια άρα :

$$Mg\frac{9L}{16} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{45g}{16L}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{45g}{16L}}$$

Πρόβλημα 7.36 Η γραμμική πυκνότητα μάζας ($\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}x$) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος L αυξάνεται από την τιμή λ_0 στο ένα άκρο της (A) σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της (B) σύμφωνα με τη σχέση $\lambda(x) = \lambda_0(1+x^2/L^2)$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της, O, και είναι κάθετος σε αυτήν. Ένα ελατήριο σε οριζόντια διεύθυνση, με σταθερά ελατηρίου C, και φυσικού μήκους d, έχει συνδεδεμένο το ένα άκρο του με το κάτω άκρο της ράβδου, ενώ το άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένο σε σταθερό στήριγμα.
(α) Υπολογίστε το κέντρο μάζας της ράβδου.
(β) Υπολογίστε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο της.
(γ) Υπολογίστε τις δυνάμεις και τις ροπές ως προς το κέντρο O που ασκούνται στη ράβδο όταν μετατοπιστεί κατά μια μικρή γωνία θ.
(δ) Αν η ράβδος μετατοπιστεί κατά μια μικρή γωνία θ από την κατακόρυφο και αφεθεί ελεύθερη να δείξετε ότι εκτελεί απλή αρμονική κίνηση και βρείτε την περίοδο της κίνησης.



Σχήμα 7.34

Λύση:

(α)

Το κέντρο βάρους της ράβδου δίνεται από τη σχέση

$$x_{cm} = \frac{\int_0^L x\mathrm{d}m}{\int_0^L \mathrm{d}m}$$

Για το ολοκλήρωμα του αριθμητή έχουμε

$$\int_0^L x\mathrm{d}m = \int_0^L x\lambda_0\left(1+\frac{x^2}{L^2}\right)\mathrm{d}x = \lambda_0\frac{3L^2}{4}$$

Για το ολοκλήρωμα του παρονομαστή έχουμε

$$M = \int_0^L \mathrm{d}m = \int_0^L \lambda_0\left(1+\frac{x^2}{L^2}\right)\mathrm{d}x = \lambda_0\frac{4L}{3}$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{\lambda_0\frac{3L^2}{4}}{\lambda_0\frac{4L}{3}} = \frac{9}{16}L$$

(β) Η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς το άκρο της με τη μικρότερη πυκνότητα είναι

$$I = \int_0^L x^2\mathrm{d}m = \int_0^L x^2\lambda_0\left(1+\frac{x^2}{L^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{8\lambda_0 L^3}{15}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των παραλλήλων αξόνων (Steiner) ώστε να βρούμε τη ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο μάζας.

$$I = I_{cm} + Mx_{cm}^2$$

$$\Rightarrow I_{cm} = \frac{8\lambda_0 L^3}{15} - \frac{4\lambda_0 L}{3}\left(\frac{9L}{16}\right)^2 = \frac{107\lambda_0 L^3}{960}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον κανόνα των παραλλήλων αξόνων (κανόνας του Steiner) ώστε να βρούμε τη ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο περιστροφής O.

$$I_o = I_{cm} + MR^2$$

όπου R είναι η απόσταση του σημείου περιστροφής από το κέντρο μάζας της ράβδου

$$R = \frac{9L}{16} - \frac{L}{2} = \frac{L}{16}$$

Άρα για το I_o έχουμε

$$I_o = \frac{107\lambda_0 L^3}{960} + \frac{4\lambda_0 L}{3}\left(\frac{L}{16}\right)^2 = \frac{56\lambda_0 L^3}{480} = \frac{7}{80}ML^2$$

(γ) Οι δυνάμεις που θα εξασκηθούν είναι η δύναμη του ελατηρίου που δρα στο κάτω άκρο της ράβδου στον οριζόντιο άξονα και έχει μέτρο

$$F = -c\frac{L}{2}\sin\theta$$

και για μικρές μετατοπίσεις $\sin\theta = \theta$

$$\Rightarrow F = -c\frac{L}{2}\theta$$

και η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στο κέντρο μάζας $B = Mg$.
Επειδή οι δύο δυνάμεις ασκούνται σε σημεία διαφορετικά του O θα έχουμε τις ροπές τους ως προς αυτό το σημείο.

$$N_B = -\frac{mgL\theta}{16}$$

και

$$N_F = -\frac{cL\theta}{2}\frac{L\cos\theta}{2} = -\frac{cL^2\theta}{4}$$

Στην παραπάνω σχέση θεωρήσαμε ότι για πολύ μικρά θ, $\cos\theta = 1$.
(δ) Επειδή έχουμε περιστροφική κίνηση ισχύει

$$I_o\ddot{\theta} = N_B + N_F$$

$$\Rightarrow I_o\ddot{\theta} = -\frac{mgL\theta}{16} - \frac{cL^2\theta}{4}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{40(3c + \lambda_0 g)}{56\lambda_0 L}\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

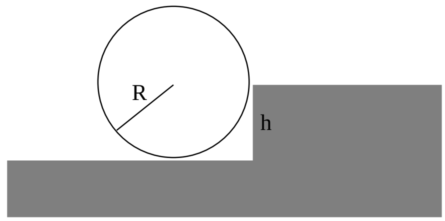
που είναι η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή με

$$\omega^2 = \frac{40(3c + \lambda_0 g)}{56\lambda_0 L}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Πρόβλημα 7.37 Μια συμπαγής μπάλα ακτίνας R κυλά με ταχύτητα v σε μια επίπεδη επιφάνεια και συγκρούεται μη ελαστικά με ένα σκαλοπάτι ύψους $h < R$, όπως φαίνεται στην εικόνα. Βρείτε σαν συνάρτηση των R και h την ελάχιστη ταχύτητα ώστε η μπάλα να ανέβει το σκαλοπάτι. Θεωρήστε ότι κατά τη σύγκρουση η μπάλα δεν γλιστρά. Η ροπή αδρανείας της μπάλας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της είναι $I = 2/5MR^2$.



Σχήμα 7.35

Λύση:

Έστω ότι ακριβώς πριν από τη σύγκρουση η γωνιακή ταχύτητα της μπάλας ως προς το κέντρο της μάζας της είναι ω και η στροφορμή της ως προς το σημείο πρόσκρουσης είναι L. Ας θεωρήσουμε ότι τα αντίστοιχα μεγέθη αμέσως μετά τη σύγκρουση με το σκαλοπάτι είναι ω' και L'. Τότε έχουμε

$$L = mv(R - h) + \frac{2}{5}mR^2\omega$$

Επειδή όμως η μπάλα κυλά χωρίς να ολισθαίνει έχουμε $v = \omega R$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$L = \frac{7}{5}mR^2v - mvh$$

Κατά τη σύγκρουση θεωρούμε ότι το κέντρο μάζας της σφαίρας είναι στιγμιαία ακίνητο. Άρα

$$L' = \left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\omega' = \frac{7}{5}mR^2\omega'$$

Λόγω διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$$\frac{7}{5}mR^2\omega' = \frac{7}{5}mRv - mvh$$

$$\Rightarrow \quad \omega' = \left(1 - \frac{5h}{7R}\right)\frac{v}{R} \tag{7.52}$$

Για να μπορέσει η μπάλα να ανέβει το σκαλοπάτι πρέπει να να έχει αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να τη μετατρέψει στην δυναμική ενέργεια που θα έχει πάνω στο σκαλοπάτι. Άρα

$$\frac{1}{2}I'\omega'^2 = mgh \tag{7.53}$$

όπου I' είναι η ροπή αδρανείας της μπάλας ως προς ένα οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο κρούσης,

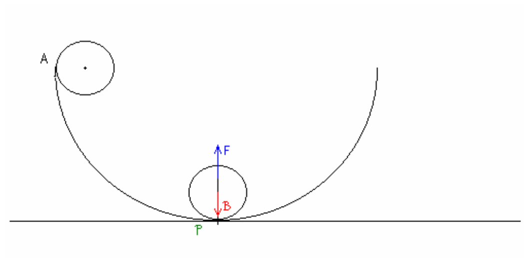
$$I' = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2. \tag{7.54}$$

Αντικαθιστώντας τις (7) και (7) στην (7) έχουμε

$$\frac{7}{10}mR^2\left(1 - \frac{6h}{7R}\right)^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \ v = \frac{R\sqrt{70gh}}{7R - 5h}$$

Πρόβλημα 7.38 Σφαίρα που έχει ακτίνα r και μάζα m, βρίσκεται στη θέση A και αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό του τοιχώματος του ημισφαιρίου που έχει ακτίνα R. Να υπολογιστεί η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται από τη σφαίρα στο τοίχωμα του ημισφαιρίου στο κατώτατο σημείο P. Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα μια διάμετρό της: $I = (2/5)mr^2$.



Σχήμα 7.36

Λύση:

Αν θεωρήσουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνάει από το κέντρο μάζας της σφαίρας όταν αυτή βρίσκεται στο κατώτερο σημείο, τότε

$$mg(R-r) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow mg(R-r) = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow mg(R-r) = \frac{7}{10}mv^2 \tag{7.55}$$

Στο κατώτατο σημείο της τροχιάς η συνισταμένη των δυνάμεων, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας είναι κεντρομόλος

$$F - B = \frac{mv^2}{R-r}$$

$$\Rightarrow F = mg + \frac{mv^2}{R-r}$$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow} F = mg + \frac{10}{7}mg$$

$$\Rightarrow F = \frac{17}{7}mg$$

Πρόβλημα 7.39 Μία δοκός μήκους l μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το ένα άκρο της A. Αρχικά η δοκός είναι κατακόρυφη και το κέντρο της βρίσκεται πάνω από τον άξονα στήριξης. Αν η δοκός εκτραπεί λίγο, αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από το A. Να βρεθούν σαν συναρτήσεις της γωνίας εκτροπής θ, η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού.

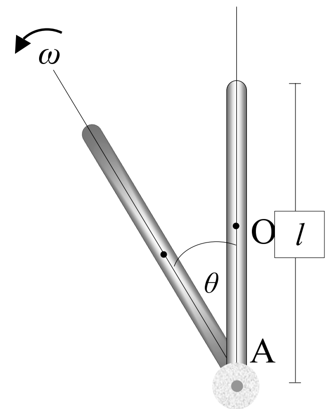
Λύση:

Έστω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο, που περνά από τον άξονα A και I_A τη ροπή αδράνειας της δοκού ως προς αυτόν τον άξονα. Με εφαρμογή του θεωρήματος των παραλλήλων αξόνων έχουμε

$$I_A = I + M(l/2)^2 = Ml^2/3 \tag{7.56}$$

όπου I η ροπή αδράνειας ως προς οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της (σημείο O).
Επίσης, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$Mgl/2 = Mgl\cos\theta/2 + I_a\omega^2/2 \tag{7.57}$$



Σχήμα 7.37

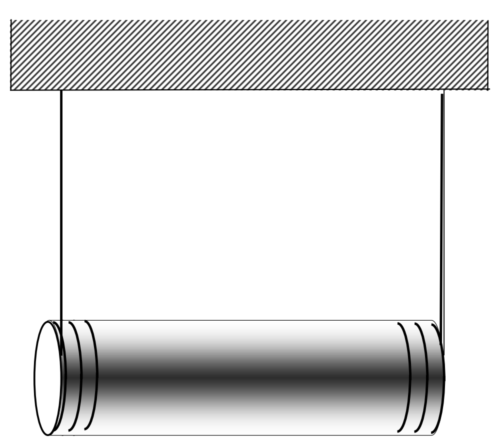
Από τις σχέσεις (7) και (7) παίρνουμε ότι

$$\omega = \left[3g(l - \cos\theta)/l\right]^{1/2}$$

Για τη γωνιακή επιτάχυνση a έχουμε

$$Mg(l/2)\sin\theta = I_A a$$
$$\Rightarrow Mg(l/2)\sin\theta = aMl^2/3$$
$$\Rightarrow a = \frac{3g\sin\theta}{2l}$$

Πρόβλημα 7.40 Ένας κύλινδρος μήκους l και ακτίνας R έχει μάζα M. Γύρω από τον κύλινδρο τυλίγονται δύο νήματα, ένα σε κάθε άκρη και τα άκρα των νημάτων στερεώνονται στην οροφή, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.38. Ο κύλινδρος οριζοντιώνεται, με τα δύο νήματα ακριβώς κατακόρυφα, όπως στο σχήμα, και αφήνεται ελεύθερος. Βρείτε την τάση των νημάτων καθώς ξετυλίγονται και προσδιορίστε τη γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου κατά την πτώση του.



Σχήμα 7.38

Λύση:

Έστω α και a, η γραμική και γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου, αντίστοιχα. Κατά την κίνησή του, θα ισχύουν οι εξής εξισώσεις

$$Mg - 2T = M\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{Mg - 2T}{M} \tag{7.58}$$

$$TR + TR = Ia \Rightarrow a = \frac{2TR}{I} = 2TR(1/2)MR^2 \Rightarrow a = \frac{4T}{MR} \tag{7.59}$$

Οι δύο επιταχύνσεις, α και a, συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha = aR \tag{7.60}$$

η οποία λόγω των (7) και (7) γίνεται

$$a = \frac{4TR}{MR} \Rightarrow \frac{MG - 2T}{M} = \frac{4T}{M} \Rightarrow 6T = Mg \Rightarrow T = \frac{Mg}{6} \tag{7.61}$$

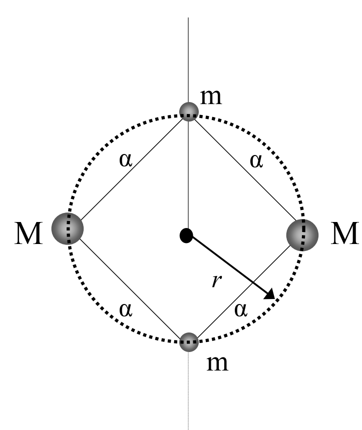
Η σχέση (7) λόγω της (7) γίνεται

$$a = \frac{4Mg}{6MR} = \frac{2g}{3R} \tag{7.62}$$

Η (7) λόγω της (7) γίνεται

$$\alpha = aR = \frac{2gR}{3R} = \frac{2g}{3}$$

Πρόβλημα 7.41 Οι τέσσερις σφαίρες του σχήματος συνδέονται με στερεές ράβδους αμελητέας μάζας. Αν το σύστημα περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα 6 rad/s, υπολογίστε:
(α) τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα z και
(β) την κινητική ενέργεια του συστήματος. Επίσης, υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να αποκτήσει το σύστημα γωνιακή ταχύτητα 6 rad/s, αν αυτό ξεκινά από την ηρεμία. Οι σφαίρες θεωρούνται σημειακές και ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο των μαζών και περνά από το κέντρο του τετραγώνου.



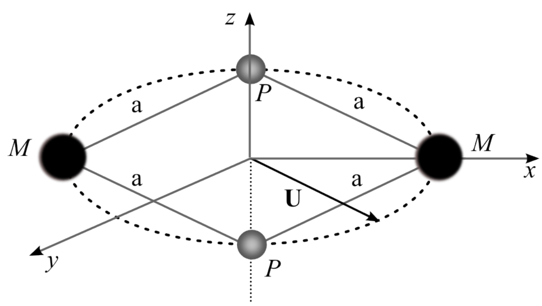
Σχήμα 7.39

Λύση:

(α)

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει κάθε μάζα είναι

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Σχήμα 7.40

Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι τότε

$$I = 2Mr^2 + 2mr^2 = a^2(M+m)$$

(β)

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = 18a^2(M+m)$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας εκφράζει το απαιτούμενο έργο

$$\Delta E_{\text{κιν}} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} = 18a^2(M+m)$$

Πρόβλημα 7.42 Μια κατσαρίδα μάζας m τρέχει με φορά αντίθετη προς τους δείκτες του ρολογιού, πάνω στην περιφέρεια ενός κυκλικού πιάτου που περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Το πιάτο έχει ακτίνα R και ροπή αδράνειας I και περιστρέφεται χωρίς τριβές. Η επιτρόχια ταχύτητα της κατσαρίδας, σε σχέση με αδρανειακό παρατηρητή, έχει μέτρο v, ενώ το πιάτο περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Η κατσαρίδα βρίσκει ένα ψίχουλο πάνω στην περιφέρεια και σταματά.
(α) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου πιάτου μετά το σταμάτημα της κατσαρίδας;
(β) Υπολογίστε τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά το σταμάτημα της κατσαρίδας.

Λύση:

(α)

Η ολική στροφορμή του συστήματος ως προς αδρανειακό παρατηρητή διατηρείται. Άρα θα ισχύει

$$L_0 - l = L \tag{7.63}$$

όπου L_0 και l, οι αρχικές στροφορμές πιάτου και κατσαρίδας αντίστοιχα, και L η τελική στροφορμή του συστήματος.
Η (7) γίνεται

$$I\omega_0 - mvR = (I + mR^2)\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{I\omega - mvR}{I + mR^2} \tag{7.64}$$

(β)

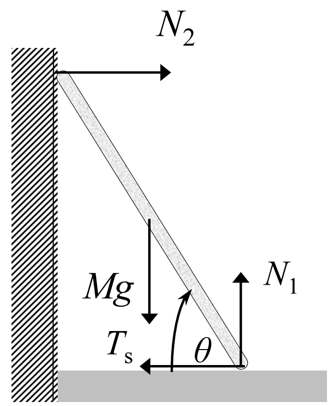
Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με

$$\Delta E_K = E_{K(\text{τελ})} - E_{K(\text{αρχ})} = \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.65}$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (7) και μετά από πράξεις παίρνουμε

$$\Delta E_K = \frac{-mI(\upsilon + \omega_0 R)^2}{2(I + mR^2)}$$

Πρόβλημα 7.43 Μια ομογενής σκάλα στερεώνεται σε ένα λείο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.41. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σκάλας και δαπέδου είναι μ_s, να εξάγετε μια έκφραση για την ελάχιστη γωνία θ, μεταξύ σκάλας και δαπέδου, για την οποία η σκάλα δεν ολισθαίνει ως προς το δάπεδο.



Σχήμα 7.41

Λύση:

Εφόσον η σκάλα θα ισορροπεί, θα ισχύει

$$N_2 = T_s \tag{7.66}$$

Επίσης, το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων, ως προς το κέντρο μάζας της, θα είναι ίσο με μηδέν. Άρα

$$N_2 \frac{l}{2} \sin\theta + T_s \frac{l}{s} \sin\theta - N_1 \frac{l}{2} \cos\theta = 0 \tag{7.67}$$

Για τη στατική τριβή είναι γνωστό ότι

$$T_s \leq \mu_s N_1 \tag{7.68}$$

Από τις (7) και (7) παίρνουμε

$$2T_s \sin\theta - N_1 \cos\theta = 0$$

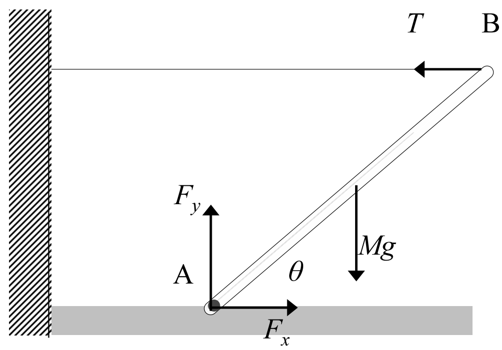
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{N_1}{2T_s}$$

η οποία λόγω της (7) γίνεται

$$\tan\theta \geq \frac{1}{2}\mu_s$$

$$\Rightarrow \theta_{\min} = \arctan\left(\frac{1}{2}\mu_s\right)$$

Πρόβλημα 7.44 Μια ομογενής ράβδος έχει μάζα M και μήκος l. Στο ένα άκρο της, A, αρθρώνεται σε ένα λείο τραπέζι. Το άλλο άκρο της, B, είναι δεμένο με ένα οριζόντιο νήμα, όπως στο σχήμα, το οποίο την αναγκάζει να σχηματίζει γωνία θ με το τραπέζι.
(α) Βρείτε μια έκφραση για το μέτρο της ολικής δύναμης που ασκεί το τραπέζι στη ράβδο στο σημείο A.
(β) Αν το νήμα ξαφνικά κοπεί, υπολογίστε τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου γύρω από το σημείο A, κατά τη στιγμή που το νήμα κόβεται.



Σχήμα 7.42

Λύση:

(α)

Η ράβδος ισορροπεί, άρα θα ισχύει

$$F_x = T \tag{7.69}$$

$$F_y = Mg \tag{7.70}$$

Επίσης, η συνισταμένη των ροπών ως προς το Α είναι ίση με μηδέν. Άρα

$$Mg\frac{l}{2}\cos\theta = Tl\sin\theta$$

$$\Rightarrow T = \frac{Mg}{2}\cot\theta \tag{7.71}$$

Από τις σχέσεις (7), (7) και (7) έχουμε

$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = Mg\left[\frac{\cot^2\theta}{4} + 1\right]^{1/2}$$

(β)

$$Mg\frac{l}{2}\cos\theta = I\alpha = \frac{1}{3}Ml^2\alpha$$

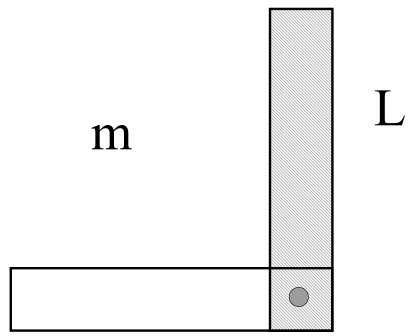
$$\Rightarrow \alpha = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

Πρόβλημα 7.45 Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους L είναι στερεωμένη σε οριζόντιο άξονα O. Αρχικά βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση και αφήνεται να πέσει ελεύθερα σε πεδίο βαρύτητας g. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας O στη ράβδο τη στιγμή που αυτή περνά από την οριζόντια θέση. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.

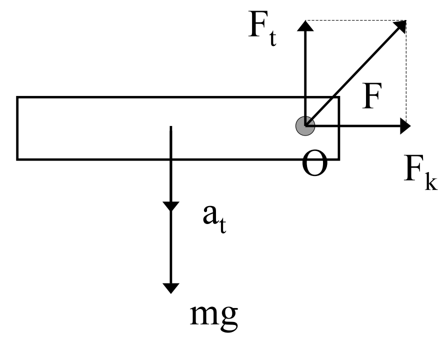
Λύση:

Το κέντρο μάζας της ράβδου εκτελεί περιστροφική κίνηση, διαγράφοντας κύκλο με ακτίνα $L/2$. Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ράβδο είναι το βάρος της και η δύναμη που ασκεί το σημείο στήριξης (βλ. σχήμα 7.44). Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει δύο συνιστώσες

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_k$$



Σχήμα 7.43



Σχήμα 7.44

όπου $\boldsymbol{a}_t$ η επιτρόχιος και $\boldsymbol{a}_k$ η κεντρομόλος επιτάχυνση. Για να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας πάνω στη ράβδο, αρκεί να υπολογιστεί η επιτάχυνσή του. Η επιτρόχιος επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ράβδος εκτελεί περιστροφική κίνηση για την οποία ως προς το σημείο O ισχύει

$$\tau = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha \tag{7.72}$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το O, ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κέντρου μάζας και α η γωνιακή επιτάχυνσή του. Η ροπή αδράνειας I είναι

$$I = I_k + m\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{3}{4}mL^2 \tag{7.73}$$

Επίσης ισχύει

$$a_t = \alpha\frac{L}{2} \tag{7.74}$$

Βάσει των σχέσεων (7) και (7) η σχέση (7) γίνεται

$$\tau = I\alpha \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{3}{4}mL^2\frac{a_t}{L/2} \Rightarrow a_t = \frac{1}{3}g$$

Επομένως

$$F_t = m(g - a_t) = \frac{2}{3}mg$$

Η κεντρομόλος δύναμη είναι

$$F_k = ma_k = m\frac{u^2}{L/2} \tag{7.75}$$

u η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή που η ράβδος είναι οριζόντια. Αυτή υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\frac{u^2}{(L/2)^2} = 2I\frac{u^2}{L^2}$$

Η παραπάνω σχέση λόγω της (7) δίνει

$$mg\frac{L}{2} = 2\frac{3}{4}mL^2\frac{u^2}{L^2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{1}{3}gL}$$

Άρα η κεντρομόλος δύναμη (7) θα είναι

$$F_k = ma_k = m\frac{u^2}{L/2} = \frac{2}{3}mg$$

Επομένως η δύναμη που ασκεί το σημείο στήριξης στη ράβδο έχει μέτρο

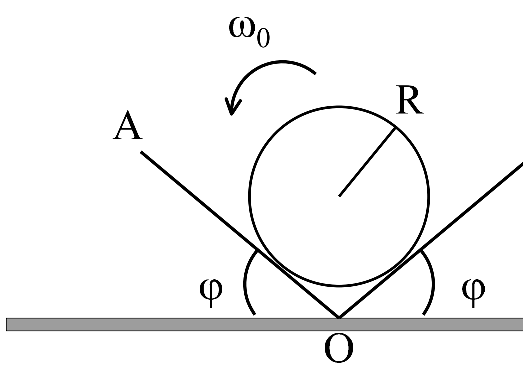
$$F = \sqrt{F_k^2 + F_t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}mg$$

και σχηματίζει γωνία με την οριζόντια

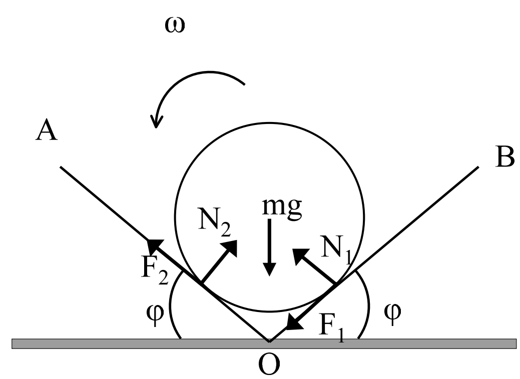
$$\phi = \arctan\left(\frac{F_t}{F_k}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Πρόβλημα 7.46 Σε κοίλο κύλινδρο με λεπτά τοιχώματα, μάζας m και ακτίνας R δίνουμε αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 και τον τοποθετούμε στη γωνία AOB (βλ. σχήμα 7.45). Ξέρουμε ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ γωνίας και κυλίνδρου είναι μ και ότι $\phi = \pi/4$. Βρείτε πόσες στροφές θα κάνει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει και σε πόσο χρόνο θα συμβεί αυτό.

Λύση:



Σχήμα 7.45



Σχήμα 7.46

Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στον κύλινδρο είναι το βάρος του, οι τριβές F_1 και F_2 και οι αντιδράσεις N_1, N_2 (βλ. σχήμα 7.46).
Οι δυνάμεις τριβής προκαλούν την επιβράδυνση και τελικά το σταμάτημα του κυλίνδρου. Επομένως για την περιστροφική του κίνηση ισχύει

$$\tau = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -(F_1 + F_2)R \tag{7.76}$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου. Επειδή όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στο λεπτό φλοιό θα ισχύει

$$I = mR^2$$

Ο αριθμός των περιστροφών που θα κάνει ο κύλινδρος είναι

$$N = \frac{\theta}{2\pi}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να γραφτεί σα συνάρτηση της γωνίας περιστροφής

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

Άρα

$$\tau = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -(F_1 + F_2)R$$

$$\Rightarrow mR^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = -(F_1 + F_2)R$$

$$\Rightarrow mR^2\omega \mathrm{d}\omega = -(F_1+F_2)R\mathrm{d}\theta$$
$$\Rightarrow mR^2\int_{\omega_0}^{0}\omega \mathrm{d}\omega = -(F_1+F_2)R\int_0^{\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = (F_1+F_2)R\theta$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{mR\omega_0^2}{2(F_1+F_2)} \tag{7.77}$$

Άρα για την εύρεση της γωνίας θ αρκεί να υπολογιστούν οι τριβές F_1 και F_2. Για το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος (λαμβάνοντας υπόψιν ότι $A\hat{O}B = \pi/2$), οι συνθήκες ισορροπίας του κυλίνδρου δίνουν

$$N_1 + F_2 = mg\cos\phi \Rightarrow N_1 = mg\cos\phi - F_2$$
$$N_2 = mg\cos\phi + F_1.$$

Άρα οι δυνάμεις τριβής είναι

$$\begin{aligned} F_1 &= \mu N_1 = \mu(mg\cos\phi - F_2)\\ F_2 &= \mu N_2 = \mu(mg\cos\phi + F_1)\end{aligned} \tag{7.78}$$

Συνεπώς η γωνία περιστροφής (7) είναι

$$\theta = \frac{mR\omega_0^2}{4\mu g\cos\phi}$$

και ο αριθμός των περιστροφών μέχρι να σταματήσει ο κύλινδρος είναι

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{mR\omega_0^2}{8\pi\mu g\cos\phi} = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{mR\omega_0^2}{\pi\mu g}$$

Ο χρόνος που θα περάσει μέχρι να σταματήσει ο κύλινδρος υπολογίζεται από τη σχέση (7)

$$\tau = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -(F_1+F_2)R$$
$$\Rightarrow mR^2\int_{\omega_0}^{0}\mathrm{d}\omega = -(F_1+F_2)R\int_0^{t}\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow mR\omega_0 = (F_1+F_2)t$$
$$\Rightarrow t = \frac{mR\omega_0}{(F_1+F_2)}$$

Άρα λόγω της σχέσης (7) ο χρόνος είναι

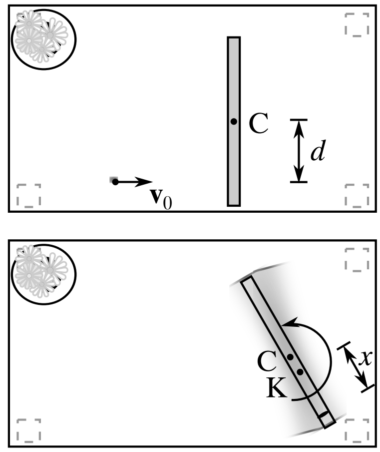
$$t = \frac{R\omega_0}{2\mu g\cos\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R\omega_0}{\mu g}$$

Πρόβλημα 7.47 Ράβδος μάζας M και μήκους L βρίσκεται σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Μια μικρή σφαίρα μάζας m με ταχύτητα v_0 χτυπά κάθετα τη ράβδο και καρφώνεται σε αυτή σε απόσταση d από το μέσο της C. Υπολογίστε
(α) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος μετά την κρούση.
(β) τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος μετά την κρούση.

Λύση:

(α) Στο σύστημα ράβδου-σφαίρας δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής

$$mv_0 = (M+m)v_{\text{KM}}$$
$$\Rightarrow v_{\text{KM}} = \frac{mv_0}{(M+m)}$$



όπου $\upsilon_{\rm KM}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας (Κ.Μ.) του συστήματος. Άρα το Κ.Μ. του συστήματος μετά την κρούση εκτελεί μεταφορική κίνηση.
(β) Έστω K το Κ.Μ. του συστήματος και x η απόσταση μεταξύ του σημείο πρόσκρουσης της σφαίρας και του K. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής

$$m\upsilon_0 x = I_K\omega$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{m\upsilon_0 x}{I_K} \tag{7.79}$$

όπου I_K είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα κάθετο στο Κ.Μ. και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από το Κ.Μ. Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε το x και το I_K. Εύκολα βρίσκουμε ότι το Κ.Μ. απέχει από το σημείο πρόσκρουσης $(M+m)x = Md$. Έχουμε επίσης

$$\sum M_i x_i = 0$$
$$-M(d-x) + mx = 0$$

επομένως

$$x = \frac{M}{M+m}d \tag{7.80}$$

Επομένως η απόσταση του Κ.Μ.από το σημείο C είναι

$$d - x = \frac{m}{M+m}d \tag{7.81}$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το Κ.Μ. και η ροπή αδράνειας της σφαίρας

$$I_K = \frac{1}{12}ML^2 + M(d-x)^2 + mx^2 \tag{7.82}$$

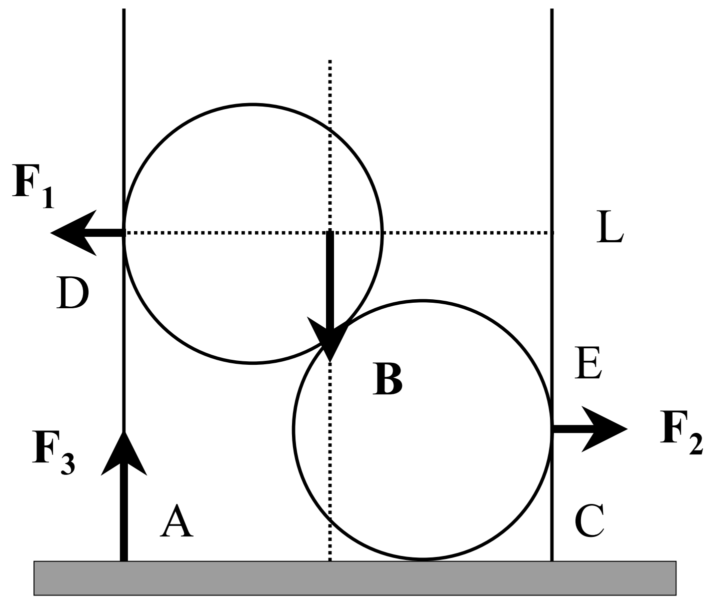
Σημειώνουμε ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το Κ.Μ. υπολογίστηκε με εφαρμογή του θεωρήματος του Steiner. Με αντικατάσταση της (7) και της (7) στην (7) προκύπτει

$$I_K = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{Mm}{M+m}d^2 \tag{7.83}$$

Τέλος με αντικατάσταση της (7) και της (7) στην (7) υπολογίζεται η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά την κρούση

$$\omega = \frac{12m\upsilon_0 d}{(M+m)L^2 + 12md^2}$$

Πρόβλημα 7.48 Κυλινδρικός σωλήνας χωρίς πυθμένα έχει ακτίνα R και βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι με τον άξονά του κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.47. Μέσα στον κύλινδρο βάζουμε δύο όμοιες σφαίρες που έχουν ακτίνα r. Αν είναι $R > r > R/2$ να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή του λόγου M/m (όπου M, η μάζα του σωλήνα και m, η μάζα κάθε σφαίρας) για την οποία η βάση του κυλίνδρου αποσπάται από το τραπέζι (ο σωλήνας γέρνει λόγω της ροπής της πάνω σφαίρας και πέφτει πλάγια). Τριβές δεν υπάρχουν.



Σχήμα 7.47

Λύση:

Στο σωλήνα ασκούνται οι δυνάμεις F_1, F_2 από τις σφαίρες και το βάρος του, $B = Mg$ (πάνω στον άξονα του σωλήνα). Επίσης ασκείται μια δύναμη από το τραπέζι. Όταν είναι έτοιμη να αποσπαστεί η βάση του κυλίνδρου από το τραπέζι, στηρίζεται μόνο στο A, άρα έχουμε

$$\sum \tau_A = 0$$

$$\Rightarrow F_1(AD) - F_2(CE) - MgR = 0 \tag{7.84}$$

Εξάλλου από την ισορροπία κάθε σφαίρας έχουμε:

1. από τη σφαίρα 1
$$\sum F_x = 0 \quad \text{επομένως} \quad F_1' = F\cos\phi \qquad \text{και} \qquad F\sin\phi = mg$$
άρα
$$F_1' = mg\cot\phi$$

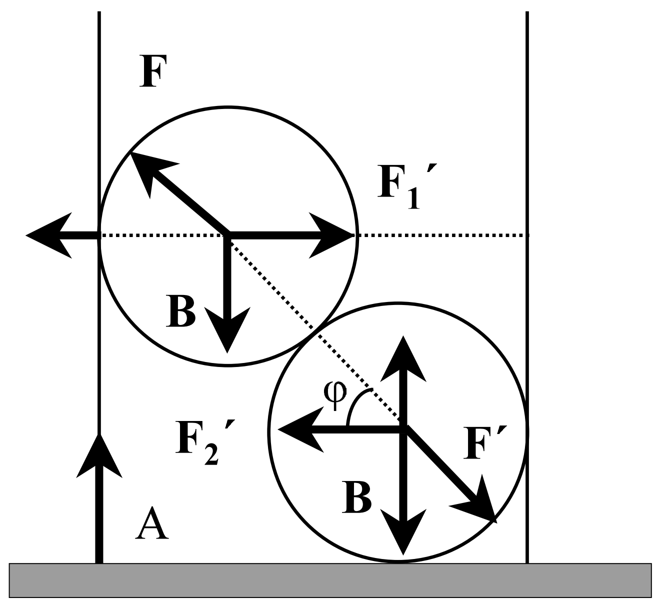
2. από τη σφαίρα 2
$$F_2' - F'\cos\phi = 0 \Rightarrow F_2' = F'\cos\phi$$
Αλλά
$$F' = F = \frac{mg}{\sin\phi}$$
άρα
$$F_2' = mg\cot\phi = F_1'$$

Επίσης

$$\cot\phi = \frac{2R-2r}{(LE)}$$

Επομένως η (7) γίνεται

$$F_1(AD) - F_2(CE) = MgR$$
$$\Rightarrow mg(LE)\cot\phi = MgR$$
$$\Rightarrow m\frac{2R-2r}{(LE)}(LE) = MR$$
$$\Rightarrow \frac{M}{m} = 2\left(1-\frac{r}{R}\right)$$



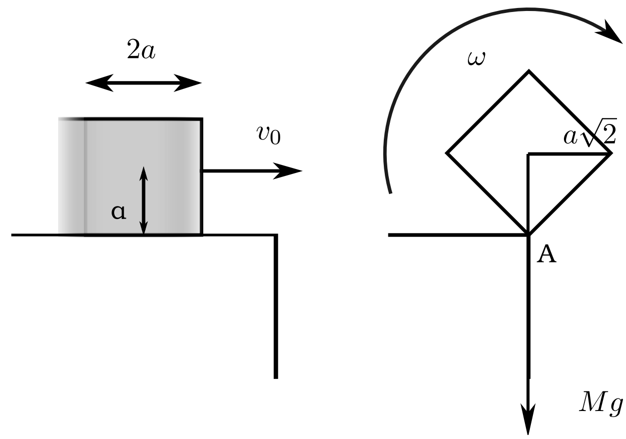
Σχήμα 7.48

Πρόβλημα 7.49 Ένας στερεός κύβος ακμής 2α και μάζας M γλιστράει σε μια λεία (χωρίς τριβές) επιφάνεια τραπεζιού με σταθερή ταχύτητα υ_0, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.49. Στη συνέχεια χτυπά σε ένα μικρό εμπόδιο στην άκρη του τραπεζιού στο σημείο Α, που κάνει τον κύβο να γείρει. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της υ_0, έτσι ώστε ο κύβος να ανατραπεί. Δίδεται η ροπή αδράνειας του κύβου ως προς μια ακμή του $I = 8M\alpha^2/3$.
(Υπόδειξη: Ο κύβος υφίσταται μια μη ελαστική κρούση στο άκρο του τραπεζιού και στη συνέχεια κάνει περιστροφή καθώς ανατρέπεται).

Λύση:

Αμέσως μετά την κρούση ο κύβος εκτελεί περιστροφική κίνηση με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω. Θα ανατραπεί εάν φτάσει σε τέτοια θέση, περιστρεφόμενος ως προς μια ακμή του, ώστε ο φορέας του βάρους να τέμνει την ακμή. Τότε ισχύει

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mga(\sqrt{2}-1)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{8M\alpha^2}{3}\omega^2 = Mg\alpha(\sqrt{2}-1)$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6}{8}\frac{g}{a}(\sqrt{2}-1)}$$



Σχήμα 7.49

(Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του τραπεζιού οπότε η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του κύβου από την αρχική θέση στη θέση ανατροπής είναι $Mg\alpha\sqrt{2} - Mg\alpha = Mg\alpha(\sqrt{2}-1)$).
Κατά τη διάρκεια της κρούσης οι δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι εσωτερικές άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Συνεπώς αν $Mv_0\alpha$ είναι η στροφορμή του κύβου πριν την κρούση και $I\omega$ αμέσως μετά την κρούση, τότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} Mv_0\alpha &= I\omega \\ \Rightarrow Mv_0\alpha &= \frac{8M\alpha^2}{3}\left(\frac{6}{8}\frac{g}{a}(\sqrt{2}-1)\right)^{1/2} \\ \Rightarrow v_0 &= \left(\frac{8^2\alpha^2}{3^2}\frac{6}{8}\frac{g}{a}(\sqrt{2}-1)\right)^{1/2} \\ \Rightarrow v_0 &= \left[\frac{16}{3}ga(\sqrt{2}-1)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 7.50 Σφαιρικός αστέρας μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα που συμπίπτει με μια διάμετρό του. Κάποια χρονική στιγμή αφού έχει εξαντλήσει τα πυρηνικά του καύσιμα, υφίσταται βαρυτική κατάρρευση και όλη η μάζα του συγκεντρώνεται σε σφαίρα ακτίνας r ($r << R$). Βρείτε την τελική γωνιακή του ταχύτητα περιστροφής (διεύθυνση, φορά και μέτρο). Κατά τη βαρυτική κατάρρευση στον αστέρα ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις και η μάζα του παραμένει ίδια. Δίδεται ότι η ροπή αδρανείας μιας σφαίρας ως προς μία διάμετρό της είναι $I = (2/5)MR^2$.

Λύση:

Προφανώς η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Έχουμε

$$\boldsymbol{L}_{\text{πριν}} = \boldsymbol{L}_{\text{μετά}} \Leftrightarrow \frac{2}{5}MR^2\boldsymbol{\omega}_{\text{πριν}} = \frac{2}{5}Mr^2\boldsymbol{\omega}_{\text{μετά}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{\text{μετά}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2\boldsymbol{\omega}_{\text{πριν}}$$

Επομένως η γωνιακή ταχύτητα έχει ίδια φορά και διεύθυνση όπως και πριν την κατάρρευση αλλά μέτρο σημαντικά μεγαλύτερο.

Πρόβλημα 7.51 Χορεύτρια στον πάγο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Τι θα συμβεί εάν ξαφνικά η χορεύτρια, καθώς περιστρέφεται, εκτείνει τα χέρια της; Συγκεκριμένα δείξτε ότι η γωνιακή της ταχύτητα θα μεταβληθεί. Εκφράστε το λόγο της αρχικής προς την τελική γωνιακή ταχύτητα συναρτήσει των ροπών αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής θα ελαττώνεται. Πού καταναλώθηκε ενέργεια;

Λύση:

Κατά την περιστροφή δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές με αποτέλεσμα η στροφορμή της χορεύτριας να διατηρείται. Επομένως

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2}$$

Αλλά $I_1 < I_2$ επομένως $\omega_1 > \omega_2$. Επίσης

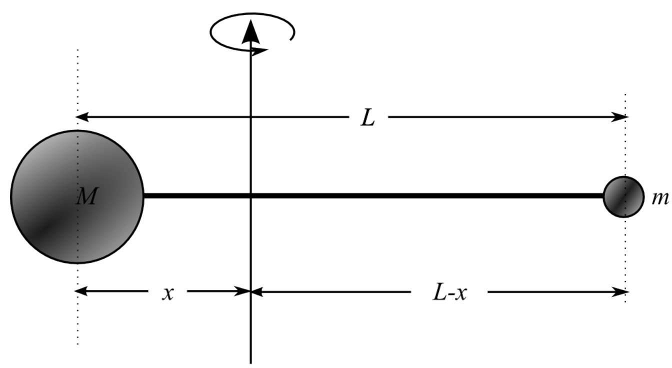
$$E_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

και

$$E_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}I_2\left(\frac{I_1\omega_1}{I_2}\right)^2 = \frac{1}{2}I_2\frac{I_1^2\omega_1^2}{I_2^2} = \frac{1}{2}\frac{I_1^2\omega_1^2}{I_2} = \frac{1}{2}I_1^2\omega_1^2\frac{I_1}{I_2}$$

Επειδή $I_1 < I_2$ έχουμε ότι $E_1 > E_2$. Άρα η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά την έκταση των χεριών της χορεύτριας. Η ενέργεια καταναλώθηκε για την απομάκρυνση των χεριών της χορεύτριας από το σώμα της.

Πρόβλημα 7.52 Δύο μάζες M και m συνδέονται με μια στερεά ράβδο μήκους L και αμελητέας μάζας, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.50. Για έναν άξονα κάθετο στη ράβδο να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει την ελάχιστη ροπή αδρανείας όταν ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη ροπή αδρανείας είναι $I = \mu L^2$, όπου $\mu = mM/(m+M)$.



Σχήμα 7.50

Λύση:

Στη γενική περίπτωση η ροπή αδρανείας είναι $I = Mx^2 + m(L-x)^2$. Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο της ροπής αδρανείας ως προς x ίση με το μηδέν έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow 2Mx - 2m(L-x) = 0 \Rightarrow 2x(M+m) = 2mL \Rightarrow x = \frac{x}{m+M}L$$

που είναι η θέση του κέντρου μάζας. Μάλιστα η δεύτερη παράγωγος δίνει

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}x^2} = 2M + 2m > 0$$

δηλαδή η τιμή που βρήκαμε δίνει το ελάχιστο της ροπής αδρανείας που γίνεται

$$I = M\left(\frac{m}{m+M}L\right)^2 + m\left(L - \frac{m}{m+M}L\right)^2 = \frac{m^2M}{(m+M)^2}L^2 + mL^2\left(\frac{M}{m+M}\right)^2$$

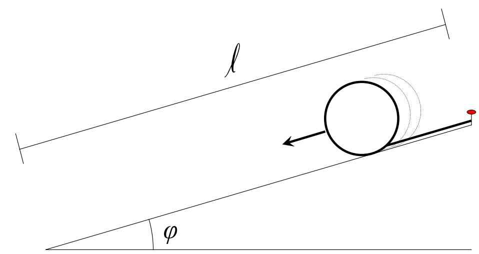
$$\Rightarrow I = \frac{m^2M + mM^2}{(m+M)^2}L^2 = \frac{mM(m+M)}{(m+M)^2}L^2 = \frac{mM}{m+M}L^2 = \mu L^2$$

όπου

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$$

είναι η ανηγμένη μάζα του συστήματος.

Πρόβλημα 7.53 Συμπαγής ομογενής κύλινδρος μάζας M τυλιγμένος με λεπτό νήμα αφήνεται να κυλίσει από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου μήκους l και γωνίας ϕ (βλέπε σχήμα). Το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο. Πόσο χρόνο θα κάνει ο κύλινδρος να φτάσει στη βάση και με ποια ταχύτητα θα είναι εκεί;



Λύση:

Πρώτη λύση:
Θεωρούμε ότι η επιτάχυνση του κυλίνδρου είναι $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ που λόγω της περιστροφικής κίνησης μπορεί να αναλυθεί ως $a = R\alpha = R\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, όπου $\omega,\ \alpha$ είναι η γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση, αντίστοιχα. Επομένως, από το δεύτερο νόμο του Newton θα έχουμε

$$\left.\begin{aligned} M\overbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}^{a} &= B\sin\phi - T \\ TR = I\underbrace{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}_{\alpha} &= \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ Ma = Mg\sin\phi - \frac{1}{2}Ma \qquad \Rightarrow \frac{3}{2}a = g\sin\phi \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\phi$$

όπου T είναι η τάση του νήματος που ασκεί μια δύναμη στον κύλινδρο με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια ροπή $\tau = TR$.

$$l = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2l}{2g\sin\phi}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{3l}{g\sin\phi}}$$

$$v = at = \frac{2}{3}g\sin\phi\sqrt{\frac{3l}{g\sin\phi}} = \frac{2}{3}\sqrt{3gl\sin\phi}$$

Δεύτερη λύση: Εφαρμόζοντας διατήρηση ενέργειας, θα έχουμε

$$Mgl\sin\phi = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{\text{ροπή αδρανείας}}\overbrace{\frac{v^2}{R^2}}^{\omega^2} = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{3}\sqrt{3gl\sin\phi}$$

Πρόβλημα 7.54 Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ αφήνονται ταυτόχρονα να ολισθήσει ένα παραλληλεπίπεδο και να κυλίσει ένα λεπτό δακτυλίδι. Ποιος πρέπει να είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κεκλιμένου επιπέδου και σωμάτων, ώστε αυτά να κινούνται έτσι ώστε να μην προσπερνά το ένα το άλλο; Ποια θα είναι η ταχύτητά τους στη βάση, αν αφεθούν από ύψος h;

Λύση:

Για το παραλληλεπίπεδο έχουμε

$$m_1a_1 = m_1g\sin\phi - \mu m_1 g\cos\phi \qquad \Rightarrow a_1 = g\sin\phi - \mu g\cos\phi$$

Για το δαχτυλίδι η ροπή δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της τριβής, T, θα είναι $\tau = I\alpha_2$

$$I\alpha_2 = I\frac{a_2}{R} = \underbrace{\overbrace{T}^{\text{δύναμη τριβής } T}\quad R}_{\text{ροπή δύναμης } \tau = TR} \qquad \Rightarrow a_2 = \frac{TR^2}{I} \tag{7.85}$$

όπου a_2 είναι η γραμμική επιτάχυνση και α_2 ($a_2 = \alpha_2 R$) είναι η κυκλική επιτάχυνση και η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \int_0^{m_2} R^2 \,\mathrm{d}m = m_2 R^2 \tag{7.86}$$

Επίσης, από τη μεταφορική κίνηση θα ισχύει

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\phi - T \quad \Rightarrow a_2 = g\sin\phi - \frac{T}{m_2} \tag{7.87}$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις (7), (7), και (7), έπεται

$$a_2 = \frac{1}{2} g \sin\phi$$

Συνοψίζοντας, θα έχουμε για τα a_1 και a_2:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = g\sin\phi - \mu g\cos\phi \\ a_2 = \frac{1}{2} g\sin\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Αν θέλουμε να ισχύει } a_1 = a_2 \text{ τότε έπεται} \\ \Rightarrow \; g\sin\phi - \mu g\cos\phi = \frac{1}{2} g\sin\phi \quad \Rightarrow \end{array} \quad \mu = \frac{1}{2}\tan\phi$$

$$m_2 g h = \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{I}_{m_2 R^2} \omega^2 \Rightarrow m_2 g h = m_2 v^2 \Rightarrow v = \sqrt{gh}$$

Η γωνία ϕ είναι τόση ώστε ο συντελεστής τριβής κατά την κύλιση συμπίπτει με το συντελεστή τριβής ολίσθησης.

Πρόβλημα 7.55 Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά σε απόσταση a από το κέντρο μάζας της. Τι είδους κίνηση κάνει αν απομακρυνθεί κατά μικρή γωνία από τη θέση ισορροπίας και ποια είναι η περίοδος; Βρείτε την απόσταση a για την οποία η περίοδος γίνεται ελάχιστη και πόση είναι η περίοδος στη θέση αυτή. Υπολογίστε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της.

Λύση:

$$I_{\mathrm{CM}} = \int x^2 \,\mathrm{d}m = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \rho S \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12} m l^2, \quad \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

όπου S είναι η επιφάνεια της τομής της ράβδου, και η ροπή αδρανείας ως προς ένα άξονα που περνά από ένα σημείο που απέχει μια απόσταση a από το κέντρο μάζας (με τη βοήθεια του θεωρήματος των παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα του Steiner)

$$I_a = \frac{1}{12} m l^2 + m a^2$$

$$I_a \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mga\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{ga}{l^2/12 + a^2}\sin\theta = 0$$

για μικρές γωνίες ταλάντωσης ($\sin\theta \approx \theta$) θα έχουμε την εξίσωση του απλού εκκρεμούς

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{ga}{l^2/12 + a^2}}_{\omega^2}\theta = 0$$

και επομένως αναγνωρίζουμε ως κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi/T$ με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/12 + a^2}{ga}}$$

$$T_{\min} \Rightarrow A = \frac{l^2/12 + a^2}{a} = \text{ θα πρέπει να είναι ελάχιστο}$$

και επομένως η πρώτη παράγωγος του A ως προς το a θα πρέπει να μηδενίζεται και η δεύτερη παράγωγος να είναι θετική

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}a} = \frac{a(2a) - \left(\dfrac{l^2}{12} + a^2\right)}{a^2} = \frac{a^2 - l^2/12}{a^2} = 0 \qquad \Rightarrow a^2 = \frac{l^2}{12} \Rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

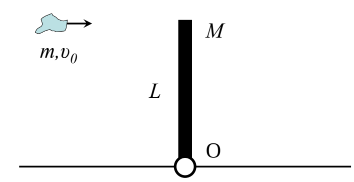
Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο του A ως προς τη μεταβλητή a θα έχουμε

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=l/\sqrt{12}} = \left.\frac{l^2}{6a^3}\right|_{a=l/\sqrt{12}} > 0$$

και επομένως θα έχουμε ελάχιστο. Η περίοδος σε αυτή τη θέση θα έχει την τιμή

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{3^{1/4}}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Πρόβλημα 7.56 Μια ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L που είναι στερεωμένη με άρθρωση σε οριζόντιο άξονα O, είναι στην κατακόρυφη θέση και σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πλαστελίνη μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_0 κολλάει στο άκρο της ράβδου η οποία πέφτει. Υπολογίστε την ταχύτητα του Κ.Μ. του συστήματος τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο. Τριβές δεν υπάρχουν. Για τη ράβδο, η ροπή αδρανείας είναι $I_{\text{CM}} = ML^2/12$.



Λύση:

Από τη διατήρηση στροφορμής έχουμε

$$mv_0L = I\omega_0 \Rightarrow mv_0L = \left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{3mv_0}{(M+3m)L}$$

$$v_{\text{CM}} = \omega\beta$$

όπου β είναι η θέση του νέου κέντρου μάζας του συστήματος ραβδου-πλαστελίνης το οποίο προσδιορίζεται από τον ορισμό του κέντρου μάζας

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{ML/2 + mL}{M+m}$$

όπου $x_1 = L/2,\ m_1 = M$ για τη ράβδο και $x_1 = L,\ m_1 = m$ για τη πλαστελίνη. Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{3}ML^2 + mL^2}_{I}\right)\omega_0^2 + \underbrace{(M+m)g\beta}_{\text{δυναμική ενέργεια}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega^2}_{\text{τελική κινητική ενέργεια}} \tag{7.88}$$

όπου ω είναι η κυκλική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που χτυπά το έδαφος. Από τη σχέση (7) παίρνουμε:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{(M+m)g\beta}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)g}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}M + m\right)L}}$$

και επομένως η ταχύτητα του Κ.Μ. του συστήματος τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο θα είναι

$$v_{\text{CM}} = \omega\beta = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)g}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}M + m\right)L}}\,\frac{ML/2 + mL}{M+m}$$

Πρόβλημα 7.57 Ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M τοποθετείται σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Μικρό σώμα μάζας m, κινούμενο με ταχύτητα v_0 και κάθετο στη ράβδο χτυπάει ελαστικά στην άκρη της ράβδου. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά το χτύπημα. Να υποθέσετε ότι το μικρό σώμα δεν αποκλίνει από την αρχική του πορεία μετά την ελαστική κρούση με τη ράβδο.

Λύση:

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$mv_0 = mv + MV$$

$$\Rightarrow V = \frac{m(v_0 - v)}{M} \tag{7.89}$$

Επίσης, από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \Rightarrow mv_0^2 = mv^2 + MV^2 + \frac{1}{12}Ml^2\omega^2 \tag{7.90}$$

Επιπλέον

$$mv_0\frac{l}{2} = I_c\omega + mv\frac{l}{2} \Rightarrow mv_0 = \frac{1}{6}Ml\omega + mv$$

$$\Rightarrow v = v_0 - \frac{M}{m}\frac{l}{6}\omega \tag{7.91}$$

Από τις σχέσεις (7) και (7) παίρνουμε

$$V = \frac{m(v_0 - v_0) + m\frac{M}{m}\frac{l}{6}\omega}{M} = \frac{l}{6}\omega \tag{7.92}$$

και από τις (7), (7) και (7) τελικά

$$mv_0^2 = m\left(v_0^2 + \frac{M^2}{m^2}\frac{l^2\omega^2}{36} - 2v_0\frac{Ml}{6m}\omega\right) + M\frac{4l^2}{36}\omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{v_0 12m}{l(4m+M)}$$

Πρόβλημα 7.58 Μη ομογενής ράβδος μήκους L μπορεί να ταλαντώνεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο άκρο της O. Αν η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα $\rho(x) = kx$, όπου k σταθερά και x η απόσταση από το άκρο O, βρείτε την εξίσωση της κίνησης και την περίοδο της ταλάντωσης για μικρές γωνίες ταλάντωσης όπου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$.

Λύση:

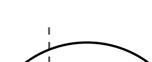
$$I = \int_0^L x^2\,\mathrm{d}m = \int_0^L x^2 kx\,\mathrm{d}x = \frac{kL^4}{4}$$

$$M = \int \rho\,\mathrm{d}x = \int_0^L kx\,\mathrm{d}x = \frac{kL^2}{2}$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int_0^L x\rho\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^L xkx\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\,\mathrm{d}x} = \frac{2kL^3\cdot}{3kL^2} = \frac{2}{3}L$$

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -Mgx_{\mathrm{CM}}\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4}{3}\frac{g}{L}\theta = 0$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}\frac{L}{g}}$$



Πρόβλημα 7.59 Κυκλικός ομογενής δίσκος ακτίνας R ταλαντώνεται γύρω από άξονα κάθετο στο δίσκο (στο σημείο Ο) που περνά σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η εξίσωση της κίνησης και η περίοδος ταλάντωσης για μικρές γωνίες ταλάντωσης όπου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$. Για ποια τιμή της απόστασης r ο δίσκος θα έχει τη μικρότερη περίοδο;

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης, θεωρώντας τη ροπή δύναμης τ, θα είναι

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\tau \Rightarrow I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + Mgr\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Mgr}{I}\theta = 0$$

Η ροπή αδράνειας θα είναι

$$I = I_{\mathrm{CM}} + Mr^2 = \frac{M(R^2+2r^2)}{2}, \quad \text{για} \quad I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

Από την εξίσωση κίνησης, αναγνωρίσουμε ως περίοδο ταλάντωσης, T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+2r^2}{2gr}}$$

$$\text{για να έχουμε } T_{\min} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}T^2}{\mathrm{d}r} = 0 \Rightarrow \frac{8gr^2 - 2R^2g - 4gr^2}{4g^2r^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{4gr^2 - 2R^2g}{4g^2r^2}}_{1/g - R^2/2gr^2} = 0$$

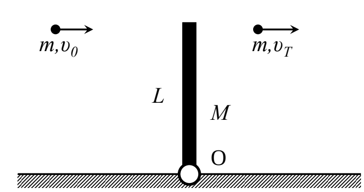
$$\Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Λαμβάνοντας τη δεύτερη παράγωγο του T έπεται

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2T^2}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=R/\sqrt{2}} = \left.\frac{R^2}{gr^3}\right|_{r=R/\sqrt{2}} > 0$$

δηλαδή θα έχουμε ένα ελάχιστο.

Πρόβλημα 7.60 Ράβδος μάζας M και μήκους L που είναι στερεωμένη με άρθρωση σε οριζόντιο άξονα Ο, είναι στην κατακόρυφη θέση και σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα v_0 και τρυπάει τη ράβδο ακαριαία στο άνω άκρο της (χωρίς να μεταβάλλει την κατανομή μάζας) και συνεχίζει την πορεία της με οριζόντια ταχύτητα v_T, ενώ η ράβδος πέφτει. Υπολογίστε την ταχύτητα του Κ.Μ. της ράβδου τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο. Τριβές δεν υπάρχουν.
Για τη ράβδο, η ροπή αδρανείας είναι $I_{\mathrm{CM}} = ML^2/12$



Λύση:

Από τη διατήρηση τη στροφορμής θα έχουμε

$$mv_0L = mv_TL + I\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{mL(v_0 - v_T)}{I} = \frac{3(v_0 - v_T)m}{ML}$$

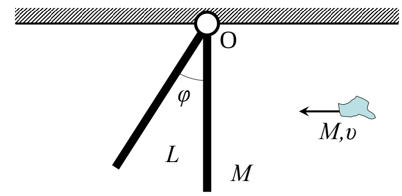
$$I = I_{\mathrm{CM}} + \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2$$

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{6}ML^2\frac{9(v_0 - v_T)^2m^2}{M^2L^2} + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$$

$$\frac{9}{6}\frac{m^2}{M}(v_0 - v_T)^2 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{9m^2}{L^2M^2}(v_0 - v_T)^2 + 3\frac{g}{L}$$

Επομένως η ταχύτητα του Κ.Μ. της ράβδου τη στιγμή που χτυπά το δάπεδο θα είναι

$$v_{\text{CM}} = \frac{L}{2}\omega = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{9m^2}{L^2M^2}(v_0 - v_T)^2 + 3\frac{g}{L}}$$



Πρόβλημα 7.61 Ράβδος μήκους L κρέμεται κατακόρυφα στερεωμένη σε άρθρωση (βλ. σχήμα). Ένα κομμάτι πλαστελίνης ίδιας μάζας με τη ράβδο κινείται οριζόντια με ταχύτητα v, χτυπά τη ράβδο στο κέντρο της και κολλάει σε αυτήν. Κατά ποια γωνία θα αποκλίνει η ράβδος;

Λύση:

Από το θεώρημα της διατήρησης της στροφορμής θα έχουμε

$$Mv\frac{L}{2} = \left(\frac{ML^2}{3} + M\frac{L^2}{4}\right)\omega \Rightarrow \omega = \frac{6}{7}\frac{v}{L}$$

όπου $MvL/2$ είναι η ατροφορμή της πλαστελίνης ως προς τον κάθετο άξονα του επιπέδου που κινείται η ράβδος και περνά από το σημείο Ο. Από το θεώρημα της διατήρησης ενέργειας θα έχουμε

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = 2Mg\frac{L}{2}(1 - \cos\phi) \Rightarrow \frac{7}{12}ML^2\omega^2 = 2MgL(1 - \cos\phi)$$

$$\Rightarrow \cos\phi = 1 - \frac{3}{14}\frac{v^2}{Lg}$$

Πρόβλημα 7.62

Α) Σωματίδιο μάζας m κινείται με την επίδραση της δύναμης που έχει δυναμική ενέργεια

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2$$

Να δείξετε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα σ' ένα επίπεδο το οποίο καθορίζεται με βάση τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Αν κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ κάθετη προς το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_0$, να δείξετε ότι τούτο διαγράφει κάποια τροχιά που η πολική του ακτίνα κυμαίνεται μεταξύ των τιμών r_0 και v_0/ω:

$$r_0 \le r \le \frac{v_0}{\omega}$$

Β) Να αποδειχθεί ότι η ροπή αδρανείας συμπαγούς σφαίρας ως προς ένα διαμετρικό άξονα είναι

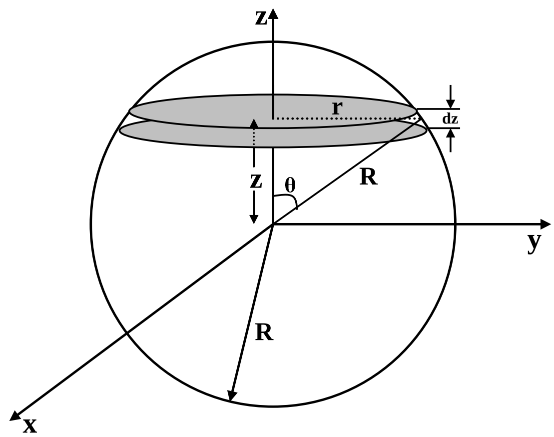
$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

(Η απόδειξη γίνεται εύκολα, αν θεωρήσουμε ότι η σφαίρα αποτελείται από ένα σύνολο κυκλικών δίσκων απειροστού πάχους $\mathrm{d}z$, προσαρμοσμένους μέσα στη σφαιρική επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.)

Λύση:

Α) Από τη δυναμική ενέργεια, U θα έχουμε την δύναμη:

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -m\omega^2\boldsymbol{r}.$$



Σχήμα 7.51

Αν $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ είναι η ορμή του σωματιδίου τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ θα δώσει για την παράγωγο ως προς τον χρόνο

$$\dot{\boldsymbol{N}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} - m\omega^2 \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0$$

Άρα το διάνυσμα $\boldsymbol{N}$ παραμένει σταθερό με τον χρόνο. Εφ' όσον το $\boldsymbol{N}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα της θέσης,

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

συνεπώς το $\boldsymbol{r}$ θα βρίσκεται στο επίπεδο το κάθετο στο $\boldsymbol{N}$ και δεν θα μεταβάλλεται με τον χρόνο. Επιπλέον και για το αρχικό διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_0$ θα ισχύει

$$\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

Το επίπεδο το κάθετο στο $\boldsymbol{N}$ θα καθοριστεί από τη σχέση που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις σχέσεισ:

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = 0 \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

δηλαδή

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

Η εξίσωση κίνησης για την ελκτική δύναμη $\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}$ θα είναι

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \omega^2 \boldsymbol{r} = 0$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τον αρμονικό ταλαντωτή, που έχει λύση της μορφής

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{A} \sin(\omega t) + \boldsymbol{B} \cos(\omega t)$$

όπου οι σταθερές $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες. Για την αρχική συνθήκη $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{B}$$

και με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης $\boldsymbol{v}(0) = \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{v}_0$ θα έχουμε

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 = \omega \boldsymbol{A}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega}$$

όπου η ταχύτητα είναι

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \omega \boldsymbol{A} \cos(\omega t) - \omega \boldsymbol{B} \sin(\omega t)$$

Με τον ανωτέρω προσδιορισμό των σταθερών $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ το διάνυσμα θέσης θα είναι

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \boldsymbol{r}_0 \cos(\omega t)$$

Το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{r}$ με τον εαυτό του θα είναι

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) + r_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{\omega} \boldsymbol{v_0} \cdot \boldsymbol{r}_0 \sin(\omega t) \cos(\omega t).$$

Μας δίνεται ότι $\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0 = 0$ (εφ' όσον το σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ κάθετη προς το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}_0$), άρα

$$r^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t + r_0^2 \cos^2 \omega t = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \sin^2 \omega t + r_0^2 (1 - \sin^2 \omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 \omega t = \frac{r^2 - r_0^2}{(v_0/\omega)^2 - r_0^2},$$

αλλά για το ημίτονο ισχύει $0 \le \sin^2 \omega t \le 1$, συνεπώς

$$0 \le \frac{r^2 - r_0^2}{(v_0/\omega)^2 - r_0^2} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad r_0^2 \le r^2 \le \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad r_0 \le r \le \frac{v_0}{\omega}.$$

B) Θεωρούμε ένα στοιχειώδη δίσκο ύψους dz και ακτίνας $r = R \sin \theta$ και μάζας, dm

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi R^2 \sin^2 \theta dz,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας της σφαίρας.
Η στοιχειώδης ροπή αδρανείας, dI αυτού του δίσκου είναι

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} R^4 (\sin \theta)^4 \rho \pi R d(\cos \theta),$$

όπου $z = R \cos \theta \Rightarrow dz = Rd(\cos \theta)$. Άρα αφού ολοκληρώσουμε το dI θα έχουμε

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \int_{\pi}^{0} \sin^4 \theta d(\cos \theta) = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \int_{-1}^{+1} (1 - \omega^2)^2 d\omega,$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει $\cos \theta = \omega$ και $\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = (1 - \cos^2 \theta)^2 = (1 - \omega^2)^2$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{+1} (1 - \omega^2)^2 d\omega = \frac{16}{15}.$$

Άρα η ροπή αδρανείας είναι

$$I = \frac{8}{15} \rho \pi R^5,$$

και η πυκνότητα μάζας της σφαίρας είναι:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$$

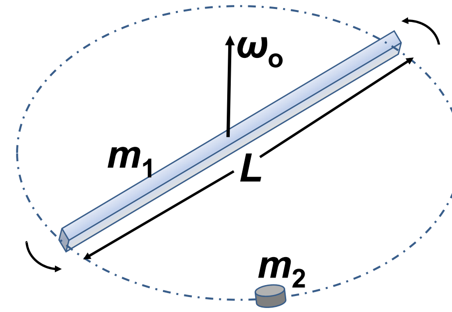
$$\Rightarrow \quad \rho \pi R^3 = \frac{3M}{4}.$$

Άρα η ροπή αδρανείας είναι

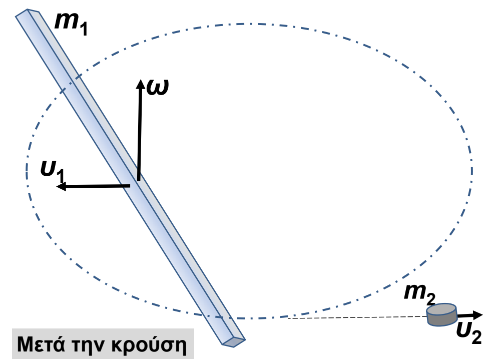
$$I = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{8}{15} \frac{3M}{4} R^2 = \frac{2}{5} M R^2.$$

Πρόβλημα 7.63

Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας m_1 ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να μεταφέρεται ή να περιστρέφεται ελεύθερα πάνω σε αυτό. Δίνουμε στη ράβδο γωνιακή ταχύτητα ω_o ώστε να περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Τοποθετούμε στο ίδιο επίπεδο σώμα μάζας m_2 σε κατάλληλη θέση ώστε να συγκρουστεί με το άκρο της στρεφόμενης ράβδου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η κρούση είναι ελαστική, το σώμα μάζας m_2 ήταν ακίνητο αρχικά και κινείται μετά την κρούση μεταφορικά πάνω στο επίπεδο. Εφαρμόζοντας τις αρχές διατήρησης ορμής, στροφορμής, και μηχανικής ενέργειας:



(α) Να εκφραστούν οι μεταφορικές ταχύτητες των σωμάτων v_1 και v_2 και η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ω ως συνάρτηση του λόγου $\lambda = m_1/m_2$ των μαζών ράβδου-σώματος.
(β) Να υπολογιστεί ο λόγος των δύο μαζών $\lambda = m_1/m_2$ ώστε μετά την ελαστική τους κρούση, η ράβδος να μην περιστρέφεται. Να περιγράψετε τις κινήσεις των δύο σωμάτων στην περίπτωση αυτή.
(γ) Να υπολογιστούν οι τιμές των μεγεθών της ερώτησης (α) αν $m_1 \ll m_2$ (αν για παράδειγμα το σώμα μάζας m_2 είναι ένα ακλόνητο εμπόδιο).
Δίνεται ότι $I_{\text{ράβδου}} = ML^2/12$ [ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο (μάζας M και μήκους L) που διέρχεται από το κέντρο μάζας τησ].



Λύση:

(α) Στο πιο πάνω σχήμα βλέπουμε τα δύο σώματα πριν και μετά την ελαστική τους κρούση.
Ισχύουν οι αρχές διατήρησης ορμής, στροφορμής και μηχανικής (τελικά κινητικής) ενέργειας, έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= -m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow \lambda v_1 = v_2 \\ I\omega_0 + 0 &= I\omega + m_2 v_2 \frac{L}{2} \Rightarrow (\omega_0 - \omega)L = 6v_1 \end{aligned} \tag{7.93}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}I\omega_0^2 + 0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{12}m_1 L^2\omega_0^2 + 0 = \frac{1}{12}m_1 L^2\omega^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \\ \Rightarrow\ &\lambda(\omega_0^2 - \omega^2)L^2 = 12\lambda v_1^2 + 12 v_2^2 \\ \Rightarrow\ &(\omega_0^2 - \omega^2)L^2 = 12(1+\lambda)v_1^2 \end{aligned}$$

και διαιρώντας με τη σχέση (7) έχουμε

$$(\omega_0 + \omega)L = 2(1+\lambda)v_1$$

(β) Με επίλυση του συστήματος παίρνουμε:

$$v_1 = \frac{\omega_0 L}{\lambda+4}, \quad v_2 = \frac{\lambda\omega_0 L}{\lambda+4} \qquad \text{και} \qquad \omega = \frac{\lambda-2}{\lambda+4}\omega_0$$

Θέτουμε στις πιο πάνω σχέσεις $\omega = 0$ και έχουμε:

$$\frac{\lambda-2}{\lambda+4}\omega_0 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow m_1 = 2m_2$$

Στην περίπτωση αυτή τα σώματα εκτελούν μόνο μεταφορικές κινήσεις σε αντίθετες κατευθύνσεις και αντίθετες ορμές (αφού η συνολική ορμή είναι μηδέν). Η ράβδος διατηρείται συνεχώς κάθετη προς τις διευθύνσεις των ταχυτήτων. Τα μέτρα των ταχυτήτων είναι:

$$v_1 = \frac{\omega_0 L}{6}, \ v_2 = \frac{\omega_0 L}{3}$$

(γ) Εφόσον $m_1 \ll m_2$ ο λόγος $\lambda = m_1/m_2$ τείνει στο μηδέν, οπότε:

$$v_1 = \frac{\omega_0 L}{4},\ v_2 = 0 \quad \text{και} \quad \omega = -\frac{1}{2}\omega_0$$

8

Μετασχηματισμός του Lorentz & Σχετικιστική Δυναμική

Πρόβλημα 8.1 Να επιβεβαιωθεί από τους μετασχηματισμούς του Lorentz ότι ισχύει

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

Λύση:

Από τους μετασχηματισμούς του Lorentz έχουμε

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Για τη ζητούμενη ποσότητα έχουμε

$$x'^2 - c^2t'^2 = \frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2(t - xv/c^2)^2}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow x'^2 - c^2t'^2 = \frac{x^2 - c^2t^2 - x^2\beta^2 + v^2t^2 + 2xvt - 2xvt}{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow x'^2 - c^2t'^2 = \frac{(x^2 - c^2t^2)(1-\beta^2)}{1-\beta^2} = x^2 - c^2t^2$$

Ας σημειωθεί ότι, αν γράψουμε $x_1 \equiv x$ και $x_4 \equiv ict$, όπου $i = \sqrt{-1}$ (μιγαδική μονάδα), τότε

$$x^2 - c^2t^2 \equiv x_1^2 + x_4^2$$

Πρόβλημα 8.2 Να δείξετε, με το μετασχηματισμό Lorentz, ότι δύο ταυτόχρονα γεγονότα $(t_1 = t_2)$ σε διαφορετικές θέσεις $(x_1 \neq x_2)$ ενός αδρανειακού συστήματος S, δεν είναι γενικά ταυτόχρονα σε ένα άλλο σύστημα S'.

Λύση:

Έστω δύο γεγονότα με χρονικές στιγμές t_1, t_2 (με θέσεις x_1, x_2) σε ένα σύστημα αναφοράς S και t'_1, t'_2 (με θέσεις x'_1, x'_2) σε ένα σύστημα αναφοράς S' που κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς το S. Από τους χρονικούς μετασχηματισμούς του Lorentz θα έχουμε:

$$t'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \tag{8.1}$$

$$t'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \tag{8.2}$$

όπου $\beta = V/c$ και $\gamma = \sqrt{1/(1-(V/c)^2)}$. Αφαιρώντας τις εξισώσεις (8) και (8) θα έχουμε

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(x_2 - x_1 - \beta c(t_2 - t_1))$$

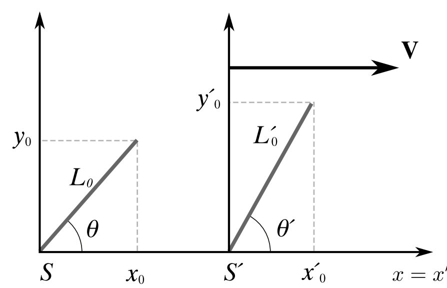
Αν τα δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα $t_1 = t_2$ θα έχουμε

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$
$$\Rightarrow t'_1 \neq t'_2$$

διότι στη γενική περίπτωση $x_1 \neq x_2$.

Πρόβλημα 8.3 Να υπολογίσετε στο S' το μήκος μιας ράβδου και τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα x', όταν ξέρετε ότι στο σύστημα S η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x και έχει μήκος L_0. Το σύστημα S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\boldsymbol{x}}$ ως προς S.

Λύση:



Σχήμα 8.1

Στο σύστημα S από το σχήμα 8.1 θα έχουμε

$$x_0 = L_0 \cos\theta, \qquad y_0 = L_0 \sin\theta$$
$$L_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

και στο S' θα ισχύει

$$x'_0 = L\cos\theta', \qquad y'_0 = L\sin\theta'$$
$$L' = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}$$

όπου το L, θ' είναι το μήκος και η νέα γωνία της ράβδου στο σύστημα S'.
Γνωρίζουμε από τους μετασχηματισμούς του Lorentz ότι θα υπάρχει συστολή του μήκους κατά τον άξονα των x, x' ενώ κατά των άξονα των y, y' το μήκος είναι αναλλοίωτο

$$x' = \sqrt{1-\beta^2}\, x_0 = \frac{x}{\gamma}$$

$$y' = y_0$$

όπου $\gamma = (1-(V/c)^2)^{-1/2}$.
Παρατηρούμε ότι

$$\tan\theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x/\gamma} = \gamma\tan\theta$$

και το μήκος στο σύστημα S' θα είναι

$$L = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(1-\beta^2)x_0^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{(1-\beta^2)L_0^2\cos^2\theta + L_0^2\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow L = L_0\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

Πρόβλημα 8.4 Να δείξετε ότι, αν στο σύστημα αναφοράς S' είναι $v'_y = c\sin\theta$ και $v'_x = c\cos\theta$, τότε στο σύστημα αναφοράς S θα έχουμε

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2$$

Το σύστημα S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\boldsymbol{x}}$ ως προς το S.

Λύση:

Από τους μετασχηματισμούς των ταχυτήτων γνωρίζουμε ότι

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + (V/c^2)v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + (V/c^2)v'_x)}$$

όπου V είναι η ταχύτητα του συστήματος S' ως προς το S.
Έχουμε ότι

$$v'_x = c\sin\theta, \qquad v'_y = c\cos\theta$$

Επομένως οι συνιστώσες της ταχύτητας στο σύστημα S θα είναι

$$v_x = \frac{c\cos\theta + V}{1 + (V/c^2)c\cos\theta}$$

$$v_y = \frac{c\sin\theta}{\gamma(1 + (V/c^2)c\cos\theta)}$$

όπου $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ και $\beta = V/c$.

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = \frac{c^2\cos^2\theta + 2Vc\cos\theta + V^2 + c^2\sin^2\theta/\gamma}{(1+\beta\cos\theta)^2} =$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = \frac{c^2\cos^2\theta + 2Vc\cos\theta + V^2 + c^2\sin^2\theta - c^2\beta^2\sin^2\theta}{(1+\beta\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = \frac{c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2Vc\cos\theta + V^2(1-\sin^2\theta)}{(1+\beta\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = c^2\frac{1 + 2(V/c)\cos\theta + (V/c)^2\cos^2\theta}{(1+\beta\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = c^2\frac{1 + 2\beta\cos\theta + \beta^2\cos^2\theta}{(1+\beta\cos\theta)^2} = c^2\frac{(1+\beta\cos\theta)^2}{(1+\beta\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = c^2$$

Πρόβλημα 8.5 (α) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος ζωής μιας δέσμης από μεσόνια π^+, τα οποία κινούνται με $\beta = 0,73$; (Ο μέσος χρόνος ζωής τους, τ, σε ηρεμία, είναι $2,5\times10^{-8}s$).
(β) Πόση απόσταση διανύεται από αυτά, με $\beta = 0,73$, κατά τη διάρκεια του μέσου χρόνου ζωής τους;
(γ) Πόση απόσταση θα υπολογίζαμε ότι θα διανυόταν, αν δεν παίρναμε υπόψη μας τα αποτελέσματα της σχετικότητας;
(δ) Επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) και (β) για $\beta = 0,99$.

Λύση:

(α)

Από τη διαστολή του χρόνου έχουμε

$$t' = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}} = 3,66 \times 10^{-8}\, s$$

όπου $\beta = 0,73$ και ο χρόνος ζωής του σωματιδίου $\tau = 2,5 \times 10^{-8}$ s.

(β) Η απόσταση που διανύεται τα σωματίδια, με $\beta = 0,73$, κατά τη διάρκεια του μέσου χρόνου ζωής τους θα είναι

$$x' = \beta c t' = 0,733 \times 3 \times 10^8 \times 3,66 \times 10^{-8}\,(\mathrm{m/s})\mathrm{s} = 8\,\mathrm{m}$$

(γ) Η απόσταση που διανυόταν, αν δεν παίρναμε υπόψη μας τα αποτελέσματα της σχετικότητας θα είναι

$$x' = \beta c \tau = 0,733 \times 3 \times 10^8 \times 2,5 \times 10^{-8}\,(m/s)s = 5,5\,\mathrm{m}$$

(δ) Αν $\beta = 0,99$ ο χρόνος θα είναι

$$t' = \frac{\tau}{(1-\beta^2)^{1/2}} = 1,77 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$$

και η απόσταση με σχετικότητα είναι

$$x' = \beta c t' = 0,99 \times 3 \times 10^8 \times 1,77 \times 10^{-7}\,(m/s)s = 52,6\,\mathrm{m}$$

και η απόσταση που διανυόταν, αν δεν πάρουμε υπόψη μας τα αποτελέσματα της σχετικότητας θα είναι

$$x' = \beta c \tau = 0,99 \times 3 \times 10^8 \times 2,5 \times 10^{-8}(m/s)s = 7,43\,\mathrm{m}$$

Πρόβλημα 8.6 Ο μέσος χρόνος ζωής τ των σωματιδίων μ στο δικό τους σύστημα αναφοράς είναι κατά προσέγγιση $2 \times 10^{-6}\,s$. Υποθέτουμε ότι μια μεγάλη δέσμη από σωματίδια μ, που έχουν παραχθεί σε κάποιο ύψος στην ατμόσφαιρα, κινούνται προς τα κάτω με ταχύτητα $v = 0,99\,c$. Ο αριθμός κρούσεων στην ατμόσφαιρα κατά την πορεία των σωματιδίων προς τα κάτω είναι μικρός.
(α) Αν 1% από τα αρχικά σωματίδια της δέσμης επιζούν και φτάνουν στην επιφάνεια της Γης, να υπολογίσετε το αρχικό τους ύψος. Στο σύστημα αναφοράς των σωματιδίων μ, ο αριθμός των σωματιδίων που επιζούν σε χρόνο t, δίνεται από τη σχέση

$$N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος αυτής της διαδρομής στο σύστημα αναφοράς των σωματιδίων μ.

Λύση:

(α) Γνωρίζουμε ότι στο σύστημα αναφοράς των σωματιδίων μ, ο αριθμός των σωματιδίων που επιζούν σε χρόνο t, δίνεται από τη σχέση

$$N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{8.3}$$

και για $N(t) = 0,01N(0)$ θα έχουμε

$$\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0.01$$

$$\Rightarrow t = -\tau \ln 0,01 = 9,22 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

και από τη διαστολή του χρόνου, ο χρόνος στο σύστημα της Γης θα είναι

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{9,22 \times 10^{-6}}{\sqrt{1-0,99^2}} = 6,54 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$$

και η αντίστοιχη απόσταση είναι

$$x' = \beta c t' = 0,99 \times 3 \times 10^8\,(m/s) \times 6,54 \times 10^{-5}\,s = 1,94 \times 10^4\,\mathrm{m}$$

(β) Στο σύστημα των σωματιδίων μ η απόσταση θα έχει πάθει συστολή

$$x = x'(1-\beta^2)^{1/2} = 1,94 \times 10^4 \sqrt{1-0,99^2}\,\mathrm{m} = 2,74 \times 10^3\,\mathrm{m}$$

Πρόβλημα 8.7 Ένας παλμός από 10^4 μεσόνια π^+ κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $20m$, με ταχύτητα $v = 0,99c$. Ο μέσος χρόνος ζωής των μεσονίων π^+ως προς το δικό τους σύστημα αναφοράς είναι $2,5 \times 10^{-8}s$.
(α) Πόσα μεσόνια επιζούν, όταν ο παλμός επιστρέφει στο αρχικό σημείο εκκίνησης;
(β) Κατά την ίδια χρονική περίοδο, πόσα μεσόνια θα επιζούσαν σε μια ομάδα 10^4 μεσονίων που θα παρέμενε σε ηρεμία στην αρχή των συντεταγμένων;

Λύση:

Ο χρόνος μιας περιστροφής όπως μετριέται στο σύστημα του εργαστηρίου είναι

$$\frac{2\pi r}{0,99\,c} = 4,23 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$$

Ο αντίστοιχος χρόνος στο σύστημα του π^+ είναι

$$\frac{4,23 \times 10^{-7}s}{\gamma} = 4,23 \times 10^{-7}s \times \sqrt{1-0,99^2} = 5.97 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (8) ο αριθμός των πιονίων που θα μείνει θα είναι

$$N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} = 10^4\mathrm{e}^{-5{,}97\,10^{-8}/2{,}5\,10^{-8}} = 918$$

Σε περίπτωση που τα πιόνια ήταν ακίνητα έχουμε

$$N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} = 10^4\mathrm{e}^{-4{,}23\,10^{-7}/2{,}5\,10^{-8}} = 4,5 \times 10^{-4}$$

Άρα κανένα πιόνιο δεν μένει.

Πρόβλημα 8.8 Παρατηρούμε ένα γαλαξία που απομακρύνεται κατά μια κατεύθυνση με ταχύτητα $V = 0,3c$ και έναν άλλο που απομακρύνεται κατά την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα που έχει το ίδιο μέτρο. Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται ο ένας γαλαξίας για παρατηρητή που βρίσκεται στον άλλο;

Λύση:

Από τους μετασχηματισμούς των ταχυτήτων γνωρίζουμε ότι

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + (V/c^2)v'_x}$$

όπου V είναι η ταχύτητα του συστήματος S' ως προς το S.
Αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα S βρίσκεται πάνω στον γαλαξία που απομακρύνεται με ταχύτητα $-0,3c$ ως προς το S' που είναι ένα σταθερό αδρανειακό σύστημα. Επομένως το S' κινείται με $V = 0,3c$ ως προς το S και η ταχύτητα του ενός γαλαξία είναι $v'_x = 0,3c$ ως προς το σταθερό σύστημα S'. Από τον μετασχηματισμό των ταχυτήτων θα έχουμε

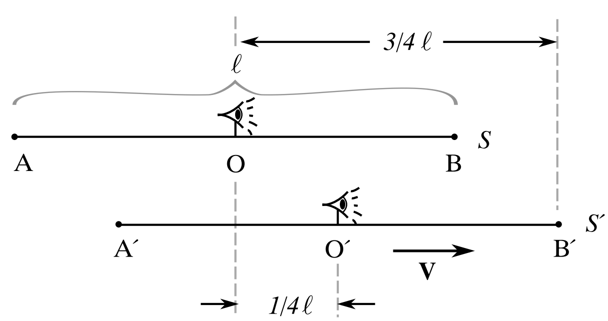
$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + (V/c^2)v'_x} = \frac{0,3c + 0,3c}{1 + (0,3c)(0,3c)/c^2} = \frac{0,6c}{1,09}$$

$$\Rightarrow v_x = 0,55c$$

Πρόβλημα 8.9 Θεωρούμε ότι οι πηγές δύο γεγονότων είναι ακίνητες και τοποθετημένες στα σημεία A και B, τα οποία απέχουν ίσες αποστάσεις από τον παρατηρητή O του συστήματος αναφοράς S. Σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (όπως ορίζεται από τον παρατηρητή O στο S) συμβαίνουν δύο γεγονότα. Ένας δεύτερος παρατηρητής O', του οποίου το σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\boldsymbol{x}}$ ως προς το S, βρίσκεται στο O και το S' συμπίπτει με το S.
(α) Υποθέτουμε ότι $V/c = 1/3$. Να σχεδιαστούν οι θέσεις των δύο συστημάτων και των σημείων A, A', B, B', όταν το σήμα από το B φτάνει στον παρατηρητή O'. Έχει φτάσει αυτό το σήμα στον παρατηρητή O; Γιατί;
(β) Να σχεδιαστούν οι θέσεις των S και S' όταν και τα δύο συστήματα φτάνουν στον παρατηρητή O.
(γ) Να σχεδιαστούν οι θέσεις των S και S' όταν το σήμα από το A φτάνει στον παρατηρητή O'.
(δ) Υποθέτουμε ότι τα δύο γεγονότα καταγράφονται στα σημεία A' και B' κατά κάποιο φυσικό τρόπο, π.χ. σε φωτογραφικές πλάκες. Με τις παραπάνω προϋποθέσεις δείξετε ότι οι αποστάσεις $A'O'$ και $B'O'$ είναι ίσες.
(ε) Να δείξετε ότι τα δύο γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα για τον παρατηρητή O'. Η σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός εξυπακούεται σε όλες τις περιπτώσεις για τον ορισμό του συγχρονισμού. Για να ξεκαθαριστεί καλά αυτό το ζήτημα, κάνουμε τους ακόλουθους συλλογισμούς: Υποθέτουμε ότι τα δύο γεγονότα στα σημεία A και B είναι ηχητικοί παλμοί, ταυτόχρονοι όπως παρατηρούνται από τον παρατηρητή O, που είναι ακίνητος ως προς το μέσο διάδοσης του ήχου. Υποθέτουμε επίσης ότι ο παρατηρητής O' κινείται με ταχύτητα V ίση με το $1/3$ της ταχύτητας του ήχου. Χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου για να δείξετε ότι, κατά τον παρατηρητή O', οι ταχύτητες των ηχητικών παλμών από τα σημεία A και B προς τον παρατηρητή O' δεν είναι ίδιες.
(στ) Να δείξετε ότι, και αν ακόμη τα δύο σήματα φτάνουν στον παρατηρητή O' σε διαφορετικούς χρόνους, το γεγονός ότι οι παλμοί διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες αντισταθμίζει αυτή τη διαφορά και έτσι τα δύο γεγονότα χαρακτηρίζονται ως ταυτόχρονα ακόμη και για τον παρατηρητή O'.

Λύση:

(α)



Ας θεωρήσουμε ότι η απόσταση μεταξύ A και B είναι ℓ. Το σημείο O' κινείται προς το B και θα έχει ήδη καλύψει μια απόσταση $Vt = ct/3$ πριν λάβει το σήμα από το B. Το σήμα από το B θα καλύψει απόσταση ct. Άρα

$$\frac{1}{3}ct + ct = \ell$$

$$\Rightarrow t = \frac{3\ell}{4c}$$

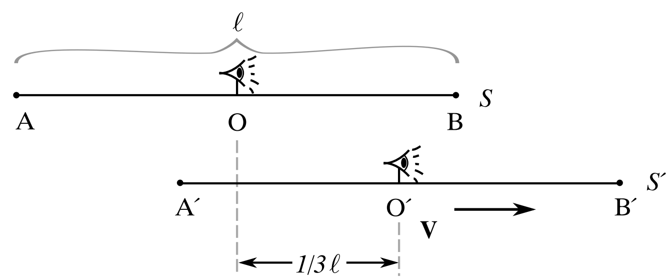
Το O' θα βρίσκεται σε απόσταση

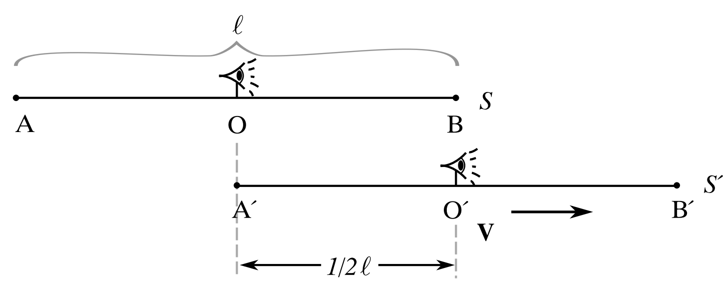
$$x = \frac{1}{3}c\frac{3\ell}{4c} = \frac{\ell}{4}$$

την στιγμή που λαμβάνει το σήμα. Το σήμα θα φτάσει στο O μετά από χρόνο ℓ/c, άρα το σήμα δεν έχει ακόμη φτάσει στο O όταν το έχει λάβει το O'.

(β)
Το σήμα φτάνει στο O μετά από χρόνο $t = \ell/c$. Το O' θα βρίσκεται σε απόσταση

$$x = Vt = \frac{1}{3}c\frac{\ell}{c} = \frac{\ell}{3}$$





(γ)
Το O' έχει καλύψει μια απόσταση $Vt = ct/3$ και βρίσκεται από το A σε απόσταση $\ell + ct/3$. Άρα

$$\ell + ct/3 = ct$$

$$t = \frac{3\ell}{2c}$$

Άρα το O' βρίσκεται σε απόσταση

$$\ell + \frac{ct}{3} = \ell + \frac{c}{3}\frac{3\ell}{2c} = \frac{\ell}{2}$$

(δ) Ο παρατηρητής στο O' μετρά $O'A' = \sqrt{1-\beta^2}\,\ell$ και $O'B' = \sqrt{1-\beta^2}\,\ell$. Άρα $O'A' = O'B'$. Μπορούμε, επίσης, να το δούμε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Lorentz. Πρέπει να βρούμε τις θέσεις $x'_{A'}$ και $x'_{B'}$ για $t' = 0$ όταν $x_A = -\ell$ και $x_B = +\ell$

$$x_A = \frac{x'_{A'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\ell \tag{8.4}$$

$$x_B = \frac{x'_{B'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \ell \tag{8.5}$$

Από τις (8) και (8) έχουμε

$$\left|x'_{A'}\right| = \left|x'_{B'}\right|.$$

(ε) Αν θεωρήσουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι σύγχρονα στο ακίνητο σύστημα συντεταγμένων ($t_A = t_B$) έχουμε

$$t'_{A'} = \gamma\left(t_A - \frac{x_A\beta}{c}\right)$$

$$t'_{B'} = \gamma\left(t_B - \frac{x_B\beta}{c}\right)$$

$$x_A = -\ell$$

$$x_B = \ell$$

$$\Rightarrow \Delta t' = t'_{A'} - t'_{B'} = \gamma \frac{2\ell}{c} \beta$$

όπου

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Άρα

$$\Delta t' = \frac{\ell}{\sqrt{2}\, c}$$

Το $\Delta t'$ που βρήκαμε πρέπει να συγκριθεί με το Δt που βρήκαμε από τα ερωτήματα (α) και (γ) που είναι

$$\Delta t = \frac{3\ell}{2c} - \frac{3\ell}{4c} = \frac{3\ell}{4c} \tag{8.6}$$

Το Δt είναι ο χρόνος όπως μετριέται στο ακίνητο σύστημα S. Για να συγκρίνουμε αυτή τη διαφορά χρόνου με τη μέτρηση $\Delta t'$ που έγινε στο S' όπου η μέτρηση του χρόνου έχει γίνει στην ίδια θέση θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό του Lorentz.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\ell}{\sqrt{2}\, c} = \frac{3\ell}{4c}$$

Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε συμφωνεί με την (8).

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με την περίπτωση ενός ηχητικού παλμού που για ευκολία ας θεωρήσουμε ότι κινείται στην x κατεύθυνση. Από το μετασχηματισμό του Galileo έχουμε για την ταχύτητα του ήχου, v_s, από το A ή το A'

$$v'_{A'} = v_s - V$$

$$v'_{B'} = -v_s - V$$

$$\xrightarrow{V=v_s/3} \begin{cases} v'_{A'} = \dfrac{2}{3} v_s \\[2ex] v'_{B'} = -\dfrac{4}{3} v_s \end{cases}$$

Όπως βλέπουμε οι δύο ταχύτητες δεν είναι ίσες.

(στ)

Επειδή όπως είδαμε στο προηγούμενο σκέλος οι ταχύτητες είναι διαφορετικές, ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο O' περιμένει τους ηχητικούς παλμούς να φτάσουν σε διαφορετικούς χρόνους

$$\Delta t' = \frac{\ell}{2v_s/3} - \frac{\ell}{4v_s/3} = \frac{3\ell}{4v_s}$$

και από αυτό μπορεί να υπολογίσει ότι οι παλμοί έχουν εκπεμφθεί την ίδια χρονική στιγμή.

Στην περίπτωση, όμως, της σχετικότητας και οι δύο ταχύτητες είναι c και ο παρατηρητής στο O' συμπεραίνει ότι οι δύο παλμοί του φωτός δεν εκπέμφθηκαν την ίδια χρονική στιγμή. Όπως βλέπουμε η έννοια του ταυτοχρονισμού είναι σχετική.

Πρόβλημα 8.10 Υποθέτουμε ότι ένα σωματίδιο μάζας m κινείται μονίμως επί κυκλικής τροχιάς ακτίνας R (π.χ. εντός κυκλικού σωλήνα). Υποθέτουμε ότι στο σωματίδιο ασκείται εφαπτομενική δύναμη σταθερού μέτρου F. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση που προσδιορίζει σωστά το μεταβολή της ταχύτητας $u(t)$ με το χρόνο. Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου και την περίοδο της κυκλικής κίνησης μετά πάροδο αρκετού χρόνου.

Λύση:

Από το νόμο του Newton έχουμε

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

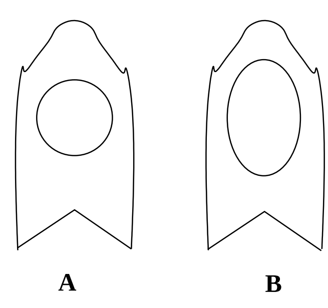
Η ταχύτητα του σωματιδίου μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές για $t \to \infty$ και γι' αυτό πρέπει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την ειδική θεωρία της σχετικότητας

$$\begin{aligned} F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \\ \Rightarrow \quad Ft &= \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \Rightarrow F^2t^2 &= \frac{m^2v^2}{1-v^2/c^2} \\ \Rightarrow F^2t^2 &= v^2\left(m^2 + F^2t^2/c^2\right) \\ \Rightarrow \quad v &= \frac{c}{\sqrt{1+(mc/Ft)^2}} \\ \overset{\text{για } t\to\infty}{\Rightarrow} \quad v &= c \end{aligned}$$

Άρα η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi R}{c}$$

Πρόβλημα 8.11 Τα αστρικά οχήματα της Ομοσπονδίας Α φέρνουν το διακριτικό σύμβολο της ομοσπονδίας, έναν κύκλο, ενώ τα αστρικά οχήματα της Ομοσπονδίας Β φέρουν το σύμβολο της Ομοσπονδίας αυτής, μια έλλειψη της οποίας ο μεγάλος άξονας είναι 1,50 φορές μεγαλύτερος από τον μικρό της άξονα ($a = 1.50\ b$ στο Σχήμα). Με πόση ταχύτητα ως προς κάποιο παρατηρητή πρέπει να ταξιδέψει ένα όχημα της Ομοσπονδίας Β, ώστε να ξεγελάσει τον παρατηρητή αυτόν, ώστε αντί για το σύμβολο του οχήματος αυτού να βλέπει το σχήμα των οχημάτων της Ομοσπονδίας Α;



Λύση:

Το αστρικό όχημα θα πρέπει να πηγαίνει αρκετά γρήγορα ώστε το μήκος a να το βλέπουμε σαν b. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τη σχετικιστική συστολή του μήκους.

$$\Delta L = \frac{\Delta L'}{\gamma}$$

Άρα

$$\frac{1.5b}{\gamma} = b$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{c}^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c}^2 = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$$

Πρόβλημα 8.12 Ουδέτερο π^0 μεσόνιο, μάζας ηρεμίας m και ταχύτητας v ως προς το σύστημα εργαστηρίου, αποσυντίθεται σε δύο φωτόνια σύμφωνα με την αντίδραση

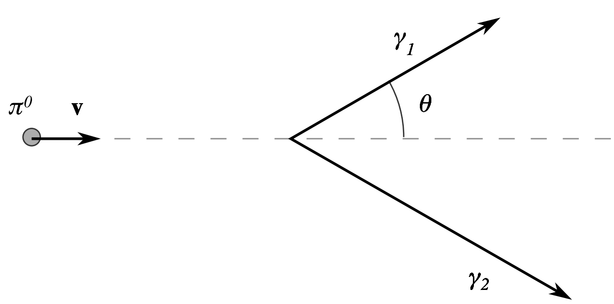
$$\pi^0 \to \gamma_1 + \gamma_2$$

Δείξατε ότι το φωτόνιο γ_1 εκπέμπεται υπό γωνία θ ως προς την κατεύθυνση κίνησης του μεσονίου θα έχει ενέργεια

$$h\frac{\omega}{2\pi} = \frac{mc^2}{2\gamma(1-(v/c)\cos\theta)}$$

Βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη ενέργεια που μπορεί να έχει το φωτόνιο.

Λύση:



Σχήμα 8.2

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$$

ή

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 \tag{8.7}$$

όπου $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}$ είναι η ορμή του μεσονίου π^0, $|\boldsymbol{p}_1| = \hbar\omega_1$ και $|\boldsymbol{p}_2| = \hbar\omega_2$. Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$E = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \tag{8.8}$$

όπου $E = m\gamma$ ($\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$) είναι η ολική ενέργεια του μεσονίου π^0. Παίρνοντας το τετράγωνο της σχέσης (8) και σε συνδυασμό με την σχέση (8) παίρνουμε

$$\hbar\omega_1 = \frac{mc^2}{2\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta)} \tag{8.9}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\gamma^2(1-v^2)=1$. Για να βρούμε την ελάχιστη, $(\hbar\omega_1)_{\min}$ και τη μέγιστη, $(\hbar\omega_1)_{\max}$ ενέργεια πρέπει να διαφορίσουμε τη σχέση (8) ως προς θ. Η ελάχιστη ενέργεια αντιστοιχεί σε $\theta = 180^o$

$$(\hbar\omega_1)_{\min} = \frac{mc^2\sqrt{1-v/c}}{2}$$

και η μέγιστη ενέργεια σε $\theta = 0^o$

$$(\hbar\omega_1)_{\max} = \frac{mc^2\sqrt{1+v/c}}{2}$$

Πρόβλημα 8.13 Ποζιτρόνιο μάζας ηρεμίας m και ενέργειας E προσκρούει σε στάσιμο ηλεκτρόνιο με μάζα ηρεμίας m και εξαφανίζονται οπότε παράγονται δύο φωτόνια

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \gamma_1 + \gamma_2$$

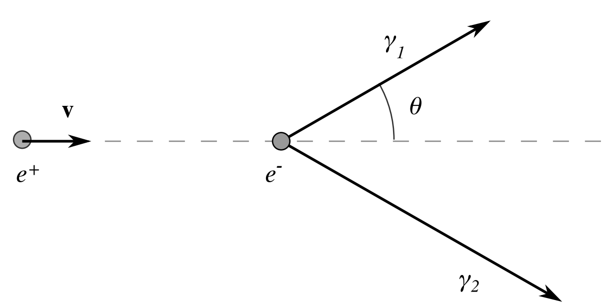
Να δείξετε ότι οι κυκλικές συχνότητες ω_1, ω_2 των εκπεμπόμενων φωτονίων συνδέονται με τη γωνία θ των 3-ορμών τους με τη σχέση

$$mc^2(\omega_1+\omega_2) = h\frac{\omega_1\omega_2}{2\pi}(1-\cos\theta)$$

Να δείξετε επίσης ότι το γινόμενο των ενεργειών των φωτονίων παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $\omega_1 = \omega_2$ και από αυτό βρείτε ότι η ελάχιστη δυνατή τιμή της γωνίας θ είναι

$$\arccos\left(\frac{E-3mc^2}{E+mc^2}\right)$$

Λύση:



Σχήμα 8.3

Όπως φαίνεται στο σχήμα 8.3 η ορμή και η ενέργεια του φωτονίου γ_1 είναι $p_1 = E_1 = \hbar\omega_1$ και η ορμή και ενέργεια του φωτονίου γ_2 είναι $p_2 = E_2 = \hbar\omega_2$. Από τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας έχουμε

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \tag{8.10}$$

Αν πάρουμε το τετράγωνο της σχέσης (8) βρίσκουμε

$$p^2 = (\hbar\omega_1)^2 + (\hbar\omega_2)^2 + 2\hbar^2\omega_1\omega_2\cos\theta \tag{8.11}$$

και

$$c\sqrt{p^2+m^2}+mc^2=\hbar(\omega_1+\omega_2) \tag{8.12}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (8) στην σχέση (8) και παίρνοντας το τετράγωνό της (8) έχουμε

$$c^2m(\omega_1+\omega_2)=\hbar\omega_1\omega_2(1-\cos\theta) \tag{8.13}$$

Από τη σχέση (8), $\omega_1+\omega_2=(E+m)/\hbar$ (το άθροισμα των δύο συχνοτήτων είναι μία σταθερή ποσότητα), όπου E είναι η ολική ενέργεια του ποζιτρονίου. Άρα η ποσότητα $\omega_1\omega_2$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν

$$\omega_1=\omega_2=\omega=(E+m)/2\hbar \tag{8.14}$$

Από τη σχέση (8) και τη σχέση (8) μπορούμε να βρούμε την ελάχιστη γωνία, $\theta_{\min}$

$$2m=\hbar\omega(1-\cos\theta_{\min})$$

ή

$$\cos\theta_{\min}=\frac{E-3m}{E+m}$$

και παίρνοντας το αντίστροφο του $\cos\theta_{\min}$ βρίσκουμε

$$\theta_{\min}=\arccos\left(\frac{E-3m}{E+m}\right)$$

Πρόβλημα 8.14 Φωτόνιο προσκρούει σε ελεύθερο άτομο το οποίο ηρεμεί και έχει μάζα m. Το φωτόνιο απορροφάται με αποτέλεσμα ένα από τα ηλεκτρόνια του ατόμου να πάει σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη κατά ε. Βρείτε την ορμή που θα αποκτήσει το διεργεμένο άτομο και δείξετε ότι η συχνότητα του φωτονίου συνδέεται με την ενέργεια διεγέρσεως με τη σχέση

$$\hbar\omega=\frac{1-\varepsilon/(2mc^2)}{1-\varepsilon/(mc^2)}\varepsilon$$

Λύση:

Η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι $T=E-mc^2$, όπου $E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$ είναι η ολική ενέργεια του ατόμου με ορμή p και μάζα m. Από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε

$$\hbar\omega=T+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \hbar\omega=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}-mc^2+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \hbar\omega+mc^2-\varepsilon=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4} \tag{8.15}$$

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$\hbar\omega=pc \tag{8.16}$$

Λόγω της μηδενικής μάζας του φωτονίου, $\Rightarrow$ ενέργεια φωτονίου = ορμή φωτονίου.
Παίρνοντας το τετράγωνο της σχέσης (8) και αντικαθιστώντας τη σχέση (8) στην (8), βρίσκουμε

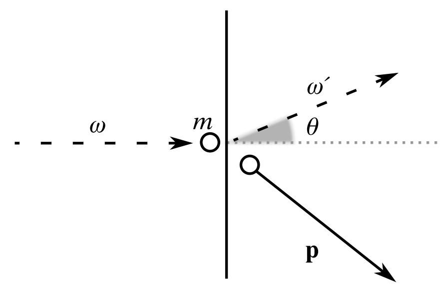
$$\hbar\omega=\frac{1-\varepsilon/2mc^2}{1-\varepsilon/mc^2}\varepsilon$$

Πρόβλημα 8.15 Ένα φωτόνιο ενέργειας $\hbar\omega$ σκεδάζεται σ' ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο μάζας m, σχήμα 8.4. Η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι $\hbar\omega'$ και η ορμή του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου $\boldsymbol{p}$. Αποδείξτε ότι

$$\hbar\omega'=\frac{\hbar\omega}{1+\gamma(1-\cos\theta)}$$

όπου $\gamma=\hbar\omega/mc^2$ και θ είναι η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του εισερχόμενου και του σκεδαζόμενου φωτονίου. Βρείτε τη μέγιστη κινητική ενέργεια του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου $T_{\max}$.

Λύση:



Σχήμα 8.4

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\boldsymbol{p}_\gamma = \boldsymbol{p}'_\gamma + \boldsymbol{p} \tag{8.17}$$

όπου $|p_\gamma| = \hbar\omega$, $|p'_\gamma| = \hbar\omega'$. Η σχέση (8) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\boldsymbol{p}'_\gamma = \boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p} \tag{8.18}$$

Παίρνοντας το τετράγωνο της σχέσης (8) έχουμε

$$p^2 = (\hbar\omega')^2 + (\hbar\omega)^2 - 2\hbar^2\omega\omega'\cos\theta \tag{8.19}$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{8.20}$$

όπου $\hbar\omega + mc^2$ είναι η αρχική ενέργεια του συστήματος φωτονίου, $(\hbar\omega)$, ηλεκτρονίου, mc^2. Η σχέση (8) γράφεται με τον εξής τρόπο

$$\hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega' = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{8.21}$$

Παίρνοντας το τετράγωνο της σχέσης (8) και αντικαθιστώντας τη σχέση (8) στην (8) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \omega - \omega' &= \gamma\omega'(1-\cos\theta) \\ \Rightarrow \omega' &= \frac{\omega}{1+\gamma(1-\cos\theta)} \end{aligned} \tag{8.22}$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου με ορμή p είναι $T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$, και από τη διατήρηση της ενέργειας, (σχέση 8), έχουμε

$$T = \hbar\omega - \hbar\omega'$$

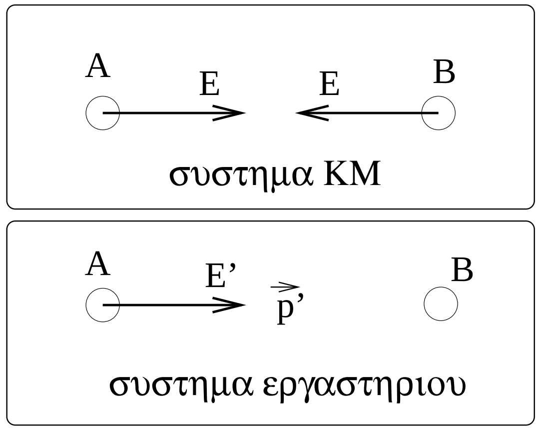
$$\overset{(8)}{\Longrightarrow} \quad T = \frac{\hbar\gamma(1-\cos\theta)}{1+\gamma(1-\cos\theta)}$$

Η μέγιστη κινητική ενέργεια, T_{max}, δίνεται για $\sin\theta = 0 \Rightarrow \ \theta = 180^o$ και η τιμή της είναι

$$T_{\text{max}} = \hbar\left(\frac{2\gamma\omega}{1+2\gamma}\right)$$

Πρόβλημα 8.16 Δύο όμοια σωματίδια μάζας m και κινητικής ενέργειας T, συγκρούονται όπως φαίνεται στο σχήμα 8.5. Ποιά είναι η σχετική τους κινητική ενέργεια, T'. (Σχετική κινητική ενέργεια = κινητική ενέργεια του ενός στο σύστημα που το άλλο είναι ακίνητο).

Λύση:



Σχήμα 8.5

Όπως φαίνεται στο σχήμα 8.5 η συνολική 4-ορμή στο σύστημα του κέντρου μάζας, (ΚΜ), και στο σύστημα του εργαστηρίου είναι

$$p^{\mu}_{tot} = \left(\frac{2E}{c}, \mathbf{0}\right)$$

$$p^{\mu'}_{tot} = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, \boldsymbol{p}'\right)$$

όπου E', $\boldsymbol{p}'$ είναι η σχετική ενέργεια και ορμή του σωματιδίου A ως προς το σωματίδιο B. Επειδή $(p_{tot})^2 = (p'_{tot})^2$ βρίσκουμε

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E' + mc^2}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}'^2$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση $E'^2 = \boldsymbol{p}'^2c^2 + m^2c^4$ παίρνουμε

$$2E^2 = mc^2(E' + mc^2) \tag{8.23}$$

Επειδή η κινητική ενέργεια είναι $T = E - mc^2$ και $T' = E' - mc^2$ η σχέση (8) γίνεται

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right)$$

Για παράδειγμα δύο συγκρουόμενα ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια στο σύστημα του εργαστηρίου 1 GeV έχουν σχετική κινητική ενέργεια 4000 GeV.

Πρόβλημα 8.17 Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την αντίδραση

$$\gamma + p \to p + \pi$$

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι E είναι η ενέργεια κατωφλίου για το φωτόνιο ώστε να παράγει ένα πρωτόνιο και ένα πιόνιο που είναι ακίνητα στο σύστημα του κέντρου μάζας KM. Το συνολικό 4-διάνυσμα, p^{μ}_{tot}, του φωτονίου πριν την αλληλεπίδρασή του με το πρωτόνιο είναι

$$p^{\mu}_{tot} = (E, E) + (m_p, 0) = (E + m_p, E)$$

όπου $E =$ ορμή για το φωτόνιο. Στο σύστημα του κέντρου μάζας το συνολικό 4-διάνυσμα μετά την αλληλεπίδραση είναι

$$p_{tot}^{'\mu} = (m_p, 0) + (m_\pi, 0) = (m_p + m_\pi, 0)$$

εφόσον τα παραγόμενα p και π είναι ακίνητα στο σύστημα του κέντρου μάζας. Λόγω της αμεταβλητότητας του 4-διανύσματος έχουμε

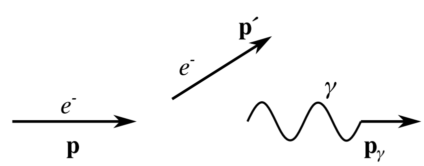
$$|p_{tot}^{\mu}|^2 = |p_{tot}^{'\mu}|^2$$
$$\Rightarrow (E + m_p)^2 - E^2 = (m_p + m_\pi)^2$$
$$\Rightarrow E = \frac{m_\pi^2 + 2m_p m_\pi}{2m_p} = 200\,\text{MeV}$$

Πρόβλημα 8.18 Αποδείξτε ότι η αλληλεπίδραση

$$e \to e + \gamma$$

δεν είναι επιτρεπτή λόγω της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής.

Λύση:



Σχήμα 8.6

Ας θεωρήσουμε ότι $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ και $\boldsymbol{p}_\gamma$ είναι η ορμή του αρχικού ηλεκτρονίου, του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου και του φωτονίου, αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα 8.6. Από την αρχή διατήρησης της ορμής και της ενέργειας έχουμε

$$p = p' + p_\gamma \tag{8.24}$$

$$E = E' + E_\gamma \quad \Rightarrow \sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{p'^2 + m^2} + p_\gamma \tag{8.25}$$

όπου $E_\gamma = p_\gamma$ λόγω της μηδενικής μάζας του φωτονίου. E, E' είναι η ενέργεια του αρχικού και του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου, αντίστοιχα.
Οι εξισώσεις (8) και (8) γράφονται

$$p - p' = E - E'$$
$$\Rightarrow EE' = m^2 + pp'$$
$$\Rightarrow (EE')^2 = (m^2 + pp')^2$$
$$\Rightarrow p^{'2} - pp' + p^2 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta = -3p^2 < 0$ άρα $p^{'2} - pp' + p^2 > 0$ και γι' αυτό το λόγο δεν υπάρχει πραγματική λύση για την ορμή του αρχικού ηλεκτρονίου p.

Πρόβλημα 8.19 Ένα σωματίδιο αδρανειακής μάζας m, κινείται υπό την επιρροή της δύναμης $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ που είναι συνάρτηση της θέσης, $\boldsymbol{x}$, του σωματιδίου και της ταχύτητάς του, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$). Αποδείξτε ότι η επιτάχυνση του σωματιδίου, $\ddot{\boldsymbol{x}}$, δίνεται από τη σχέση

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\gamma^{-1}}{m}[\boldsymbol{F} - (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{F})\dot{\boldsymbol{x}}]$$

όπου $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)$. Ελέγξτε τη σχέση για την περίπτωση της μη-σχετικιστικής κίνησης, $(\dot{x} \to 0)$, και για την περίπτωση της υπέρ-σχετικιστικής κίνησης, $(\dot{x} \to c)$. Γράψτε το αποτέλεσμα για την περίπτωση που ένα σωματίδιο φορτίου q κινείται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ και ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$.

Λύση:

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας η εξίσωση κίνησης ενός σώματος μάζας m που κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\boldsymbol{F}$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma\dot{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{G} \tag{8.26}$$

όπου $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}/m$ που εξαρτάται από τη θέση και την ταχύτητα του σώματος. Ας σημειωθεί ότι $d\gamma/\mathrm{d}t = \gamma^3(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}})$, άρα η σχέση (8) γράφεται

$$\gamma^3(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}) + \gamma\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G} \tag{8.27}$$

Παίρνοντας το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο του $\dot{\boldsymbol{x}}$ με τη σχέση (8) και χρησιμοποιώντας την έκφραση για το $\dot{\boldsymbol{x}}^2$ από τον ορισμό του γ, καταλήγουμε στο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \gamma^3(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}) &= \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{G} \\ \gamma(\dot{\boldsymbol{x}} \times \ddot{\boldsymbol{x}}) &= \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{G} \end{aligned} \tag{8.28}$$

Παίρνοντας το γινόμενο και το εξωτερικό γινόμενο $\dot{\boldsymbol{x}}$ με τις σχέσεις (8), αντίστοιχα, και θεωρώντας ότι η ταχύτητα του σωματιδίου $\dot{\boldsymbol{x}} \neq c$, οι σχέσεις (8) γίνονται

$$\begin{aligned} (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}})\dot{\boldsymbol{x}} &= \gamma^{-3}(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{x}} \\ \gamma(\dot{\boldsymbol{x}} \times \ddot{\boldsymbol{x}}) \times \dot{\boldsymbol{x}} &= \gamma^{-1}(\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{G}) \times \dot{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{8.29}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (8), θεωρώντας ότι $\dot{\boldsymbol{x}} \neq 0$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση (11.5) βρίσκουμε:

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\gamma^{-3}}{\dot{\boldsymbol{x}}^2}(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\gamma^{-1}}{\dot{\boldsymbol{x}}^2}(\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{G}) \times \dot{\boldsymbol{x}}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (11.5), παίρνουμε

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \gamma^{-1}\left[\boldsymbol{G} - (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{x}}\right] \tag{8.30}$$

Στη μη-σχετικιστική κίνηση, $(\dot{\boldsymbol{x}}^2 \to 0)$, η σχέση (8) γίνεται $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{G}$. Στην υπέρ-σχετικιστική κίνηση, $(\dot{\boldsymbol{x}}^2 \to c^2)$, η σχέση (8) γίνεται $\ddot{\boldsymbol{x}} = 0$ ή $\dot{\boldsymbol{x}} =$ σταθερά.

Για ένα σώμα με φορτίο q που κινείται σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ και ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ η δύναμη Lorentz δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$, όπου $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ είναι η ταχύτητα του σώματος. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (8) η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{q}{m\gamma}\left[\boldsymbol{E} - (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{E})\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B}\right]$$

Πρόβλημα 8.20 Βρείτε τις εξισώσεις του Lorentz για το μετασχηματισμό μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς (S και S') με παράλληλους άξονες που κινούνται το ένα ως προς το άλλο με σχετική ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ σε τυχαία διεύθυνση.
(α) Να αποδείξετε ότι

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} + (\gamma - 1)\frac{1}{v^2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}) - \gamma\boldsymbol{v}t$$

$$t' = \gamma(t - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, και c η ταχύτητα του φωτός.
(β) Τρία σημεία, a, b, c, είναι σταθερά στο σύστημα αναφοράς S και η γραμμή ab είναι κάθετη στη γραμμή ac. Βρείτε τη συνθήκη ώστε γραμμές όπως οι ab και ac να είναι κάθετες στο σύστημα S'.

Λύση:

(α)

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς του Lorentz, η συνιστώσα ενός διανύσματος που είναι κάθετη στην κατεύθυνση της κίνησης παραμένει αμετάβλητη ενώ η συνιστώσα που είναι παράλληλη με την κατεύθυνση της κίνησης δεν είναι. Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$. Αυτό μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη, $\boldsymbol{x}_t$), και μία παράλληλη στην κίνηση, ($\boldsymbol{x}_l$). Δηλαδή $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_l + \boldsymbol{x}_t$. Το ίδιο μπορεί να γίνει για ένα διάνυσμα $\boldsymbol{x'}$ στο σύστημα S', άρα $\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x}'_l + \boldsymbol{x}'_t$. Ο μετασχηματισμός του Lorentz είναι

$$\boldsymbol{x}'_t = \boldsymbol{x}_t \tag{8.31}$$

$$\boldsymbol{x}'_l = \gamma(\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{v}_t) \tag{8.32}$$

και

$$t' = \gamma(t - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}_l) \tag{8.33}$$

Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_l$ και $\boldsymbol{x}_l = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}/v)\boldsymbol{v}/v = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}/v^2$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (8), (8) και (8) βρίσκουμε

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} + (\gamma - 1)\frac{1}{v^2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}) - \gamma\boldsymbol{v}t \tag{8.34}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{8.35}$$

(β) Παρατηρούμε ότι

$$(\boldsymbol{x}'_b - \boldsymbol{x}'_a)\cdot(\boldsymbol{x}'_c - \boldsymbol{x}'_a) = \frac{2(\gamma-1)}{v^2}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{x}_a)\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}_a) \tag{8.36}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $(\boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{x}_a)\cdot(\boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}_a) = 0$ επειδή οι γραμμές ab και ac είναι κάθετες στο σύστημα S. Επιπλέον, $\boldsymbol{x}_a$, $\boldsymbol{x}_b$, και $\boldsymbol{x}_c$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων a, b και c στο σύστημα S. Επίσης, $\boldsymbol{x}'_a$, $\boldsymbol{x}'_b$, και $\boldsymbol{x}'_c$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων a, b και c στο σύστημα S'. Για να είναι οι γραμμές ab και ac κάθετες στο σύστημα S' πρέπει να ισχύει

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{x}_a) = 0$$

ή

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}_a) = 0$$

όπως είναι εμφανές από τη σχέση (8).

Πρόβλημα 8.21 Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του προβλήματος (8.20) και βρείτε το μετασχηματισμό των ταχυτήτων $\boldsymbol{u}$, και $\boldsymbol{u'}$ ενός σώματος στο σύστημα S και S', όπου

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{u'} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x'}}{\mathrm{d}t'}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{u'} = \mathrm{d}\boldsymbol{x'}/\mathrm{d}t' = (\mathrm{d}\boldsymbol{x'}/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\mathrm{d}t')$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (8) βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x'}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} + (\gamma - 1)\frac{1}{v^2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}) - \gamma\boldsymbol{v} \tag{8.37}$$

όπου $\gamma = 1\sqrt{1-(v/c)^2}$ και $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα που το σύστημα S' κινείται σε σχέση με το S. Επίσης χρησιμοποιώντας τη σχέση (8) έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(1 - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\right) \tag{8.38}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8) και (8) παίρνουμε το μετασχηματισμό της ταχύτητας

$$\boldsymbol{u'} = \frac{\boldsymbol{u} + (\gamma-1)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})/v^2 - \gamma\boldsymbol{v}}{\gamma(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}/c^2)}$$

Πρόβλημα 8.22 Είναι γνωστό ότι τα σωματίδια των κοσμικών ακτίνων έχουν ενέργειες έως 10^{19} eV και ίσως μεγαλύτερες.
(α) Πόση είναι η φαινόμενη μάζα ενός τέτοιου σωματιδίου (προσεγγιστικά);
(β) Πόση είναι η ορμή του (προσεγγιστικά);

Λύση:

(α)

Από τη σχέση της ενέργειας έχουμε

$$E = Mc^2 = 10^{19}\ \text{eV} = 10^{19}\cdot 1,610^{-12}\,\text{ergs} = 1,610^{7}\ \text{ergs}$$

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{1,610^7}{910^{20}} = 1,810^{-14}\ \text{gr}$$

(β) Για την ορμή έχουμε

$$p = Mc = \frac{E}{c} = 1,8\cdot 10^{-14}\cdot 3\cdot 10^{10} = 5,410^{-4}\ \text{gr cm/s}$$

Πρόβλημα 8.23 Ένα ηλεκτρόνιο έχει $\beta = 0,99$. Ποια είναι η κινητική του ενέργεια ;

Λύση:

Η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$K.E. = m\gamma c^2 - mc^2$$

όπου m είναι η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου. Άρα έχουμε

$$K.E. = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-0,99^2}} - 1\right) = 6,07\ mc^2 = 6,07\ 0,511 = 3,1\ \text{MeV}$$

Πρόβλημα 8.24 Ας θεωρήσουμε μια ακτίνα γ με ενέργεια E , που κατευθύνεται προς ένα πρωτόνιο ακίνητο στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.
(α) Πόση είναι η ορμή της ακτίνας γ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου;
(β) Να δείξετε ότι η ταχύτητα V του κέντρου μάζας πρωτονίου και ακτίνας γ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{V}{c} = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_p c^2}$$

όπου M_p η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου.
(γ) Πόση είναι η ενέργεια της ακτίνας γ και η ενέργεια του πρωτονίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας των;

Λύση:

(α)

Η ορμή δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{E_\gamma}{c}$$

(β) και (γ)

Για να βρούμε την ταχύτητα V του κέντρου μάζας πρέπει να βρούμε το β ενός συστήματος συντεταγμένων στο οποίο η ορμή του πρωτονίου και του φωτονίου είναι ίσες και αντίθετες. Έστω ότι το $\beta = V/c$. Το πρωτόνιο θα κινείται με ταχύτητα V και η ενέργεια του φωτονίου θα μετατοπιστεί λόγω του φαινομένου Doppler.

$$E'_\gamma = E_\gamma \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \text{και} \qquad p'_\gamma = \frac{E'_\gamma}{c} \tag{8.39}$$

Άρα από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$\frac{M_p \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_p \beta c}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{E'_\gamma}{c} = \frac{E'_\gamma}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\Rightarrow M_p \beta c = \frac{E_\gamma}{c}(1-\beta)$$

$$\Rightarrow \beta(M_p c^2 + E_\gamma) = E_\gamma$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{V}{c} = \frac{E_\gamma}{(M_p c^2 + E_\gamma)} \tag{8.40}$$

Αντικαθιστώντας την (8) στην (8)

$$E'_\gamma = E_\gamma \sqrt{\frac{1 - E_\gamma/(M_p c^2 + E_\gamma)}{1 + E_\gamma/(M_p c^2 + E_\gamma)}} = E_\gamma \sqrt{\frac{M_p c^2}{2E_\gamma + M_p c^2}}$$

Παρατηρούμε ότι $E'_\gamma < E_\gamma$ όπως αναμενόταν. Για την ενέργεια του πρωτονίου έχουμε

$$E'_p = \frac{M_p c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_p c^2}{\sqrt{1 - E_\gamma^2/(M_p c^2 + E_\gamma)^2}} = \frac{M_p c^2 (E_\gamma + M_p c^2)}{\sqrt{2E_\gamma M_p c^2 + M_p^2 c^4}}$$

$$\Rightarrow E'_p = \frac{E_\gamma + M_p c^2}{\sqrt{2E_\gamma / M_p c^2 + 1}}$$

Πρόβλημα 8.25 Έστω ότι η ολική ορμή και η ολική ενέργεια ενός συστήματος δύο σωματιδίων είναι $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ και $E = E_1 + E_2$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός του Lorentz για τα μεγέθη $\boldsymbol{p}$ και E είναι συμβιβαστός με το γεγονός ότι η ποσότητα $E^2 - p^2c^2$ παραμένει αναλλοίωτη.

Λύση:

Ο μετασχηματισμός της ορμής και της ενέργειας δίνεται από τις σχέσεις

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right)$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

$$E' = \gamma(E - p_x c\beta)$$

Επίσης ισχύει $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$.
Τότε έχουμε

$$E'^2 - p'^2c^2 = \gamma^2(E - p_x c\beta)^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 - c^2\gamma^2\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow E'^2 - p'^2c^2 = \gamma^2[E^2 - 2Ep_xc\beta + p_x^2c^2\beta^2 - p_x^2c^2 + 2p_x\beta Ec - \beta^2E^2] - p_y^2c^2 - p_z^2c^2$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\Rightarrow E'^2 - p'^2c^2 = \frac{1}{1-\beta^2}[E^2(1-\beta^2) - p_x^2c^2(1-\beta^2)] - p_y^2c^2 - p_z^2c^2$$

$$\Rightarrow E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2$$

Πρόβλημα 8.26 Δύο πρωτόνια κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, ξεκινώντας από ένα κοινό σημείο, με ταχύτητες των οποίων το μέτρο είναι $\beta = 0.5$.
(α) Υπολογίστε την ενέργεια και την ορμή ενός από τα πρωτόνια ως προς το κοινό σημείο.
(β) Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του Lorentz, να υπολογίσετε την ενέργεια και την ορμή ενός από τα πρωτόνια ως προς το σύστημα ηρεμίας του άλλου πρωτονίου. (Υπόδειξη: *Σε προβλήματα αυτού του είδους, είναι συνήθως σκόπιμο να εκφράζουμε την ενέργεια ως πολλαπλάσιο της ενέργειας κάποιας μάζας ηρεμίας*).

Λύση:

(α) Η ενέργεια του κάθε πρωτονίου είναι

$$E = M_p\gamma c^2 = \frac{M_pc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}M_pc^2 = 1,083\,\mathrm{GeV}$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε ότι η μάζα του πρωτονίου είναι $M_pc^2 = 0,938\,\mathrm{GeV}$. Η κινητική ενέργεια του κάθε πρωτονίου είναι

$$K.E. = E - M_pc^2 = 1,083 - 0,938 = 0,145\,\mathrm{GeV}$$

και η ορμή του

$$p = M_p\beta\gamma c = \frac{M_p\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}M_p\beta c = 0,542\,\mathrm{GeV/c}$$

(β) Τώρα θα μεταφερθούμε σε ένα σύστημα συντεταγμένων που κινείται με $\beta = 0.5$. Σ' αυτό το σύστημα το ένα από τα πρωτόνια είναι ακίνητο. Άρα έχουμε

$$p'_x = \gamma\left(p_x + \frac{\beta E}{c}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{M_pc}{\sqrt{3}} + \frac{0,5\cdot 2\cdot M_pc}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4M_pc}{3} = 1,251\,\mathrm{GeV/c}$$

$$E' = \gamma(E+\beta p_x c) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}M_p c^2 + \frac{0,5M_p c^2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}M_p c^2 = 1,563\,\text{GeV}$$

Παρατηρήστε ότι

$$E'^2 - p'^2c^2 = \frac{25}{9}M_p^2c^4 - \frac{16}{9}M_p^2c^4 = M_p^2c^4$$

και

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{4}{3}M_p^2c^4 - \frac{1}{3}M_p^2c^4 = M_p^2c^4$$

όπως περιμέναμε από τον ορισμό της αμετάβλητης μάζας.

Πρόβλημα 8.27 Μια μεγάλη συσκευή laser μπορεί να παραγάγει ένα παλμό φωτός που έχει ενέργεια 2000 J.
(α) Να δείξετε ότι η ορμή του παλμού αυτού είναι της τάξης του 10^{-5} kg· m/s.
(β) Να εξετάσετε πώς θα μπορούσε να ανιχνευτεί αυτή η ορμή. Η διάρκεια ενός παλμού μπορεί να είναι $1ms$ $(10^{-3}s)$.

Λύση:

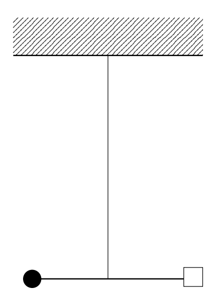
(α)

Η ορμή του φωτονίου δίνεται από τη σχέση

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2\cdot 10^3}{3\cdot 10^8} = \frac{2}{3}10^{-5}\,\text{kg m/s}$$

(β)

Αυτή η ορμή θα μπορούσε να ανιχνευθεί με ένα ζυγό στρέψης όπως αυτός που φαίνεται στο σχήμα. Αντί να μετρήσουμε τη δύναμη θα μετρήσουμε την ώθηση $\int F\mathrm{d}t$. Η δέσμη του laser θα ανακλασθεί από τον καθρέφτη και για ένα μικρό χρονικό διάνυσμα ($\sim\ 10^{-3}$ s) θα ασκήσει δύναμη πάνω στον καθρέφτη.Αυτή η δύναμη προκαλεί την κίνηση του καθρέφτη με κάποια ορμή η οποία με τη σειρά της έχει στροφορμή ως προς το νήμα χαλαζία που αποτελεί τον άξονα στροφής. Τότε έχουμε γωνιακή κίνηση και γωνιακές ταλαντώσεις που μπορούμε να τις ανιχνεύσουμε έχοντας ένα άλλο καθρέφτη πάνω στο νήμα του χαλαζία.



Αν I είναι η ροπή αδρανείας του συστήματος καθρέφτης-βάρος και θ είναι η γωνία που στρέφεται το σύστημα ισχύει

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa\theta$$

όπου κ είναι μία σταθερά που είναι χαρακτηριστική του νήματος. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{I}} + \phi\right)$$

και θεωρώντας $\theta = 0$ για $t = 0 \Rightarrow \phi = 0$, άρα

$$I\sqrt{\frac{\kappa}{I}}\theta_0 = \int N\mathrm{d}t = R\int Fdt$$

όπου R είναι η απόσταση του σημείου πάνω στο οποίο κτυπά το laser και του άξονα περιστροφής. Αλλά $\int F dt =$ τη μεταβολή της ορμής του παλμού του laser $= 2p \approx 2gr\ cm/s$. (Εδώ υποθέτουμε ότι σε $1\ ms$ η απόκλιση είναι πολύ μικρή. $10^{-3} \ll 2\pi/(\sqrt{\kappa/I})$. Άρα έχουμε

$$I\sqrt{\frac{\kappa}{I}}\theta_0 \approx R2p$$

$$\Rightarrow \quad \theta_0 \approx \frac{2pR}{\sqrt{\kappa I}}$$

Η ροπή αδρανείας είναι $I = 2MR^2$, όπου M η μάζα του καθρέφτη.

$$\Rightarrow \theta_0 \approx \frac{2p}{\sqrt{\kappa 2M}} \approx \frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{\kappa M}}$$

Αν για παράδειγμα $M = 100$ gr και $\kappa = 100$ dyn cm/rad τότε

$$\theta_0 \approx \frac{1,4}{\sqrt{10^4}} = 0,014 \text{ rad} \approx 0,8^o$$

Μία γωνία της τάξεως της μίας μοίρας είναι εύκολο να μετρηθεί.

Πρόβλημα 8.28 Η εσωτερική ενέργεια ενός σώματος μάζας M_0 αυξάνεται με την θερμοκρασία ως εξής

$$E = E_0 + aT\ , \qquad a = \text{θετική σταθερά}$$

Δώστε έναν τύπο για τη μάζα αδράνειας του σώματος όταν κινείται με χαμηλές ταχύτητες ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Λύση:

Καθώς αυξάνει η θερμοκρασία του σώματος αυξάνει και η ενέργειά του. Λόγω της ισοδυναμίας μάζας ενέργειας έχουμε

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{E_0 + \alpha T}{c^2} = M_0 + \frac{\alpha T}{c^2}$$

Πρόβλημα 8.29 Σχετικιστικό φορτισμένο σωματίδιο μάζας ηρεμίας m και φορτίου q, κινείται σε ομογενές στατικό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Βρείτε την ταχύτητα $\boldsymbol{v}(t)$ και τη θέση $\boldsymbol{x}(t)$ του σωματιδίου αυτού, υποθέτοντας ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$ και $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ τη στιγμή $t = 0$.

Λύση:

Θεωρώντας ότι για την ταχύτητα του φωτός ισχύει $c = 1$, η εξίσωση ενός σχετικιστικού σωματιδίου με μάζα m και φορτίο q σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B δίνεται από

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.1}$$

όπου $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}$ είναι η διανυσματική ταχύτητα και ορμή αντίστοιχα, που σχετίζονται μέσω της εξίσωσης

$$\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} = E\boldsymbol{v} \tag{8.2}$$

όπου $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου και $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ ο παράγοντας Lorentz. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8) και (8) προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}t} = 0$$

ή η ορμή p είναι διατηρούμενη ποσότητα.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση, η εξίσωση της κίνησης (8) μετατρέπεται σε

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \tag{8.3}$$

όπου $\boldsymbol{\omega} = (q/E)\boldsymbol{B}$ είναι η συχνότητα Larmor. Παρατηρήστε ότι η παραπάνω εξίσωση (8) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\hat{L}\boldsymbol{v} \tag{8.4}$$

όπου $\hat{L}$ είναι ένας σταθερός τελεστής που δίνεται από την προηγούμενη εξίσωση. Είναι φανερό ότι ο τελεστής αυτός είναι γραμμικός. Δηλαδή, $\hat{L}(a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2) = a_1\hat{\boldsymbol{v}}_1 + a_2\hat{\boldsymbol{v}}_2$.
Η λύση της εξίσωσης (8) υπό τη δεδομένη αρχική συνθήκη δίνεται από

$$\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{e}^{-t\hat{L}}\boldsymbol{v}_0$$

Αν αναπτύξετε την εκθετική συνάρτηση σε σειρά Taylor μπορείτε να παρατηρήσετε ότι

$$\boldsymbol{v}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}\hat{L}^n\boldsymbol{v}_0 \tag{8.5}$$

Ας υπολογίσουμε τους όρους $\hat{L}^n\boldsymbol{v}_0$: $\hat{L}^0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0$, $\hat{L}^1\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0$, $\hat{L}^2\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}_0)\omega - \omega^2\boldsymbol{v}_0$, $\hat{L}^3\boldsymbol{v}_0 = -\omega^2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0$.
Υπολογίζοντας τις ανώτερες δυνάμεις του $\hat{L}$ μπορείτε να παρατηρήσετε ότι οι άρτιες δυνάμεις του $\hat{L}$ μπορούν να γραφούν ως

$$\hat{L}^{2k+1}\boldsymbol{v}_0 = (-\omega^2)^k\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0$$

ενώ οι περιττές δυνάμεις γράφοντας ως

$$\hat{L}^{2k}\boldsymbol{v}_0 = (-\omega^2)^{k-1}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)$$

Επομένως η ταχύτητα, $\boldsymbol{v}(t)$, από την εξίσωση (8) μπορεί να γραφεί ως:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \sum_{even} \frac{(-t)^{2k}}{(2k)!}\hat{L}^{2k}\boldsymbol{v}_0 + \sum_{odd} \frac{(-t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\hat{L}^{2k+1}\boldsymbol{v}_0$$

ή

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k}(-\omega^2)^{k-1}}{(2k)!}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k+1}(-\omega^2)^k}{(2k+1)!}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)$$

ή

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega t)^{2k}}{(2k)!}\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) - \frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)$$

Παρατηρήστε ότι το πρώτο και δεύτερο άθροισμα στην προηγούμενη έκφραση είναι $\cos(\omega t) - 1$ και $\sin(\omega t)$ αντίστοιχα. Τελικά η ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{\omega^2}\Big[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)\Big](\cos(\omega t) - 1) - \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)\sin(\omega t) \tag{8.6}$$

Για να βρούμε τη θέση του σωματιδίου, $\boldsymbol{x}(t)$, ολοκληρώνουμε την εξίσωση (8) ως προς το χρόνο, που οδηγεί στη σχέση

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 t - \frac{1}{\omega^3}\Big[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)\Big](\sin(\omega t) - \omega t) + \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0)\Big[\cos(\omega t) - 1\Big]$$

Πρόβλημα 8.30 Σχετικιστικό σωματίδιο μάζας ηρεμίας m , κινείται υπό την επίδραση δύναμης $\boldsymbol{F}$.
(α) Να αποδείξετε ότι το έργο $\mathrm{d}W$ το οποίο παράγεται από τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ που δρα σε διαδρομή $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}(m\gamma)$$

όπου η σχετικιστική ενέργεια είναι $E = m\gamma$. Θεωρήστε για την ταχύτητα του φωτός ότι $c = 1$.
(β) Επιπλέον, να αποδείξετε ότι

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2\gamma^2}{\gamma+1}\right) \tag{8.7}$$

που μας δίνει μια έκφραση για τη σχετικιστική κινητική ενέργεια $T = mv^2\gamma^2/(\gamma+1)$.

Λύση:

(α) Το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ σε ένα σχετικιστικό σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m δίνεται από

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}(m\gamma\boldsymbol{v}) \tag{8.8}$$

όπου $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}$ είναι η σχετικιστική διανυσματική ταχύτητα και ορμή του σωματιδίου αντίστοιχα. Ακόμα, έγινε χρήση του δεύτερου νόμου του Newton ($\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$) και του ορισμού της διανυσματικής ταχύτητας ($\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$).
Διαφορίζοντας τον παράγοντα Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, αφού τον εκφράσουμε ως $\gamma^2 - (\gamma v)^2 = 1$, παίρνουμε

$$2\gamma\mathrm{d}\gamma = 2\gamma\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}(\gamma\boldsymbol{v}) \tag{8.9}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση (8) με το $m/2\gamma$ προκύπτει

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}(m\gamma\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}(m\gamma) \tag{8.10}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (8) και (8) παίρνουμε

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}(m\gamma)$$

(β) Ο παράγοντας Lorentz γ μπορεί να γραφεί ως $\gamma^2 - 1 = v^2\gamma^2$ ή

$$\gamma = 1 + v^2\frac{{}^2\gamma^2}{\gamma+1}$$

και η σχετικιστική ενέργεια του σωματιδίου είναι

$$E = m\gamma = m + \frac{mv^2\gamma^2}{\gamma+1} \tag{8.11}$$

Διαφορίζοντας την εξίσωση (8) παίρνουμε την έκφραση της εξίσωσης (8.30). Δηλαδή

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}(m\gamma) = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2\gamma^2}{\gamma+1}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{p^2}{m(\gamma+1)}\right)$$

Σημειώστε ότι στην περίπτωση χαμηλής ενέργειας όπου, $\gamma \to 1$ $v \to 0$, η παραπάνω έκφραση γράφεται ως

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}(m\gamma) = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{p^2}{2m}\right)$$

που είναι σύμφωνη με το μη-σχετικιστικό όριο.

Πρόβλημα 8.31 Θεωρήστε τρία γεγονότα (E_1 E_2, E_3), στο χώρο Minkowski $(t, \boldsymbol{x})$ όπου $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ τα οποία ορίζονται από τις συντεταγμένες $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$, $(t_2, \boldsymbol{x}_2)$, $(t_3, \boldsymbol{x}_3)$. Υποθέστε ότι η απόσταση ανάμεσα τους είναι μια χρονική απόσταση. Δηλαδή, $S_{12}^2 \geq 0$, $S_{13}^2 \geq 0$, $S_{23}^2 \geq 0$, όπου S_{ij}^2 είναι η απόσταση στο χώρο Minkowski

$$S_{ij} = (t_i - t_j)^2 - (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)^2 \tag{8.12}$$

$\forall\, i, j = 1, 2, 3$.
Να αποδείξετε την ακόλουθη τριγωνική ανισότητα

$$S_{12} \geq S_{13} + S_{23}$$

Σημειώστε ότι η ευθεία γραμμή δεν είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο χώρο Minkowski, αντίθετα με τον Ευκλείδειο χώρο.

Λύση:

Η απόσταση μεταξύ των E_1 και E_2 δίνεται από την εξίσωση (8.31)

$$S_{12} = (t_1 - t_2)^2 - (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2 = [(t_1 - t_3) - (t_2 - t_3)]^2 - [(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3) - (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3)]^2 \tag{8.13}$$

Η παραπάνω εξίσωση (8) μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} S_{12} = S_{13} + S_{23} + 2[(t_3 - t_1)(t_2 - t_3) - \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{X}_2] = \\ (S_{13} + S_{23})^2 + 2[(t_3 - t_1)(t_2 - t_3) - \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{X}_2 - S_{13}S_{23}], \end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$, και $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3$. Σημειώστε ότι

$$\begin{aligned} [(t_3 - t_1)(t_2 - t_3) - \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{X}_2] \geq [(t_3 - t_1)(t_2 - t_3) - X_1 X_2] \geq \\ \sqrt{[(t_3 t_1)^2 - X_1^2)][(t_2 - t_3)^2 - X_2^2]} = S_{13}S_{23}, \end{aligned} \tag{8.14}$$

εφόσον $\boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{X}_2 \leq X_1 X_2$, $X_1 \leq (t_3 - t_1)$, $X_2 \leq (t_2 - t_3)$ και

$$X_1^2 (t_2 - t_3)^2 + X_2^2 (t_3 - t_1)^2 \geq 2(t_2 - t_3)(t_3 - t_1) X_1 X_2 \geq 0$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση (8) με την (8) παίρνουμε

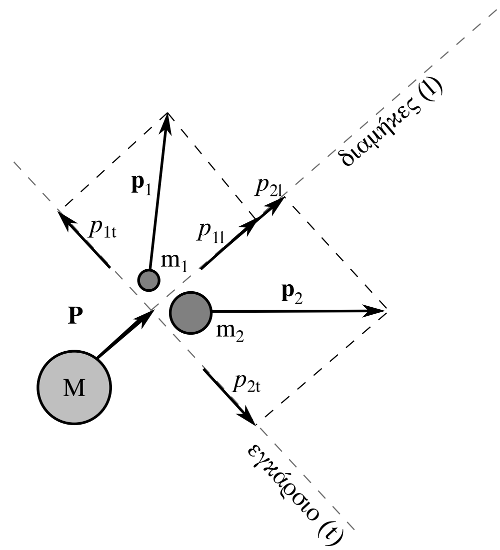
$$S_{12}^2 \geq (S_{13} + S_{23})^2$$

ή $S_{12} \geq S_{13} + S_{23}$.

Πρόβλημα 8.32 Σωματίδιο μάζας M και ορμής $\boldsymbol{p}$ διασπάται κατά τη διαδρομή του σε δύο σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 και ορμές $\boldsymbol{p}_1$ και $\boldsymbol{p}_2$ αντίστοιχα (διάσπαση δύο σωμάτων $M \to m_1 m_2$). Ας αναλύσουμε την ορμή $\boldsymbol{p}_1$ σε δύο συνιστώσες, $\boldsymbol{p}_{1l}$ (διαμήκης στην ορμή $\boldsymbol{p}$) και $\boldsymbol{p}_{1t}$ (εγκάρσια στην $\boldsymbol{p}$). Το ίδιο μπορεί να γίνει για το σωματίδιο με ορμή $\boldsymbol{p}_2$. Εύκολα φαίνεται από το σχήμα 8.7, $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_{1l} + \boldsymbol{p}_{1t}$ και $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_{2l} + \boldsymbol{p}_{2t}$. Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε δύο παραμέτρους α και p_t που μπορούν να περιγράψουν την παραπάνω διάσπαση, δηλαδή

$$\alpha = \frac{p_{1l} - p_{2l}}{p} \tag{8.15}$$

και $p_t = p_{1t}$, όπου $p_{1l} = |\boldsymbol{p}_{1l}|$, $p_{2l} = |\boldsymbol{p}_{2l}|$, $p = |\boldsymbol{p}|$ και $p_{1t} = |\boldsymbol{p}_{1t}|$.
(α) Να αποδείξετε ότι $p_t = p_{2t}$ όπου $p_{2t} = |\boldsymbol{p}_{2t}|$.
(β) Βρείτε μια σχέση $p_t = F(M, m_1, m_2, \alpha, p)$ που να περιγράφει την παραπάνω διάσπαση του σωματιδίου με μάζα M.
Σχεδιάστε την παραπάνω σχέση για τις ακόλουθες διασπάσεις: $\Lambda \to p\pi^-$ ($M_\Lambda = 1.115$ GeV/c^2), $\bar{\Lambda} \to \bar{p}\pi^+$ ($M_{\bar{\Lambda}}$ = 1.115 GeV/c^2), $K^0 \to \pi^+\pi^-$ (M_{K^0} = 0.498 GeV/c^2), $\Xi^0 \to \Lambda\gamma$, $\Xi^0 \to p\pi^-$, και $\Xi^0 \to \Lambda\pi^0$, (M_Ξ = 1.315 GeV/c^2), με προσπίπτουσα ορμή $p = 100$ GeV/c.



Σχήμα 8.7: *Διανυσματικός προσδιορισμός διαφόρων ποσοτήτων της διάσπασης δύο σωμάτων* $M \to m_1 m_2$.

Λύση:

(α) Από το σχήμα 8.7 $p_{1t} = |\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}|/p$ και $p_{2t} = |\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{p}|/p$. Επίσης $\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 \times (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2$ και $\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 \times (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2$, επομένως

$$p_t = p_{1t} = p_{2t} \tag{8.16}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8), $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_{1l} + \boldsymbol{p}_{2l}$, και $p = p_{1l} + p_{2l}$. Επιπλέον χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8.32) και την παραπάνω έκφραση του p, μπορούν να εξαχθούν νέες σχέσεις για τα p_{1l} και p_{2l}

$$p_{1l} = \frac{1+\alpha}{2} p$$
$$p_{2l} = \frac{1-\alpha}{2} p$$

ή

$$p_1^2 = p_{1l}^2 + p_{1t}^2 = \frac{(1+\alpha)^2}{4} p^2 + p_t^2 \tag{8.17}$$

$$p_2^2 = p_{2l}^2 + p_{2t}^2 = \frac{(1-\alpha)^2}{4} p^2 + p_t^2 \tag{8.18}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (8). Επιπλέον σημειώστε ότι

$$\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = (\boldsymbol{p}_{1l} + \boldsymbol{p}_{1t}) \cdot (\boldsymbol{p}_{2l} + \boldsymbol{p}_{2t}) = p_{1l} p_{2l} - p_t^2 = \left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right) p^2 - p_t^2 \tag{8.19}$$

εφόσον $\boldsymbol{p}_{2t} = -\boldsymbol{p}_{1t}$.
Το 4-διάνυσμα που περιγράφει τα σωματίδια με ορμές $\boldsymbol{p}_1$ και $\boldsymbol{p}_2$ είναι: $p_1^\mu = (E_1, \boldsymbol{p}_1)$ και $p_2^\mu = (E_2, \boldsymbol{p}_2)$, όπου $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$ και $E_2 = \sqrt{p_2^2 + m_2^2}$. Μια διατηρημένη ποσότητα για το σύστημα της διάσπασης στα δύο σωματίδια : $|p^\mu|^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2$, με $p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$. Αυτή η διατηρημένη ποσότητα είναι ίση με τη μάζα, M, του διασπασμένου προσπίπτοντος σωματιδίου, επομένως

$$M^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2$$

ή

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{p_1^2 + m_1^2}\sqrt{p_2^2 + m_2^2} - 2\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 \tag{8.20}$$

Τετραγωνίζοντας την εξίσωση (8) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8),με τις (8), (8), παίρνουμε την έκφραση για το p_t που ακολουθεί

$$p_t^2 = \frac{\delta^2 - (1-\alpha^2)^2 p^4/16 - p^2[m_2^2(1+\alpha)^2 + m_1^2(1-\alpha)^2]/4 - m_1^2 m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + p^2(1+\alpha^2)/2 + 2\delta} = \frac{N}{D} \tag{8.21}$$

όπου $\delta = (M^2 - m_1^2 - m_2^2)/2 + (1-\alpha^2)p^2/4$ και $N,\ D$ είναι ο αριθμητής και παρονομαστής της παραπάνω έκφρασης του p_t . Ο παρονομαστής, D, της εξίσωσης (8) μπορεί να γραφτεί αφού χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη έκφραση για το δ,

$$D = p^2 + M^2$$

Ο αριθμητής, N, γράφεται ως

$$N = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}{4} + \frac{p^2}{4}(1-\alpha^2)M^2 - \frac{p^2}{2}[m_1^2(1-\alpha) + m_2^2(1+\alpha)] - m_1^2 m_2^2$$

εφόσον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} \delta^2 - \frac{(1-\alpha^2)^2}{16}p^4 &= \\ \left(\delta - \frac{1-\alpha^2}{4}p^2\right)\left(\delta + \frac{1-\alpha^2}{4}p^2\right) &= \\ \left(\frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2}\right)\left(\frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2} + \frac{1-\alpha^2}{2}p^2\right) &. \end{aligned}$$

Τελικά, η εξίσωση (8) ανάγεται στην

$$p_t = \sqrt{\frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2/4 + p^2(1-\alpha^2)M^2/4 - p^2[m_1^2(1-\alpha) + m_2^2(1+\alpha)]/2 - m_1^2 m_2^2}{p^2 + M^2}} \tag{8.22}$$

Σημειώστε ότι για μεγάλη ορμή $p >> M$, το p_t είναι ανεξάρτητο της ορμής, p, του προσπίπτοντος σωματιδίου με μάζα M

$$p_t = \sqrt{(1-\alpha^2)M^2/4 - [m_1^2(1-\alpha) + m_2^2(1+\alpha)]/2}$$

Στο σχήμα 8.8 η σχέση από την εξίσωση (8) σχεδιάζεται για $\Lambda \to p\pi^-$, $\bar{\Lambda} \to \bar{p}\pi^+$, $K^0 \to \pi^+\pi^-$ $\Xi^0 \to \Lambda\gamma$, $\Xi^0 \to p\pi^-$, και $\Xi^0 \to \Lambda\pi^0$.

Πρόβλημα 8.33 Θεωρήστε ένα κινούμενο σχετικιστικό πηγάδι δυναμικού, ένα κύμα ύψους ϕ, κινούμενο με ταχύτητα $v_0 \leq c$, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.9. Θεωρήστε μονάδες όπου η ταχύτητα του φωτός $c = 1$. Βρείτε την απολαβή κινητικής ενέργειας, ΔK, ενός σωματιδίου μάζας m που ξεκινά αρχικά στην κορυφή του πηγαδιού με ταχύτητα v_0 και πέφτει στον πάτο του.

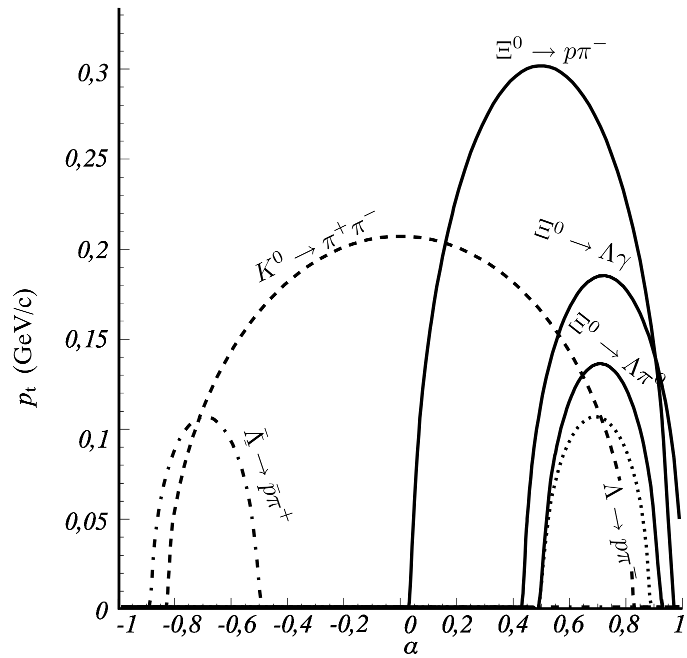
Λύση:

Θεωρήστε την κατάσταση πρώτα σε ένα πλαίσιο αναφοράς που κινείται με ταχύτητα v_0 με το πηγάδι. Σ' αυτό το πλαίσιο, το σωματίδιο ξεκινάει από την ηρεμία στην κορυφή λόφου στατικού δυναμικού. Επομένως στην αρχή του λόγου η ενέργεια W_f' είναι

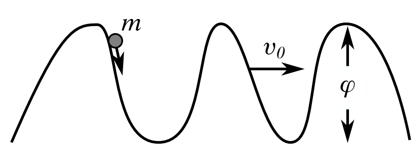
$$W_f' = m + \phi'$$

όπου ϕ' είναι το ύψος του δυναμικού στο πλαίσιο αναφοράς που κινείται με ταχύτητα v_0 με το πηγάδι. Το δυναμικό ϕ' αυξάνεται στο κινούμενο πλαίσιο κατά ένα παράγοντα $\gamma_0 = 1/\sqrt{1-v_0^2}$, όπως φαίνεται από το μετασχηματισμό των πεδίων. Επομένως, $\phi' = \gamma_0\phi$. Επιπλέον, η ορμή p_f', στο κινούμενο σύστημα είναι

$$p_f' = \sqrt{W_f'^2 - m^2}$$



Σχήμα 8.8: *p_t συναρτήσει του $\alpha = (p_{1l} - p_{2l})/p$ για διάφορες διασπάσεις σε δύο σωματίδια, μεσονίων και σωματιδίων Y. Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος για να αναπαραστήσουμε ένα σωματίδιο με μάζα M, που διασπάται σε δύο σωματίδια.*



Σχήμα 8.9: *Σωματίδιο μάζας m που κινείται προς τα κάτω σε ένα πηγάδι δυναμικού που κινείται με ταχύτητα v_0.*

διότι $W'_f = \sqrt{p'^2_f + m^2}$.

Από το πλαίσιο του εργαστηρίου η νέα ενέργεια μέσα από το μετασχηματισμό Lorentz της ενέργειας-ορμής θα είναι

$$W_f = \gamma_0(W'_f + v_0 p'_f) \tag{8.23}$$

Η αλλαγή στην κινητική ενέργεια είναι

$$\Delta K = W_f - W_0 \tag{8.24}$$

όπου $W_0 m\gamma_0$ είναι η αρχική ενέργεια του σωματιδίου. Αφού αντικαταστήσουμε την εξίσωση (8) στην εξίσωση (8) παίρνουμε

$$\Delta K = m\gamma_0 \left[\frac{\phi}{m} + v_0 \sqrt{\left(1 + \frac{\phi'}{m}\right)^2} \right]$$

όπου $\phi' = \gamma_0 \phi$. Στην περίπτωση όπου $\gamma \gg 1$ παίρνουμε

$$\Delta K = 2\gamma_0 \phi' = 2\gamma_0^2 \phi$$

που είναι $\Delta K \gg \phi$.

Πρόβλημα 8.34 Φορτισμένο σχετικιστικό σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται μέσα σε στατικό ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{y}}$. Τη στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο είναι στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{y}}$. Να αποδείξετε ότι το σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy, όπου η εξίσωση κίνησης δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$x = \frac{m\gamma_0}{qE}\left[\cosh\left(\frac{qEy}{m\gamma_0 v_0}\right) - 1\right]$$

όπου $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2}$. Θεωρήστε ότι για την ταχύτητα του φωτός, $c = 1$.

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης για ένα σωματίδιο με ορμή $\boldsymbol{p}$ δίνεται από

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E}$$

ή αναλύοντας σε τρεις Καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε: $\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t = qE$, $\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t = 0$, και $\mathrm{d}p_z = 0$. Αφού ολοκληρώσουμε τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$p_x = qEt \tag{8.25}$$

$$p_y = mv_0\gamma_0 \tag{8.26}$$

$$p_z = 0 \tag{8.27}$$

Η ενέργεια του σωματιδίου είναι $W = m\gamma = \sqrt{p^2 + m^2}$ και η ορμή $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}$, όπου $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου. Επομένως, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/W$, όπου $W = \sqrt{(qEt)^2 + m^2\gamma_0^2 v_0^2 + m^2}$. Ας θέσουμε $E_0^2 = m^2\gamma_0^2 v_0^2 + m^2$. Σημειώστε επίσης ότι $E_0 = m\gamma_0$ που είναι η αρχική ενέργεια του σωματιδίου. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8), (8) και (8) οι αντίστοιχες τρεις συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{qEt}{\sqrt{(qEt)^2 + E_0^2}} \tag{8.28}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{m\gamma_0 v_0}{\sqrt{(qEt)^2 + E_0^2}} \tag{8.29}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8.30}$$

Από την εξίσωση (8), $v_z = 0$, επομένως το σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy. Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (8) και (8) παίρνουμε

$$x = \frac{E_0}{qE}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{E_0}\right)^2} - 1\right] \tag{8.31}$$

και

$$y = \frac{m\gamma_0 v_0}{qE}\sinh^{-1}\left(\frac{qEt}{E_0}\right) \tag{8.32}$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή του χρόνου t από τις εξισώσεις (8) και (8) έχουμε

$$x = \frac{m\gamma_0}{qE}\left[\cosh\left(\frac{qEy}{m\gamma_0 v_0}\right) - 1\right]$$

Πρόβλημα 8.35 Να εξάγετε τις εξισώσεις ταχύτητας Lorentz του μετασχηματισμού μεταξύ δύο συστημάτων συντεταγμένων (S και S') με παράλληλους άξονες που κινούνται ομοιόμορφα σχετικά ο ένας με τον άλλο με ταχύτητα v κατά μήκος των αξόνων x και x'. Να αναλύσετε την περίπτωση στην οποία $v \ll c$. Επιπρόσθετα θεωρήστε ένα φωτόνιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x' στο πλαίσιο S' και βρείτε την ταχύτητα, όπως φαίνεται από το πλαίσιο S.

Λύση:

Θεωρήστε ένα γεγονός στο σύστημα S που χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες (t, x, y, z). Επίσης θεωρήστε ότι (t', x', y', z') είναι οι συντεταγμένες όπως φαίνονται από το σύστημα S'. Οι μετασχηματισμοί χώρου-χρόνου Lorentz τότε είναι: $x = \gamma(x' + vt')$, $y = y'$, $z = z'$ και $t = \gamma(t' + (v/c^2)x')$, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός, και $\gamma = 1\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας στο S είναι: $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ και $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Ακόμα, οι συνιστώσες της ταχύτητας στο S' είναι: $v'_x = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$, $v'_y = \mathrm{d}y'/\mathrm{d}t'$ και $v'_z = \mathrm{d}z'/\mathrm{d}t'$. Αλλάζοντας τις μεταβλητές στο v_x παίρνουμε

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \tag{8.33}$$

Σημειώστε ότι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} = \gamma(v'_x + v) \tag{8.34}$$

χρησιμοποιώντας το χωρικό μετασχηματισμό Lorentz. Επίσης,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}v'_x\right) \tag{8.35}$$

χρησιμοποιώντας το χρονικό μετασχηματισμό Lorentz . Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (8), (8) και (8) παίρνουμε τη συνιστώσα x του μετασχηματισμού Lorentz της ταχύτητας (v_x)

$$v_x = \frac{\gamma(v'_x + v)}{\gamma(1 + (v/c^2)v'_x)} \tag{8.36}$$

Με τον ίδιο τρόπο η συνιστώσα y της ταχύτητας είναι $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t')(\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t)$ ή χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8) έχουμε

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + (v/c^2)v'_x)} \tag{8.37}$$

Ακόμα, η συνιστώσα z της ταχύτητας μετασχηματίζεται ως

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + (v/c^2)v'_x)} \tag{8.38}$$

Για $v \gg c$ ή $(v/c) \gg 1$ παρατηρήστε ότι $\gamma(1 + (v/c^2)v'_x) = 1$. Επομένως οι εξισώσεις (8), (8) και (8) μπορούν να προσεγγιστούν ως

$$v_x = v'_x + v$$

$$v_y = v'_y$$

$$v_z = v'_z$$

που αποτελούν το μετασχηματισμό της ταχύτητας του Γαλιλαίου στην κλασσική μηχανική.
Για ένα φωτόνιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x' οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι: $v'_x = c$. $v'_y = 0$, και $v'_z = 0$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8), (8) και (8) οι συνιστώσες της ταχύτητας αυτού του φωτονίου στο σύστημα S είναι: $v_x = c$, $v_y = 0$, και $v_z = 0$, που σημαίνει ότι η ταχύτητα του φωτονίου είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό Lorentz.

Πρόβλημα 8.36 Χρησιμοποιήστε το αναλλοίωτο της φάσης $(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού (ΗΜ) κύματος για να παράγετε τους μετασχηματισμούς Lorentz του κυματανύσματος $\boldsymbol{k}$ και της συχνότητας ω σε ένα πλαίσιο S' που κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x του πλαισίου S. Το κυματάνυσμα $\boldsymbol{k}$ και η συχνότητα ω συσχετίζονται μέσω της $\omega = kc$, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός και $k = |\boldsymbol{k}|$. Επιπλέον, εξάγετε τη σχέση μεταξύ των γωνιών του ΗΜ κύματος στα πλαίσια S και S'.

(α) Φωτόνιο συχνότητας ω_0 κινείται κατά μήκος του άξονα x στο πλαίσιο S με σταθερή ταχύτητα v. Θεωρήστε ότι θ είναι η γωνία μεταξύ του άξονα x και της γραμμής που συνδέει την αρχή των αξόνων O του πλαισίου S με το κινούμενο φωτόνιο. Αποδείξτε ότι

$$\omega_0 = \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)\omega$$

όπου ω είναι η συχνότητα που ένας παρατηρητής βλέπει στην αρχή των αξόνων O.
(β) Αν ω_1, ω_2 είναι οι συχνότητες που ένας παρατηρητής βλέπει στην αρχή των αξόνων O όταν η πηγή του φωτονίου κινείται ακτινικά προς αυτόν, και προς τα έξω από αυτόν, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$$

Επιπρόσθετα, εάν $\omega_1 - \omega_2 = \alpha\omega_0$, εκφράστε τις συχνότητες ω_1, ω_2, συναρτήσει του α.

Λύση:

Η φάση του επίπεδου ΗΜ κύματος $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ είναι αναλλοίωτη ποσότητα. Προσδιορίστε το διάνυσμα $k^\mu = (\omega/c, \boldsymbol{k})$. Είναι γνωστό ότι το $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ είναι ένα 4-διάνυσμα. Επομένως από το αναλλοίωτο της φάσης ενός επίπεδου ΗΜ κύματος, $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ το διάνυσμα k^μ είναι επίσης ένα 4-διάνυσμα (δηλαδή μετασχηματίζεται σύμφωνα με το μετασχηματισμό Lorentz όπως και το x^μ). Οι συνιστώσες $k_0 = \omega/c$ και k_1 του 4-διανύσματος k^μ μπορούν να εκφραστούν ανάμεσα στα πλαίσια S και S' ως

$$k_0 = \gamma\left(k_0' + \frac{v}{c}k_1'\right) \tag{8.39}$$

$$k_1 = \gamma\left(k_1' + \frac{v}{c}k_0'\right) \tag{8.40}$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, c η ταχύτητα του φωτός, $k_0' = \omega'/c$ είναι η συχνότητα στο πλαίσιο S', και k_1, k_1' είναι οι συνιστώσες x των κυματανυσμάτων $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k'}$ στα πλαίσια S, S', αντίστοιχα. Θεωρήστε ότι a a' είναι οι γωνίες που σχηματίζουν τα κυματανύσματα $\boldsymbol{k}$ και $\boldsymbol{k'}$ σε σχέση με τους άξονες x και x', αντίστοιχα. Επομένως $k_1 = k\cos a = (\omega/c)\cos a$ και $k_1' = k'\cos a' = (\omega'/c)\cos a'$. Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις, οι εξισώσεις (8) και (8) ανάγονται στους μετασχηματισμούς Lorentz του κυματανύσματος και της συχνότητας ενός επίπεδου ΗΜ κύματος

$$\omega = \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos a'\right)\omega' \tag{8.41}$$

$$\omega\cos a = \gamma\left(\cos a' + \frac{v}{c}\right)\omega' \tag{8.42}$$

Από τις εξισώσεις (8) και (8) μπορεί να προκύψει η σχέση μεταξύ των γωνιών a και a'. Συγκεκριμένα, διαιρώντας τις, έχουμε

$$\cos a = \frac{\cos a' + v/c}{1 + (v/c)\cos a'}$$

(α) Θεωρήστε ένα πλαίσιο S' που κινείται με το φωτόνιο. Τότε $\omega' = \omega_0$, και $a = \theta$ είναι η γωνία που ένας παρατηρητής βλέπει από το πλαίσιο S. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό της εξίσωσης (8) έχουμε

$$\omega_0 = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)\omega \tag{8.43}$$

όπου ω είναι η συχνότητα που ένας παρατηρητής στο πλαίσιο S βλέπει ως αρχή των αξόνων O.
(β) Στην περίπτωση που η πηγή του φωτονιου κινείται ακτινικά προς αυτόν και μακριά από τον παρατηρητή, $v \to +v$, $v \to -v$ αντίστοιχα και $\theta = 0$, επομένως η εξίσωση (8) ανάγεται στην

$$\omega_0 = \gamma(1 - \frac{v}{c})\omega_1 \tag{8.44}$$

$$\omega_0 = \gamma(1 + \frac{v}{c})\omega_2 \tag{8.45}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (8) με την (8) έχουμε

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \tag{8.46}$$

διότι $\gamma^2(1-(v/c)^2) = 1$.

Αν $\omega_1 - \omega_2 = \alpha\omega_0$ τότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8) έχουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς το ω_2

$$\omega_2^2 + \alpha\omega_0\omega_2 - \omega_0^2 = 0$$

η οποία έχει θετική λύση που δίνεται από

$$\omega_2 = \frac{-\alpha\omega_0 + \omega_0\sqrt{\alpha^2+4}}{2} \tag{8.47}$$

Επιπλέον,το ω_1 είναι

$$\omega_1 = \frac{2\omega^2}{-\alpha\omega_0 + \omega_0\sqrt{\alpha^2+4}}$$

συνδυάζοντας την εξίσωση (8) με την (8).

Πρόβλημα 8.37 Θεωρήστε ένα πλαίσιο S' που κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x ενός πλαισίου S. Ορίστε ένα φορτίο q που να είναι στην αρχή των αξόνων O' του πλαισίου S'. Επομένως η πυκνότητα φορτίου ρ' και οι συνιστώσες του ρεύματος j'_x, j'_y, j'_z στο πλαίσιο S' είναι: $\rho'(x',y',z',t') = q\delta(x')\delta(y')\delta(z')$, $j'_x = j'_y = j'_z = 0$ αντίστοιχα. Επίσης, οι αντίστοιχες παράμετροι στο πλαίσιο S είναι: $\rho(x,y,z,t) = q\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)$, $j_x = qv\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)$, $j_y = j_z = 0$.
Παράγετε το μετασχηματισμό Lorentz από το πλαίσιο S στο πλαίσιο S' για την πυκνότητα φορτίου και το ρεύμα.

Λύση:

Αρχίζουμε από την έκφραση $\rho'(x',y',z',t') = q\delta(x')\delta(y')\delta(z')$ και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Lorentz του χώρου, $x' = \gamma(x-vt)$, $y' = y$, $z' = z$ έχουμε

$$\rho'(x',y',z',t') = \frac{q}{\gamma}\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z) \tag{8.48}$$

όπου $\gamma = 1\sqrt{1-(v/c)^2}$ και έχει χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα $\delta(a\omega) = (1/a)\delta(\omega)$ της συνάρτησης δέλτα, $\delta(\omega)$.
Σημειώστε ότι $(1-(v/c)^2) = 1/\gamma$, επομένως η εξίσωση (8) ανάγεται στην

$$\rho'(x',y',z',t') = \gamma(q\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z) - \frac{v}{c^2}qv\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)) \tag{8.49}$$

Χρησιμοποιώντας τις δεδομένες σχέσεις των $\rho(x,y,z,t)$ και $j_x(x,y,z,t)$,η εξίσωση (8) μπορεί να γραφτεί ως

$$\rho'(x',y',z',t') = \gamma(\rho(x,y,z,t) - \frac{v}{c^2}j_x(x,y,z,t))$$

που δίνει το μετασχηματισμό Lorentz της πυκνότητας.
Για το μετασχηματισμό του ρεύματος μπορούμε να αρχίσουμε από το $j'_x = 0\gamma(qv - vq)\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)$. Επομένως ο μετασχηματισμός του ρεύματος είναι

$$j'_x(x',y',z',t') = \gamma(j_x(x,y,z,t) - v\rho(x,y,z,t))$$

Επιπρόσθετα, σημειώστε ότι $j'_y = j_y$ και $j'_z = j'_z$.

Πρόβλημα 8.38 Η δημιουργία ενός συντονισμού N σε υψηλή ενέργεια μπορεί να επιτευχθεί συγκρούοντας σωματίδια π σε σταθερό στόχο πρωτονίων p σύμφωνα με την αλληλεπίδραση

$$\pi + p \rightarrow \pi + N$$

Να αποδείξετε ότι η μάζα του συντονισμού N είναι δοσμένη συναρτήσει του κατωφλίου π κινητικής ενέργειας K_π^{th} (η ελάχιστη κινητική ενέργεια που χρειάζεται για να παραχθεί ο συντονισμός N) και δίνεται από

$$m_N = \sqrt{m_\pi^2 + m_p^2 + 2K_\pi^{th} m_p + 2m_p m_\pi} - m_\pi$$

όπου m_p. m_π είναι οι μάζες του πρωτονίου και του πιονίου αντίστοιχα.

Λύση:

Στο κέντρο της μάζας του συστήματος $\pi - p$, η ολική ενέργεια, E'_{tot}, είναι

$$E'_{tot} = E'_\pi + E'_p \tag{8.50}$$

διότι $\boldsymbol{p'_\pi} + \boldsymbol{p'_p} = 0$, όπου $E'_\pi = \sqrt{p'^2_\pi + m_\pi^2}$ και $E'_p = \sqrt{p'^2_p + m_p^2}$. Σημειώστε ότι η απαιτούμενη ελάχιστη ενέργεια για να δημιουργηθούν $\pi + N$ στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι

$$E'_{tot} = m_\pi + m_N \tag{8.51}$$

όπου η ορμή των π και p είναι μηδέν.
Επίσης η αναλλοίωτη μάζα στο σύστημα του εργαστηρίου για το σύστημα $\pi - p$ δίνεται από

$$M = (E_\pi + E_p)^2 - (\boldsymbol{p}_\pi + \boldsymbol{p}_p)^2 \tag{8.52}$$

όπου $E_\pi = \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}$, $E_p = \sqrt{p_p^2 + m_p^2}$, και $\boldsymbol{p}_p = 0$, επομένως $E_p = m_p$. Επιπλέον η αναλλοίωτη μάζα στο σύστημα του κέντρου μάζας δίνεται από την εξίσωση (8), επομένως η ενέργεια του πιονίου, E_π, μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση (8) ως ακολούθως

$$E_\pi = \frac{(E'_{tot})^2 - (m_\pi^2 + m_p^2)^2}{2m_p}$$

και η ενέργεια κατωφλίου του π, E_π^{th}, για να δημιουργηθεί ο συντονισμός N αντιστοιχεί σε E'_{tot}, που δίνεται από την εξίσωση (8), επομένως

$$E_\pi^{th} = \frac{(m_\pi^2 + m_N^2)^2 - (m_\pi^2 + m_p^2)^2}{2m_p} \tag{8.53}$$

Επομένως η μάζα του συντονισμού N, m_N, μπορεί να παραχθεί από την εξίσωση (8) αφού χρησιμοποιηθεί η έκφραση της κινητικής ενέργειας κατωφλίου π, $K_\pi^{th} = E_\pi^{th} - m_\pi$. Συγκεκριμένα παίρνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το m_N

$$m_N^2 + 2m_\pi m_N - 2m_p(K_\pi^{th} + m_\pi) - m_p^2 = 0$$

και μια θετική λύση είναι

$$m_N = \sqrt{m_\pi^2 + m_p^2 + 2K_\pi^{th} m_p + 2m_p m_\pi} - m_\pi$$

Πρόβλημα 8.39 Ορίστε μια μάζα m που κινείται στο επίπεδο $x - y$ (ή $r - \phi$ σε πολικές συντεταγμένες) υπό την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.10

$$\boldsymbol{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του $\boldsymbol{r}$, $r = |\boldsymbol{r}|$ και k είναι η ισχύς της κεντρικής δύναμης.

(α) Να αποδείξετε ότι η στροφορμή $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ και η ολική ενέργεια $W = E + U(r)$ είναι διατηρούμενες ποσότητες, όπου $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, $U(r)$ είναι η δυναμική ενέργεια εξαιτίας της παραπάνω κεντρικής δύναμης.
(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης $r = f(\phi)$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(\phi)$ είναι μια έλλειψη όπου το περιήλιο κινείται σε κάθε κύκλο.Επίσης βρείτε το ποσό, $\Delta\phi$, κατά το οποίο το περιήλιο κινήθηκε ύστερα από ένα κύκλο, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.10.

Λύση:

Η στροφορμή ενός σωματιδίου μάζας m είναι $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ και η χρονική παράγωγος του $\boldsymbol{L}$ είναι

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} \tag{8.54}$$

όπου $\dot{\boldsymbol{L}} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ και $\dot{\boldsymbol{p}} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$. Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ (εξαιτίας της κεντρικής δύναμης) επομένως $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$ όπου χρησιμοποιείται ότι $\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}}$. Επίσης, σημειώστε ότι $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \times m\gamma\boldsymbol{v} = 0$, όπου $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου και $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Επομένως από την εξίσωση (8) έχουμε ότι $\boldsymbol{L}$ είναι διατηρούμενη ποσότητα.
Η ολική ενέργεια W της μάζας m είναι $W = E + U(r)$, όπου $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ και $U(r)$ είναι η δυναμική ενέργεια της μάζας που αντιστοιχεί στην κεντρική δύναμη $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(r)$. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω έκφραση της δύναμης $\boldsymbol{F}$ παίρνουμε $U(r) = -k/r$. Η αλλαγή στην ενέργεια W είναι $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t + \mathrm{d}U/\mathrm{d}t$. Σημειώστε ότι $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = (c^2/E)\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{p}}$ διότι $\boldsymbol{p} = (E/c^2)\boldsymbol{v}$, και $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t\cdot\boldsymbol{\nabla}U = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}U$, επομένως

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\dot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\nabla}U(r)) = 0 \tag{8.55}$$

διότι $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F} = -\nabla U(r)$.
Όπως μπορεί να φανεί από την εξίσωση (8) η ολική ενέργεια του σωματιδίου W είναι διατηρούμενη ποσότητα επίσης. Επομένως οι δύο διατηρούμενες ποσότητες είναι η στροφορμή $\boldsymbol{L}$ και η ολική ενέργεια W.
(β) Ας εκφράσουμε τη στροφορμή $\boldsymbol{L}$ σε πολικές συντεταγμένες όπως φαίνεται στο σχήμα 8.10. Σημειώστε ότι $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$, όπου $\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του διανύσματος $\boldsymbol{r}$. Επίσης $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$, όπου $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $\boldsymbol{r}$. Επομένως η ορμή $\boldsymbol{p}$ μπορεί να γραφτεί ως $\boldsymbol{p} = m\gamma(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}})$. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της άλγεβρας η στροφορμή είναι

$$\boldsymbol{L} = m\gamma r^2\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

και ας πούμε το μέτρο της στροφορμής J, επομένως

$$J = m/\gamma r^2\dot{\phi} \tag{8.56}$$

όπου, όπως είδαμε, είναι διατηρούμενη ποσότητα.

Επιπλέον η ολική ενέργεια W είναι $W = E + U(r) = m\gamma c^2 - k/r$, επομένως

$$\gamma = \frac{W + k/r}{mc^2} \tag{8.57}$$

όπου W είναι διατηρούμενη ποσότητα, όπως είδαμε από το ερώτημα (α).
Για να κατασκευάσουμε την εξίσωση κίνησης $r(\phi)$ μπορούμε να αρχίσουμε από την έκφραση της ταχύτητας, όπως δίνεται στην αρχή του ερωτήματος (α). Συγκεκριμένα

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2$$
$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

ή

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + r^2\right]$$

ή χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8)

$$\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} = \frac{J^2}{m^2 c^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] \tag{8.58}$$

Σημειώστε ότι $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 v^2/c^2$, επομένως η εξίσωση (8) μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{J^2}{m^2 c^2}\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] + 1 = \left(\frac{W + k/r}{mc^2}\right)^2$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η έκφραση γ από την εξίσωση (8). Ας αλλάξουμε τη μεταβλητή r σε $u = 1/r$, επομένως η παραπάνω εξίσωση ανάγεται στην

$$\frac{J^2}{m^2 c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + u^2\right] + 1 = \left(\frac{W + ku}{mc^2}\right)^2 \tag{8.59}$$

ή διαφορίζοντας την εξίσωση (8) ως προς ϕ παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + \left(1 - \frac{k^2}{c^2 J^2}\right) u = \frac{k^2 W}{c^2 J^2} \tag{8.60}$$

Μια γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (8) μπορεί να εκφραστεί ως

$$u = A\cos\lambda\phi + B\sin\lambda\phi + \frac{1}{\lambda^2} D \tag{8.61}$$

όπου $\lambda = 1 - k^2/(cJ)^2$, $D = k^2 W/(cJ)^2$, και A, B είναι σταθερές που μπορούν να καθοριστούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.
Μια αρχική συνθήκη είναι

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}(\phi = 0) = 0 \tag{8.62}$$

επομένως χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8) και την (8) έχουμε ότι $B = 0$, και η γενική λύση ανάγεται στην

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\lambda\phi + \frac{D}{\lambda^2}$$

ή

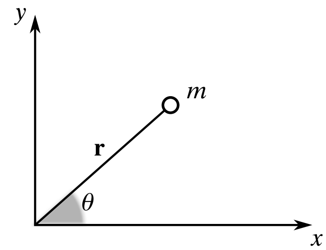
$$r = \frac{D/\lambda^2}{1 + (A\lambda^2/D)\cos\lambda\phi}$$

που είναι η εξίσωση μιας έλλειψης, αν $\lambda = 1$ αλλά σ' αυτή την περίπτωση $\lambda \neq 1$ γενικά. Αν το σωματίδιο κάνει ένα ολόκληρο κύκλο (2π) γύρω από το κέντρο της κεντρικής δύναμης για να πάρει την ίδια θέση r θα πρέπει να έχουμε $\lambda\phi_1 = 2\pi$, όπου ϕ_1 είναι η νέα γωνία που μπορεί να εκφραστεί ως $\phi_1 = 2\pi + \Delta\phi$, όπου $\Delta\phi$ είναι η διαταραχή στη γωνία. Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)$$

Πρόβλημα 8.40 (α) Ορίστε έναν παρατηρητή (O_2) σε ένα πλαίσιο αναφοράς S' που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ σε σχέση με έναν παρατηρητή (O_1) σε ένα πλαίσιο αναφοράς S. Θεωρήστε ότι η 4-ταχύτητα του παρατηρητή στο πλαίσιο S είναι $u_\alpha^{(1)} = 0$, $u^{(1)} = ic$, σε σχέση με τον εαυτό του. Βρείτε την 4-ταχύτητα του παρατηρητή στο πλαίσιο S' σε σχέση με τον παρατηρητή στο S και αποδείξτε ότι

$$u_1^{(1)} u^{(2)} = -c^2\gamma$$



Σχήμα 8.10: *Κινούμενο σωματίδιο υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης σε 2-διαστάσεις.*

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.
(β) Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να αποδείξετε ότι αν δύο παρατηρητές (O_1 και O_2) κινούνται με ταχύτητες $\boldsymbol{v}_1$, και $\boldsymbol{v}_2$ σε σχέση με έναν τρίτο παρατηρητή (O_3), το μέτρο της σχετικής ταχύτητας του παρατηρητή O_1 και O_2 δίνεται από

$$v^2 = \frac{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2 - (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)^2/c^2}{(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2/c^2)^2} \tag{8.63}$$

Λύση:

(α) Η 4-ταχύτητα του παρατηρητή O_1 είναι $u^{(1)} - \alpha = 0$, $u_4^{(1)} = ic$ ή $u_i^{(1)} = (0, ic)$ ενώ η 4-ταχύτητα του παρατηρητή O_2 είναι $u^{(2)} - \alpha \neq 0$, $u_4^{(2)} = ic\gamma$ ή $u_i^{(2)} = (u^{(2)} - \alpha, ic\gamma)$ επομένως το γινόμενο αυτών των 4-ταχυτήτων είναι

$$u_1^{(1)} u^{(2)} = -c^2\gamma$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.
(β) Η 4-ταχύτητα του παρατηρητή O_1 σε σχέση με O_3 είναι $u_i^{(13)} = (\gamma_{13}\boldsymbol{v}_1, ic\gamma_{13})$ όπου $\gamma_{13} = 1/\sqrt{1-(v_1/c)^2}$ και η 4-ταχύτητα του παρατηρητή O_2 σε σχέση με το O_3 είναι $u_i^{(23)} = (\gamma_{23}\boldsymbol{v}_2, ic\gamma_{23})$ όπου $\gamma_{23} = 1/\sqrt{1-(v_2/c)^2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Το γινόμενο του $u_i^{(13)}$ με το $u_i^{(23)}$ είναι

$$u_i^{(13)} u_i^{(23)} = \gamma_{13}\gamma_{23}(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - c^2) \tag{8.64}$$

Επίσης η 4-ταχύτητα του παρατηρητή O_2 σε σχέση με τον O_1 είναι $u_i^{(12)} = (\gamma_{12}\boldsymbol{v}, ic\gamma_{12})$ όπου $\gamma_{12} = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ όπου v είναι η σχετική ταχύτητα του παρατηρητή O_1 και O_2. Επιπλέον η 4-ταχύτητα του παρατηρητή O_1 σε σχέση με τον εαυτό του είναι $u_i^{(11)} = (0, ic)$ και το γινόμενο του $u_i^{(12)}$ με το $u_i^{(11)}$ είναι

$$u_i^{(11)} u_i^{(12)} = -c^2\gamma \tag{8.65}$$

και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) μπορούμε να εξισώσουμε την εξίσωση (8) με την (8). Συγκεκριμένα παίρνουμε

$$\gamma_{13}\gamma_{23}(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - c^2) = -\frac{c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

ή λύνοντας ως προς v^2 έχουμε

$$v^2 = \frac{(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)^2/c^2 - 2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + v_1^2 + v_2^2 - (v_1 v_2)^2/c^2}{(1 - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_2)^2/c^2)^2} \tag{8.66}$$

Σημειώστε ότι $v_1^2 + v_2^2 - 2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2$ και $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_2)^2 - (v_1 v_2)^2 = -(v_1 v_2)^2 \sin^2\theta = -(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)^2$, επομένως η εξίσωση (8) ανάγεται στην

$$v^2 = \frac{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2 - (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)^2/c^2}{(1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2/c^2)^2}$$

που είναι η έκφραση της εξίσωσης (8.40).

Πρόβλημα 8.41 Να δείξετε αναλυτικά ότι δύο διαδοχικοί μετασχηματισμοί Lorentz προς την ίδια κατεύθυνση είναι ισοδύναμοι με ένα μετασχηματισμό Lorentz με ταχύτητα, v

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

όπου v_1 είναι η ταχύτητα του πλαισίου αναφοράς S' σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς S, και v_2 είναι η ταχύτητα του πλαισίου αναφοράς S'' σε σχέση με το S. Θεωρήστε ότι η κατεύθυνση του v_1, και v_2 είναι κατά μήκος του άξονα x του S, του άξονα x' του S' και του άξονα x'' του S''.

Λύση:

Ο μετασχηματισμός Lorentz μεταξύ ενός 4-διανύσματος (x_0, x_1, x_2, x_3) στο S όπου $x_0 = ct$ και ενός 4-διανύσματος (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) στο S' όπου $x'_0 = ct'$ είναι

$$x'_0 = \gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1) \tag{8.67}$$

$$x'_1 = \gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0) \tag{8.68}$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

όπου $\gamma_1 = 1/\sqrt{1-\beta_1^2}$ και $\beta_1 = v_1/c$. Επίσης ο μετασχηματισμός Lorentz μεταξύ ενός 4-διανύσματος (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) στο S' όπου $x'_0 = ct'$ και ενός 4-διανύσματος $(x''_0, x''_1, x''_2, x''_3)$ στο S'' όπου $x''_0 = ct''$ είναι

$$x''_0 = \gamma_2(x'_0 - \beta_2 x'_1) \tag{8.69}$$

$$x''_1 = \gamma_2(x_1 - \beta_2 x'_0) \tag{8.70}$$

$$x''_2 = x'_2$$

$$x''_3 = x'_3$$

όπου $\gamma_2 = 1/\sqrt{1-\beta_2^2}$ και $\beta_2 = v_2/c$. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (8) και (8) στις εξισώσεις (8) και (8) ο μετασχηματισμός Lorentz μεταξύ ενός 4-διανύσματος (x_0, x_1, x_2, x_3) στο S όπου $x_0 = ct$ και ενός 4-διανύσματος $(x''_0, x''_1, x''_2, x''_3)$ στο S'' όπου $x''_0 = ct''$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} x''_0 = \gamma_2[\gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1) - \beta_2\gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0)] = \\ \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)\left(x_0 - \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}x_1\right), \end{aligned} \tag{8.71}$$

$$\begin{aligned} x''_1 = \gamma_2[\gamma_1(x_1 - \beta_1 x_0) - \beta_2\gamma_1(x_0 - \beta_1 x_1)] = \\ \gamma_1\gamma_2\,(1+\beta_1\beta_2)\left(x_1 - \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}x_1\right). \end{aligned} \tag{8.72}$$

Σημειώστε ότι αν θέσουμε μια νέα ταχύτητα, $\beta = v/c$

$$\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \tag{8.73}$$

ο παράγοντας Lorentz $\gamma = 1\sqrt{1-\beta^2}$ που αντιστοιχεί στην ταχύτητα β ξαναγράφεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8) ως

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - [(\beta_1+\beta_2)/(1+\beta_1\beta_2)]^2}} = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$$

συνεπώς οι εξισώσεις (8) και (8) ανάγονται σε

$$x''_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1),$$

$$x_1'' = \gamma(x_1 - \beta x_0),$$

όπου $\beta = (\beta_1 + \beta_2)/(1 + \beta_1\beta_2)$, ή

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

διότι $\beta = v/c$, $\beta_1 = v_1/c$ και $\beta_2 = v_2/c$.

Πρόβλημα 8.42 Η κοσμική τροχιά ενός κινούμενου πυραύλου δίνεται παρακάτω παραμετρικά

$$\begin{aligned} t &= \frac{R}{\lambda}\sqrt{1+A^2}\sinh(\lambda\phi), \\ x &= AR\sin\phi, \\ y &= AR\cos\phi, \\ z &= \frac{R}{\lambda}\sqrt{1+A^2}\cosh(\lambda\phi), \end{aligned}$$

όπου R, A, λ είναι σταθερές και ϕ μια παράμετρος που ικανοποιεί $-\infty < \phi < +\infty$. Θεωρήστε ότι ταχύτητα του φωτός $c = 1$.

(α) Υπολογίστε το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας $\boldsymbol{v}$ του πυραύλου στο πλαίσιο αναφοράς (t, x, y, z).

(β) Εκφράστε την παράμετρο ϕ συνάρτησει του "proper time" τ, και υπολογίστε το μέτρο της επιτάχυνσης του 4-διανύσματος $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, όπου $a^0 = \mathrm{d}^2t/\mathrm{d}\tau^2$, $a^1 = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}\tau^2$,$a^2 = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}\tau^2$ και $a^3 = \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}\tau^2$.

Λύση:

(α) Το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος της ταχύτητας του πυραύλου είναι $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ όπου χρησιμοποιώντας την τροχιά του πυραύλου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = AR\cos\phi\dot{\phi} \\ \dot{y} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -AR\sin\phi\dot{\phi} \\ \dot{z} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = R\sqrt{1+A^2}\sinh(\lambda\phi)\dot{\phi} \end{aligned}$$

όπου $\dot{\phi} = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, το τετράγωνο του διανύσματος της ταχύτητας ανάγεται σε

$$v^2 = R^2[A^2 + (1+A^2)R^2\sinh^2(\lambda\phi)]\dot{\phi} \tag{8.80}$$

Η παράμετρος $\dot{\phi}$ μπορεί να υπολογισθεί αφού αναστρέψουμε το χρόνο, t, συνιστώσα της τροχιάς, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\phi = \frac{1}{\lambda}\sinh^{-1}\left(\frac{\lambda t}{R\sqrt{1+A^2}}\right)$$

και συνεπώς το $\dot{\phi}$ δίνει

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{R^2(1+A^2) + \lambda^2 t^2}} \tag{8.81}$$

και τελικά συνδυάζοντας την εξίσωση (8) με την (8) παίρνουμε

$$v = \sqrt{(A^2 + \lambda^2 t^2/R^2)/(1 + A^2 + \lambda^2 t^2/R^2)} \tag{8.82}$$

(β) Η σχέση μεταξύ του χρόνου, t, και του "proper time", τ, είναι $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau$, όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, ή χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8) έχουμε

$$\gamma = \frac{\sqrt{R^2(1+A^2) + \lambda^2 t^2}}{R}$$

και συνδυάζοντας την εξίσωση (8), η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$\gamma = \frac{1}{R\dot{\phi}}$$

Από τη σχέση $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$, η εξίσωση (8) δίνει τη σχέση μεταξύ των ϕ και τ

$$R\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\tau \tag{8.83}$$

ή ολοκληρώνοντάς την και χρησιμοποιώντας ως αρχική συνθήκη το ότι $\phi(\tau = 0) = 0$, παίρνουμε

$$\phi(\tau) = \frac{\tau}{R}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, οι συνιστώσες του 4-διανύσματος της ταχύτητας, (v^0, v^1, v^2, v^3), είναι

$$v^0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1 + A^2}\cosh\left(\frac{\lambda\tau}{R}\right),$$
$$v^1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = A\cos\left(\frac{\tau}{R}\right),$$
$$v^2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = -A\sin\left(\frac{\tau}{R}\right),$$
$$v^3 = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1 + A^2}\sinh\left(\frac{\lambda\tau}{R}\right),$$

και το αντίστοιχο 4-διάνυσμα της επιτάχυνσης, $\left(a^0, a^1, a^2, a^3\right)$, είναι

$$a^0 = \frac{\mathrm{d}v^0}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1 + A^2}\sinh\left(\frac{\lambda\tau}{R}\right)\frac{\lambda}{R},$$
$$a^1 = \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}\tau} = -A\sin\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{1}{R},$$
$$a^2 = \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}\tau} = -A\cos\left(\frac{\tau}{R}\right)\frac{1}{R},$$
$$a^3 = \frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1 + A^2}cosh\left(\frac{\lambda\tau}{R}\right)\frac{\lambda}{R}.$$

Επομένως το μέτρο της επιτάχυνσης, $|a^\mu|^2 = \left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 - \left(a^3\right)^2$, ξαναγράφεται με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων ως

$$|a^\mu|^2 = -\frac{1}{R^2}[\lambda^2\left(1 + A^2\right) + A^2]$$

Πρόβλημα 8.43 (α) Να αποδείξετε ότι η ολική ισχύς ακτινοβόλησης, P, ενός επιταχυνόμενου φορτισμένου σωματιδίου φορτίου, e, μάζας, m, και 4-διανύσματος ταχύτητας u^μ

$$P = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^2\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

μπορεί να γραφτεί συναρτήσει του φορτίου, e, της ταχύτητας, $\boldsymbol{v}$, και του $\dot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$, όπου τ είναι το "proper time". Θεωρήστε ότι για την ταχύτητα του φωτός, $c = 1$.
(β) Αν ένα φορτισμένο σωματίδιο με φορτίο, e, κινείται κυκλικά σε σταθερή ακτίνα, R, αλλά με μεταβλητή στροφορμή, $\omega = \omega(t)$ $(\dot{\omega} \neq 0)$, υπολογίστε την ισχύ ακτινοβόλησης συναρτήσει των ω, $\dot{\omega}$, R, και του e.

Λύση:

(α) Η ισχύς ακτινοβόλησης, P, μπορεί να εκφραστεί στην 4-διανυσματική συναλλοίωτη ορμή, $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$ και στην ανταλλοίωτη, $p^\mu = (E, -\boldsymbol{p})$, γνωρίζοντας ότι $p_\mu = m u^\mu$, ως ακολούθως

$$P = -\frac{2}{3}\frac{\mathrm{e}^2}{m^2}\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{8.92}$$

και

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \tag{8.93}$$

όπου $E = m\gamma$, $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}$, και $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$.
Σημειώστε ότι

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\gamma = m\gamma^4\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} \tag{8.94}$$

διότι $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t = \gamma^3\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}$, και $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau$. Επίσης ο όρος $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ δίνει

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\gamma = m\gamma^4\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{p}}) + m\gamma^2\dot{\boldsymbol{v}} \tag{8.95}$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση (8) με την (8), και την (8) παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -m^2\gamma^4\left[(\dot{\boldsymbol{v}})^2 + \gamma^2\left(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\right)^2\right]$$

συνεπώς η ισχύς ακτινοβόλησης της εξίσωσης (8) μπορεί να γραφτεί συναρτήσει του φορτίου, e, της ταχύτητας, $\boldsymbol{v}$, και του $\dot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ ως ακολούθως

$$P = \frac{2}{3}\mathrm{e}^2\gamma^4[(\dot{\boldsymbol{v}})^2 + \gamma^2(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})^2] \tag{8.96}$$

(β) Η ταχύτητα, $\boldsymbol{v}$, του σωματιδίου που κινείται στον κύκλο είναι $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times R\hat{\boldsymbol{e}}_r$, και

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\omega}\hat{\boldsymbol{z}}\times R\hat{\boldsymbol{e}}_r + \omega\hat{\boldsymbol{z}}\times R\omega\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

όπου όπως μπορείτε να δείτε από το σχήμα 1 , $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα z, $\boldsymbol{e}_r$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ακτίνας R, και $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της εφαπτομένης. Σημειώστε ότι $\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\hat{\boldsymbol{e}}_r$, επομένως η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\omega}R\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - \omega^2R\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

και

$$v^2 = \dot{\omega}^2R^2 + \omega^4R^2 \tag{8.97}$$

εφόσον $\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 0$. Επιπλέον έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} = R^2\omega\omega\dot{\omega} = R^2\omega^2\dot{\omega} \tag{8.98}$$

Επομένως αντικαθιστώντας την εξίσωση (8) και την (8) στην εξίσωση (8) παίρνουμε

$$P = \frac{2}{3}\mathrm{e}^2\gamma^4[\dot{\omega}^2R^2 + \omega^4R^2 + R^4\gamma^2(\omega\dot{\omega})^2]$$

ή

$$P = \frac{2}{3}\mathrm{e}^2\gamma^6R^2\left[\dot{\omega}^2 + \frac{\omega^4}{\gamma^2}\right]$$

με το $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ και $v = |\boldsymbol{v}| = \omega R$.

Πρόβλημα 8.44 Ορίστε ένα πλαίσιο αναφοράς S' που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{V}$ παράλληλα στον άξονα x του πλαισίου αναφοράς S. Επίσης ορίστε τον άξονα x παράλληλα στον άξονα x' (του πλαισίου αναφοράς S') όπως φαίνεται στο σχήμα 1 . Ορίστε ένα ή περισσότερα πλαίσια αναφοράς S'' που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{V}'$ που βρίσκεται στο επίπεδο $x'y'$. Επιπλέον ο άξονας x'' (του συστήματος S'') είναι παράλληλος στον άξονα x', ο άξονας y'' (του συστήματος S'') είναι παράλληλος στον άξονα y' , ο άξονας z'' (του συστήματος S'') είναι παράλληλος στον άξονα z'. Βρείτε τη γωνία μεταξύ του άξονα x και του άξονα x'' όπως μπορεί να φανεί από το πλαίσιο αναφοράς S.
Το παραπάνω πρόβλημα μας λέει ότι αν δύο διανύσματα, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, είναι παράλληλα σε ένα τρίτο διάνυσμα, $\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{c})$ τότε δεν είναι παράλληλα $(\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b})$!

Λύση:

Από την άσκηση 8.20 οι γενικοί μετασχηματισμοί Lorentz σχηματίζουν δύο πλαίσια αναφοράς S και S' (όπου το S' κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ σε σχέση με το S)

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0 \tag{8.99}$$

$$x_0' = \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{8.100}$$

όπου $x_0 = ct$, $x_0' = ct'$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{V}/c$ και $\gamma = 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}$. Αν διαιρέσουμε την εξίσωση (8) με την (8) τότε θα έχουμε

$$\frac{\boldsymbol{x}'}{ct'} = \frac{\boldsymbol{x}/ct + [(\gamma - 1)/\beta^2](\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}/ct)\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}/ct)} \tag{8.101}$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε τον όρο $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{x}'/t'$ ως τη σταθερή ταχύτητα που ένας παρατηρητής βλέπει από το πλαίσιο αναφοράςS' και δίνεται μόνο στο επίπεδο $x'y'$. Υποθέστε ότι αυτή η ταχύτητα $\boldsymbol{V}'$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\boldsymbol{V}' = V' \cos\theta' \hat{\boldsymbol{i}}' + V' \sin\theta' \hat{\boldsymbol{j}}'$$

όπου $\hat{\boldsymbol{i}}'$, $\hat{\boldsymbol{j}}'$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος του άξονα x' y' αντίστοιχα, και θ' είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος $\boldsymbol{V}'$ και του άξονα x'. Μετά τον παραπάνω ορισμό, η εξίσωση (8) δίνει

$$\boldsymbol{V}' = \frac{\boldsymbol{v} + [(\gamma - 1)/\beta^2](\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{v}/c)}$$

Επίσης ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να ανακατασκευαστεί από το $\boldsymbol{\beta} \to -\boldsymbol{\beta}$. Συγκεκριμένα παίρνουμε

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{V}' + [(\gamma - 1)/\beta^2](\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{V}')\boldsymbol{\beta} + \gamma\boldsymbol{\beta}c}{\gamma(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{V}'/c)}$$

και οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$v_x = \frac{V' + \cos\theta' + (\gamma - 1)V' \cos\theta' + \gamma V}{\gamma(1 + (VV'/c^2)\cos\theta')} = \frac{V' \cos\theta' + V}{1 + (VV'/c^2)\cos\theta'}$$
$$v_y = \frac{V' \sin\theta'}{\gamma(1 + (VV'/c^2)\cos\theta')}$$
$$v_z = 0.$$

Διαιρώντας το v_y με το v_x παίρνουμε μια γωνία θ σε σχέση με τον άξονα x που ένας παρατηρητής στο S βλέπει όταν παρατηρεί την κίνηση του συστήματος αναφοράς S''. Συγκεκριμένα αυτή η γωνία δίνεται από

$$\tan\theta = \frac{V' \sin\theta'}{\gamma(V' \cos\theta' + V')} \tag{8.105}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο ας υπολογίσουμε τη γωνία που ένας παρατηρητής στο S'' μπορεί να δει όταν παρατηρεί την κίνηση ενός συστήματος αναφοράς S. Φανταστείτε το σύστημα S' που κινείται με ταχύτητα $-\boldsymbol{V}'$ σε σχέση με το S'' και μια ταχύτητα $-\boldsymbol{V}$ που παρατηρείται από ένα παρατηρητή στο S'. Επομένως από το γενικό μετασχηματισμό της ταχύτητας, η ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ που ένας παρατηρητής στο S'' μπορεί να δει αντί της $-\boldsymbol{V}$ που ένας παρατηρητής στο S' βλέπει, είναι

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{-\boldsymbol{V} - [(\gamma' - 1)c/V'^2](V'V\cos\theta')\boldsymbol{V}' - \gamma'\boldsymbol{V}'}{\gamma'(1 + (VV'/c^2)\cos\theta')}$$

όπου $\gamma' = 1/\sqrt{1 - (V'/c^2)^2}$, και οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\omega_x = \frac{-V - (\gamma' - 1)V\cos^2\theta' - \gamma'V'\cos\theta'}{\gamma'(1 + (VV'/c^2)\cos\theta')},$$
$$\omega_y = \frac{-(\gamma' - 1)V'\cos\theta'\sin\theta' - \gamma'V'\sin\theta'}{\gamma'(1 + (VV'/c^2)\cos\theta')}.$$

Επομένως ο παρατηρητής στο S'' μπορεί να δει μια γωνία θ'' μεταξύ των ω_x και ω_y. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\tan\theta'' = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{-\sin\theta'[(\gamma' - 1)V\cos\theta' - \gamma'V']}{-V - \cos\theta'[(\gamma' - 1)V\cos\theta' + \gamma'V']} \tag{8.108}$$

Από την εξίσωση (8) και την (8) σημειώστε ότι $\theta'' \neq \theta'$ και η γωνία $\phi = \theta'' - \theta$ μεταξύ του άξονα x του συστήματος S και του άξονα x'' του συστήματος S'' θα είναι

$$\tan\phi = \frac{\tan\theta'' - \tan\theta}{1 + \tan\theta''\tan\theta}$$

όπου τα $\tan\theta''$ και $\tan\theta$ δίνονται από την εξίσωση (8) και (8) αντίστοιχα.

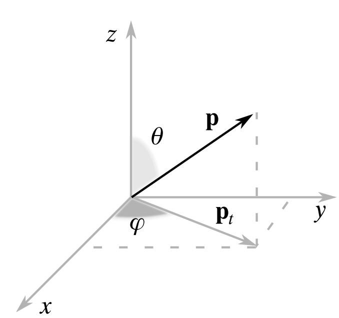
Πρόβλημα 8.45 Έστω ένα σωματίδιο μάζας m και ορμής $\boldsymbol{p}$. Θεωρήστε ότι η ορμή, $\boldsymbol{p}$, μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα (p_t, θ, ϕ, m), όπου

$$p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

είναι η εγκάρσια συνιστώσα της ορμής σε σχέση με τον άξονα z, θ είναι η πολική γωνία σε σχέση με τον άξονα z, και ϕ είναι η αζιμουθιακή γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα 8.11. Ένας ακόμη τρόπος για να περιγραφεί η κινηματική του παραπάνω σωματιδίου είναι μέσα από τη μεταβλητή της *ωκύτητας*, y, που ορίζεται ως εξής

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right)$$

όπου $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ είναι η ενέργεια του σωματιδίου, και $p_z = p\cos\theta$ είναι η επιμήκης συνιστώσα του $\boldsymbol{p}$ κατά μήκος του άξονα z.



Σχήμα 8.11: *Το διάνυσμα της ορμής σε σφαιρικές συντεταγμένες.*

(α) Να αποδείξετε ότι η ωκύτητα, y, μπορεί να γραφτεί ως

$$y = \tanh^{-1}\left(\frac{p_z}{E}\right)$$

Επίσης να αποδείξετε τις ακόλουθες σχέσεις

$$E = E_t \cosh y,$$
$$p_z = E_t \sinh y,$$

όπου $E_t = \sqrt{p_t^2 + m^2}$ είναι η εγκάρσια ενέργεια του σωματιδίου.
(β) Να αποδείξετε ότι η ωκύτητα, y, μπορεί να μετασχηματιστεί ως ακολούθως

$$y \to y + \tanh^{-1} V$$

υπό τους μετασχηματισμούς Lorentz, όπου V είναι η ταχύτητα (κατά τον άξονα z) ενός συστήματος αναφοράς S' που κινείται σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς S στο οποίο το σωματίδιο μάζας m κινείται.
(γ) Για ένα υπερ-σχετικιστικό σωματίδιο, $(p \gg m)$, θεωρήστε ότι η ωκύτητα, y, επαναορίζεται ως η $(y \to \eta)$. Σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται *ψευδο-ωκύτητα*. Να αποδείξετε την ακόλουθη σχέση μεταξύ της ωκύτητας y, της ψευδο-ωκύτητας, η, και της εγκάρσιας ορμής, p_t

$$p_t = \frac{m \sinh y}{\sqrt{\sinh^2 \eta - \sinh^2 y}}$$

Θεωρήστε ότι για την ταχύτητα του φωτός, $c = 1$.

Λύση:

(α) Η ωκύτητα, y, ξαναγράφεται ως

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + p_z/E}{1 - p_z/E} \right)$$

ή

$$\mathrm{e}^{2y} = \frac{1 + p_z/E}{1 - p_z/E}$$

και λύνοντας ως προς p_z/E έχουμε

$$\frac{p_z}{E} = \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{\mathrm{e}^{2y} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}} = \tanh^{-1} y$$

και αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$y = \tanh^{-1} \left(\frac{p_z}{E} \right) \tag{8.111}$$

Από το σχήμα 8.11 σημειώστε ότι $p_z = p \cos\theta$, και ξέρουμε ότι $p = m\gamma\beta$, $E = m\gamma$, όπου $\beta = v/c = v$ διότι θεωρήσαμε ότι $c = 1$, επομένως η ωκύτητα, y, ξαναγράφεται ως

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta \cos\theta}{1 - \beta \cos\theta} \right) \tag{8.112}$$

όπου $p_z/E = \beta \cos\theta$. Αντιστρέφοντας την εξίσωση (8) και λύνοντας ως προς $\beta \cos\theta$ ή απ' ευθείας από την εξίσωση (8) έχουμε

$$\frac{p_z}{E} = \beta \cos\theta = \tanh y \tag{8.113}$$

ή

$$P_z = E \tanh y \tag{8.114}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (8) στην ενέργεια $E^2 = p_t^2 + p_z^2 + m^2 = E_t^2 + p_z^2$, έχουμε

$$E^2 = E_t^2 + E^2 \tanh^2 y \tag{8.115}$$

και λύνοντας ως προς E, βρίσκουμε

$$E = E_t \cosh y \tag{8.116}$$

διότι $1-(\sinh y/\cosh y)^2 = 1/\cosh^2 y$. Επίσης από την εξίσωση (8) και (8) παίρνουμε

$$p_z = E_t \sinh y$$

(β) Η ωκύτητα, y', στο νέο σύστημα αναφοράς S' που κινείται με ταχύτητα V κατά μήκος του άξονα z σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς S, είναι

$$y' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E'+p'_z}{E'-p'_z}\right) \tag{8.117}$$

όπου η νέα ενέργεια E' και η διαμήκης ορμή p'_z δίνονται από τους μετασχηματισμούς Lorentz

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - Vp_z), \\ p'_z &= \gamma(p_z - VE), \\ p'_x &= p_x, \\ p'_y &= p_y, \end{aligned}$$

όπου $c=1$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (8), η ωκύτητα, y', ανάγεται στην

$$y' = \frac{1}{2}\ln[\frac{(E+p_z)(1-V)}{(E-p_z)(1+V)}] = y + \frac{1}{2}\ln\frac{1-V}{1+V} \tag{8.122}$$

Ας ονομάσουμε τον όρο $(1/2)\ln[(1-V)/(1+V)] = \omega$. Αντιστρέφοντας αυτή τη σχέση και λύνοντας ως προς V, έχουμε

$$V = \frac{e^{2\omega}-1}{e^{2\omega}+1} = \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{e^{\omega}+e^{-\omega}} = \tanh\omega$$

ή

$$\omega = \tanh^{-1} V$$

επομένως η εξίσωση (8) γράφεται ως

$$y' = y + \tanh^{-1} V$$

(γ) Για ένα υπερ-σχετικιστικό σωματίδιο $\beta \to 1$, η ωκύτητα, y, ονομάζεται ψευδο-ωκύτητα, η και δίνεται από την εξίσωση (8) ως άκολούθως

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2\cos^2\theta/2-1}{1-1+2\sin^2\theta/2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\tan\theta/2}\right)$$

ή

$$\eta = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8) έχουμε για την ψευδο-ωκύτητα, η, $\cos\theta = \tanh\eta$ ή

$$\sin^2\theta = 1 - cos^2\theta = 1 - \tanh^2\eta = \frac{1}{\cosh^2\eta} \tag{8.123}$$

Επιπλέον από την εξίσωση (8),

$$\cosh^2 y = \frac{E^2}{E_t^2} = \frac{p^2+m^2}{E_t^2} = \frac{p_t^2/\sin^2\theta + m^2}{E_t^2} \tag{8.124}$$

διότι $p_t = p\sin\theta$. Συνδυάζοντας την εξίσωση (8) με την (8) έχουμε

$$\cosh^2 y = \frac{p_t^2\cosh\eta + m^2}{p_t^2+m^2}$$

και λύνοντας ως προς p_t παίρνουμε

$$p_t = \frac{m\sinh y}{\sqrt{\sinh^2\eta - \sinh^2 y}}$$

Πρόβλημα 8.46 Να αποδείξετε ότι η μέγιστη μεταφορά κινητικής ενέργειας σε ένα ηλεκτρόνιο μάζας m ως αποτέλεσμα μιας σύγκρουσης με ένα σωματίδιο μάζας M και ταχύτητας $\beta = v/c$ είναι ίση με

$$T_{\max} = 2m\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\left[1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2\frac{m}{M}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]^{-1}$$

όπου θεωρούμε ότι ταχύτητα του φωτός $c = 1$. Επιπλέον, βρείτε την $T_{\max}$ για τη μη-σχετικιστική περίπτωση (θεωρήστε $\beta \ll 1$).

Λύση:

Όπως φαίνεται στο σχήμα 8.13, η ορμή, p, του σωματιδίου με μάζα M είναι $p = M\beta\gamma = M\eta$, όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ και $\eta = \beta\gamma$. Επίσης ορίζουμε $s = m/M$.
Η διατήρηση της ενέργειας δίνει

$$\sqrt{p^2 + M^2} + m = \sqrt{p_1^2 + M} + E_2 \tag{8.125}$$

όπου E_2 και p_1 είναι η ενέργεια της μάζας M και η ορμή της μάζας m αντίστοιχα. Επίσης τετραγωνίζοντας την εξίσωση (8) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ορμής p, έχουμε

$$(M\sqrt{1+\eta^2} + m - E_2)^2 = p_1^2 + M^2$$

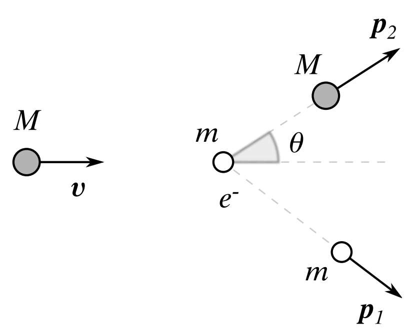
ή

$$(M\sqrt{1+\eta^2} + m)^2 + E_2^2 - 2E_2(M\sqrt{1+\eta^2} + m) = p_1^2 + M^2 = p^2 + p_2^2 - 2pp_2\cos\theta + M^2 \tag{8.126}$$

όπου θ είναι η γωνία της ορμής $\boldsymbol{p}_2$ και $\boldsymbol{p}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 8.12. Επίσης στην παραπάνω εξίσωση, χρησιμοποιήθηκε η διατήρηση της ορμής

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \Rightarrow \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2$$

ή



Σχήμα 8.12

$$p_1^2 = p^2 + p_2^2 - 2pp_2\cos\theta$$

Μετά από χρήση της άλγεβρας, η εξίσωση (8) ανάγεται σε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς E_2

$$\begin{aligned} E_2^2(1 + \eta^2\sin^2\theta + s^2 2s\sqrt{1+\eta^2}) - 2E_2Ms(\sqrt{1+\eta^2} + s)^2 + \eta^2 m^2\cos\theta + \\ M^2 s^2(s + \sqrt{1+\eta^2})^2 = 0. \end{aligned} \tag{8.127}$$

Η διακρίνουσα, Δ, της παραπάνω εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι

$$\Delta = 4m^2[(x+\eta^2)^2 - (x + \eta^2\sin^2\theta)(\eta^2\cos\theta + x + \eta^2)]$$

όπου $x = 1 + 2s\sqrt{1+\eta^2} + s^2$. Επομένως μια πραγματική λύση της εξίσωσης (8) ως προς την ενέργεια μάζας m, E_2, είναι

$$E_2 = \frac{Ms(x+\eta^2) + m\sqrt{(x+\eta^2)^2 - (x+\eta^2\sin^2\theta)(\eta^2\cos\theta + \eta^2 + x)}}{x + \eta^2\sin^2\theta}$$

Διαφορίζοντας την E_2 σε σχέση με το θ μπορούμε να δούμε ότι η μέγιστη ενέργεια E_2 αντιστοιχεί σε $\theta = 0$ και συνεπώς η μέγιστη ενέργεια της μάζας m είναι

$$E_2^{max} = m\frac{x + 2\eta^2}{x} = m + \frac{2m\eta^2}{x}$$

και η μέγιστη κινητική ενέργεια, $T_{\max}$, είναι

$$T_{\max} = E_2^{max} - m = \frac{2m\eta^2}{x}$$

ή χρησιμοποιώντας την έκφραση του x, παίρνουμε

$$T_{\max} = \frac{2m\eta^2}{1 + 2s\sqrt{1+\eta^2} + s^2}$$

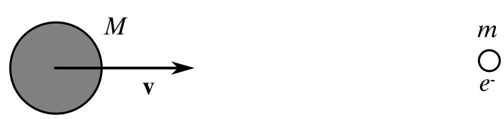
ή χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των s και η έχουμε

$$T_{\max} = 2m\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\left[1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2\frac{m}{M}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]^{-1} \tag{8.128}$$

διότι $1 + \eta^2 = 1 + \beta^2\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$, όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.
Στη μη-σχετικιστική περίπτωση $\beta \to 0$ και $\gamma \to 0$, επομένως η εξίσωση (8) ανάγεται στην

$$T_{\max} = \frac{4mM}{(m+M)^2}T$$

όπου $T = (1/2)Mv^2$ είναι η κινητική ενέργεια της μάζας M.



Σχήμα 8.13: *Μάζα M συγκρούεται με ηλεκτρόνιο μάζας m*

Πρόβλημα 8.47 Θεωρήστε σωματίδιο μάζας m και φορτίου q που κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$ υπό τις αρχικές συνθήκες

$$\boldsymbol{r}(0) = y_0\hat{\boldsymbol{y}} + z_0\hat{\boldsymbol{z}},$$
$$\boldsymbol{v}(0) = v_{0x}\hat{\boldsymbol{x}} + v_{0y}\hat{\boldsymbol{y}} + v_{0z}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Βρείτε την εξίσωση κίνησης για τα $y(t)$, $z(t)$ και επιπλέον να αποδείξετε ότι η κίνηση του σωματιδίου στο επίπεδο (z, y) είναι κύκλος ακτίνας $r_0 = m\sqrt{v_{0y}^2 + v_{0z}^2}/qB$ (ακτίνα Larmor).

Λύση:

Η εξίσωση κίνησης για το φορτισμένο σωματίδιο δίνεται από

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \frac{qB}{c}(v_z\hat{\boldsymbol{y}} - v_y\hat{\boldsymbol{z}}) \tag{8.131}$$

Να σημειώσετε ότι η ενέργεια $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ του σωματιδίου δίνει

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{c}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = 0$$

συνεπώς η ενέργεια E είναι σταθερή ποσότητα, $E = E(t=0) = \sqrt{c^2p_0^2 + m^2c^4}$ = σταθερή, όπου $p_0 = m\gamma(v_0)\boldsymbol{v}_0$ είναι το μέτρο της ορμής την $t = 0$. Να σημειώσετε ότι $\boldsymbol{p} = m\gamma(v)\boldsymbol{v} = (E/c^2)\boldsymbol{v} = (E_0/c^2)\boldsymbol{v}$, επομένως η εξίσωση (8) γράφεται ως

$$\frac{E_0}{c^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{c}(v_z\hat{\boldsymbol{y}} - v_y\hat{\boldsymbol{k}}) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{qBc}{E_0}(v_z\hat{\boldsymbol{y}} - v_y\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{8.132}$$

ή μπορούμε να το αναλύσουμε σε τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες ως ακολούθως

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \omega v_z, \tag{8.133}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -\omega v_y, \tag{8.134}$$

όπου $\omega = qBc/E_0$ είναι η συχνότητα Larmor στη σχετικότητα, κλασσικά $\omega_{classical} = qB/E_0$. Σημειώστε ότι εισάγοντας την εξίσωση (8) και την εξίσωση (8) παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_y + iv_z) = -i\omega(v_y + iv_z) \Rightarrow v_y + iv_z = (v_{0y} + iv_{0z})\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

συνεπώς η συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας $\boldsymbol{v}$ η κάθετη στο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ περιφέρεται με ταχύτητα ω και επιπλέον $|v_y + iv_z| = |v_{0y} + iv_{0z}|$ = σταθερή.
Από την εξίσωση (8) παίρνουμε για τις χωρικές συντεταγμένες (y, z) του σωματιδίου

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y + iz) = (v_{0y} + iv_{0z})\mathrm{e}^{-\omega t}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_{0y}\cos(\omega t) + v_{0z}\sin(\omega t) \Rightarrow y = y_0 - \frac{v_{0z}}{\omega} + \frac{1}{\omega}(v_{0y}\sin(\omega t) - v_{0z}\cos(\omega t)),$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_{0z}\cos(\omega t) - v_{0y}\sin(\omega t) \Rightarrow z = z_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{1}{\omega}\big(v_{0z}\sin(\omega t) + v_{0y}\cos(\omega t)\big),$$

ή σε μιγαδική αναπαράσταση

$$\left(y - y_0 + \frac{v_{0z}}{\omega}\right) + i\left(z - z_0 - \frac{v_{0y}}{\omega}\right) = \frac{i}{\omega}\left(v_{0y} + iv_{0z}\right)\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Ορίζοντας $Y = y_0 - v_{0z}/\omega$ και $Z = z_0 + v_{0y}/\omega$ η ορμή της παραπάνω εξίσωσης γράφεται ως

$$(y - Y)^2 + (z - Z)^2 = \frac{(v_{0y}^2 + v_{0z}^2)}{\omega^2} = r_0^2$$

όπου r_0 ονομάζεται ακτίνα Larmor. Σημειώστε ότι η κίνηση του σωματιδίου στο επίπεδο (y, z) είναι κύκλος ακτίνας Larmor $r_0 = \sqrt{v_{0y}^2 + v_{0z}^2}/\omega = E_0\sqrt{v_{0y}^2 + v_{0z}^2}/qcB$.

Πρόβλημα 8.48 Θεωρήστε σωματίδιο ορμής p' και ενέργειας E' που σχηματίζει γωνία θ' σε σύστημα ΚΜ σε σχέση με την αρχική κατεύθυνση του προσπίπτοντος συγκρουόμενου σωματιδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.14. Να αποδείξετε ότι η γωνία θ στο σύστημα του εργαστηρίου δίνεται από

$$\tan\theta = \frac{1}{\gamma(v)}\frac{p'\sin\theta'}{p'\cos\theta' + \beta E'}$$

όπου $\gamma = (1 - \beta^2)^{1/2}$ είναι ο παράγοντας Lorentz.

Λύση:

Ο μετασχηματισμός Lorentz μεταξύ του συστήματος εργαστηρίου και του συστήματος ΚΜ δίνεται από

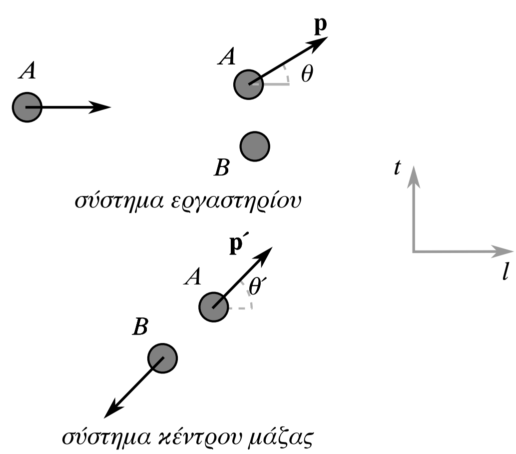
$$p_t = p'_t,$$
$$p_l = \gamma(p'_l + \beta E'),$$

για την εγκάρσια και την επιμήκη συνιστώσα της ορμής p (σύστημα εργαστηρίου), p' (σύστημα ΚΜ) αντίστοιχα. Διαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε

$$\tan\theta = \frac{p_t}{p_l} = \frac{p'_t}{\gamma(p'_l + \beta E')} \tag{8.140}$$

Σημειώστε ότι $\cos\theta' = p'_l/p'$ και $\sin\theta' = p'_t/p'$, συνεπώς η εξίσωση (8) ανάγεται στην

$$\tan\theta = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{p' \sin\theta'}{p' \cos\theta' + \beta E'}$$



Σχήμα 8.14: *Σύγκρουση των δύο σωματιδίων στο σύστημα εργαστηρίου και το σύστημα ΚΜ*

Πρόβλημα 8.49 (α) Βρείτε τι γίνεται η μονοδιάσταση κυματική εξίσωση

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = 0 \tag{8.141}$$

υπό το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου

$$x \to x' = x + vt \tag{8.142}$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός και v η ταχύτητα του συστήματος συντεταγμένων x' σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων x.
(β) Η αρχική κυματική εξίσωση ικανοποιείται από επίπεδα κύματα $psi(x,t) \sim \exp^{ik(x-ct)}$ όπου η ταχύτητα φάσης είναι c (k είναι κάποια σταθερά). Ποιά είναι η φασική ταχύτητα των λύσεων επιπέδου κύματος της μετασχηματισμένης εξίσωσης;

Λύση:

(α) Η μονοδιάσταση κυματική εξίσωση (8.49), γίνεται υπό το μετασχηματισμό $x \to x'$ (εξ. 8.49)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x',t) = 0 \tag{8.143}$$

Σημειώστε ότι

$$\frac{\partial}{\partial x'}\psi(x',t) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)$$

εφόσον $\mathrm{d}x/\mathrm{d}x' = 1$, σύμφωνα με την εξίσωση (8.49), (x και t είναι ανεξάρτητες μεταβλητές). Επιπλέον, φανερά εφόσον το $\psi(x',t)$ εξαρτάται από το t μέσω του x' και του ίδιου του t , έχουμε (καλώντας το t στο όρισμα του ψ προς το παρόν t')

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'}\psi(x',t') = \left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x'}\right)\psi(x',t') = \\ \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\psi(x',t') = \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)\end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση (8) γίνεται

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\psi(x,t) = 0 \tag{8.144}$$

που φανερώνει ότι η εξίσωση δεν είναι αναλλοίωτη υπό το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.
(β) Η αρχική εξίσωση 8.49 μπορεί να γραφτεί ως

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t) = 0$$

και επομένως έχει προφανώς λύσεις επιπέδου κύματος της μορφής

$$\mathrm{e}^{ik(x-ct)}, \qquad \mathrm{e}^{ik(x+ct)}$$

του οποίου η φασική ταχύτητα είναι c.
Από την άλλη πλευρά η μετασχηματισμένη εξίσωση (8) μπορεί να γραφτεί ως

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c-v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c+v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t) = 0$$

και επομένως οι λύσεις επιπέδου κύματός της είναι της μορφής

$$\mathrm{e}^{ik(x-ct-vt)}, \qquad \mathrm{e}^{ik(x+ct-vt)}$$

του οποίου η φασική ταχύτητα είναι $c \pm v$.

Πρόβλημα 8.50 Βρείτε το μετασχηματισμό Lorentz που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα του μετασχηματισμού

$$\begin{aligned}x' &= \gamma_1(x - v_1 t)\\ t' &= \gamma_1(t - \beta_1 x/c)\\ y' &= y\\ z' &= z\end{aligned} \tag{8.145}$$

που ακολουθείται από:

$$\begin{aligned} x'' &= x' \\ z'' &= z' \\ y'' &= \gamma_2(y' - v_2 t') \\ t'' &= \gamma_2(t' - y'\beta_2/c) \end{aligned} \tag{8.146}$$

και συγκρίνετέ το με το μετασχηματισμό Lorentz που αντιστοιχεί στους παραπάνω μετασχηματισμούς εφαρμοσμένους με ανάποδη σειρά.
Να συμπεράνετε από το παραπάνω παράδειγμα ότι στη σχετικιστική πρόσθεση δύο κάθετων ταχυτήτων παίρνουμε

$$(\boldsymbol{\beta_1} + \boldsymbol{\beta_2})^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^2$$

Λύση:

Από τις εξισώσεις (8.50) και την (8.50) παίρνουμε

$$\begin{aligned} x'' = x' &= \gamma_1(x - v_1 t) \\ z'' = z' &= z \\ y'' = \gamma_2(y' - v_2 t') &= \gamma_2(y - v_2\gamma_1(t - \beta_1 x/c)) \\ t'' = \gamma_2(t' - y'\beta_2/c) &= \gamma_2(\gamma_1(t - \beta_1 x/c) - y\beta_2/c) \end{aligned} \tag{8.147}$$

Αν εκτελέσουμε τους μετασχηματισμούς με ανάποδη σειρά έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= x \\ z' &= z \\ y' &= \gamma_2(y - v_2 t) \\ t' &= \gamma_2(t - y\beta_2/c) \end{aligned}$$

και τότε

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_1(x' - v_1 t') \\ t'' &= \gamma_1(t' - \beta_1 x'/c) \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_1(x - v_1\gamma_2(t - y\beta_2/c)) \\ t'' = \gamma_1(t' - \beta_1 x'/c) &= \gamma_1(\gamma_2(t - y\beta_2/c) - \beta_1 x/c) \\ y'' = y' &= \gamma_2(y - v_2 t) \\ z'' = z' &= z \end{aligned} \tag{8.148}$$

Προφανώς οι δύο μετασχηματισμοί είναι πολύ διαφορετικοί, επιδεικνύοντας ότι οι μετασχηματισμοί κατά μήκος διαφορετικών κατευθύνσεων δεν αντιμετατίθενται.
Γνωρίζουμε ότι για μια τυχαία κατεύθυνση $\boldsymbol{\beta}^*$ ο μετασχηματισμός Lorentz της συνιστώσας του χρόνου είναι

$$t'' = \gamma^*(t - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta}^*/c)$$

Συγκρίνοντας τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες μπροστά από το t στα προηγούμενα αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι για οποιαδήποτε από τις δύο sequences $\gamma^* = \gamma_1\gamma_2$.

Εφόσον το γ εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητας μόνο, αυτό δείχνει ότι το μέτρο του $\boldsymbol{\beta}^*$ για τις δύο sequences είναι το ίδιο, και από τη σχέση

$$\left(\frac{1}{\gamma^*}\right)^2 = \left(\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\right)^2$$

παίρνουμε

$$1 - \beta^{*2} = (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2) \Rightarrow \beta^{*2} = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^2$$

Επιπλέον μπορούμε να ελέγξουμε τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες μπροστά από το $\boldsymbol{r}$. Από την εξίσωση (8) έχουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^* &= \boldsymbol{\beta}_1 + \frac{\boldsymbol{\beta_2}}{\gamma_1} \\
\Rightarrow \beta^{*2} &= \left(\boldsymbol{\beta}_1 + \frac{\boldsymbol{\beta_2}}{\gamma_1}\right)^2 = \beta_1^2 + \frac{\beta_2^2}{\gamma_1^2} = \beta_1^2 + \beta_2^2(1 - \beta_1^2) = \beta_1^2 + \beta_2^2 \\
&= \beta_1^2\beta_2^2
\end{aligned}$$

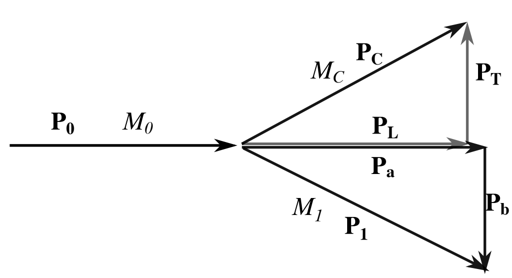
εφόσον $\boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2 = 0$. Παρόμοια από την εξίσωση (8) έχουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^* &= \boldsymbol{\beta}_1 + \frac{\boldsymbol{\beta_2}}{\gamma_1} \\
\Rightarrow \beta^{*2} &= \left(\boldsymbol{\beta}_2 + \frac{\boldsymbol{\beta_1}}{\gamma_2}\right)^2 - \beta_2^2 + \frac{\beta_1^2}{\gamma_1^2} = \beta_2^2 + \beta_1^2(1 - \beta_2^2) = \beta_1^2 + \beta_2^2 \\
&= \beta_1^2\beta_2^2
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 8.51 Σωματίδιο μάζας M_o και ορμής P_o διασπάται σε δύο σωματίδια μάζας M_c και M_1, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.15. Θεωρήστε ότι η ορμή του σωματιδίου c και 1 είναι $\boldsymbol{P}_c = (P_T, P_L)$ και $\boldsymbol{P}_1 = (P_a, P_b)$ αντίστοιχα.
(α) Να εκφράσετε την ορμή του προσπίπτοντος σωματιδίου P_o συναρτήσει των μεταβλητών M_o, M_c, M_1, P_L, P_T.
(β) Να αποδείξετε ότι η ορμή P_o του προσπίπτοντος σωματιδίου, όπως φαίνεται από ένα σύστημα συντεταγμένων για το οποίο $P_L = 0$, ανάγεται στην ακόλουθη έκφραση

$$P_o'^2 = \frac{(M_o^2 - M_1^2 - M_c^2)^2 - 4M_1^2M_c^2 - 4M_o^2P_T^2}{4(P_T^2 + M_c^2)}$$

όπου $P_o' = P_o$ σ' αυτό το ειδικό σύστημα συντεταγμένων. Σημειώστε ότι το $P_o'^2$ είναι αναλλοίωτο με την έννοια ότι η κατανομή στο $P_o'^2$ είναι ανεξάρτητη της προσπίπτουσας ορμής.
Σχεδιάστε την P_o^2 συναρτήσει της P_T για τις διασπάσεις Υπερονίου $\Xi^0 \to \Lambda\gamma$ και $\Xi^0 \to \Lambda\pi^0$.



Σχήμα 8.15: *Διανυσματικός ορισμός διαφόρων ποσοτήτων της διάσπασης σε δύο σωματίδια $M_o \to M_c M_1$.*

Λύση:

(α) Η διατήρηση της ορμής μας δίνει: $\boldsymbol{P}_o = \boldsymbol{P}_c + \boldsymbol{P}_1$, ή εάν αναλυθεί στη διαμήκη και την εγκάρσια κατεύθυνση, παίρνουμε

$$\begin{aligned} P_o &= P_L + P_a \\ P_T &= P_b. \end{aligned}$$

Επομένως, η ορμή P_1 μπορεί να γραφτεί ως

$$P_1^2 = (P_o - P_L)^2 + P_T^2 \tag{8.151}$$

Επιπλέον, από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\sqrt{P_o^2 + M_o^2} = U_c + \sqrt{P_1^2 + M_1^2} \tag{8.152}$$

όπου $U_c^2 = P_c^2 + M_c^2 = P_T^2 + P_L^2 + M_c^2$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (8) και (8), μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\begin{aligned} -4(P_T^2 + M_c^2)P_o^2 + \\ 4P_L(M_o^2 - M_1^2 + M_c^2)P_o + \\ (M_o^2 - M_1^2 - M_c^2)^2 + 4(P_L^2 + P_T^2)^2 - 4(P_L^2 + P_T^2)(M_o^2 - M_1^2 - M_c^2) \\ -4U_c^2(P_L^2 + P_T^2 + M_1^2) = 0, \end{aligned} \tag{8.153}$$

αφού απαλείψουμε την παράμετρο P_1. Η διακρίνουσα της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης ανάγεται στην

$$\frac{\Delta^2}{16} = U_c^2[(M_o^2 - M_1^2 - M_c^2)^2 - 4M_1^2 M_c^2 - 4M_o^2 P_T^2]$$

συνεπώς οι δύο λύσεις της εξίσωσης (8) είναι

$$P_o = \frac{P_L(M_o^2 - M_1^2 - M_c^2) \pm U_c\sqrt{(M_o^2 - M_1^2 - M_c^2)^2 - 4M_1^2 M_c^2 - 4M_o^2 P_T^2}}{2(P_T^2 + M_c^2)} \tag{8.154}$$

(β) Σημειώστε ότι στην περίπτωση όπου $P_L = 0$, το $P_o' = P_a$ είναι ισοδύναμο με τη διαμήκη ορμή του $\boldsymbol{P}_1$ σ' αυτό το ειδικό σύστημα συντεταγμένων. Επίσης, η εξίσωση (8) ανάγεται στην ακόλουθη έκφραση

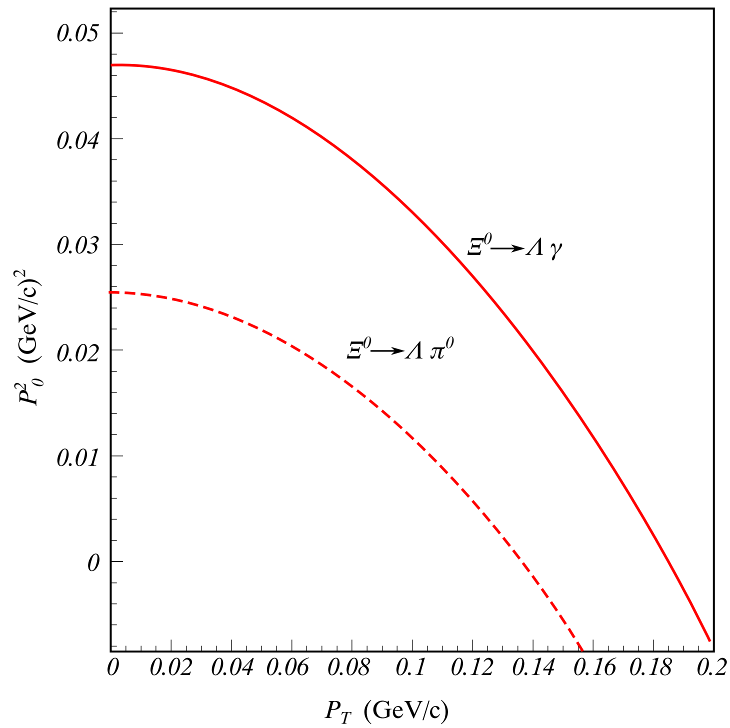
$$P_o'^2 = \frac{(M_o^2 - M_1^2 - M_c^2)^2 - 4M_1^2 M_c^2 - 4M_o^2 P_T^2}{4(P_T^2 + M_c^2)}$$

εφόσον $U_c^2 = P_T^2 + M_c^2$ στην περίπτωση όπου $P_L = 0$.

Πρόβλημα 8.52 Θεωρήστε ουδέτερο σωματίδιο Cascade Ξ^0 που παράγεται σε ένα στόχο ο οποίος βρίσκεται στο $(0, 0, 0)$ (αρχή αξόνων ενός συστήματος συντεταγμένων) και που διασπάται μέσα από το Κανονικό κανάλι διάσπασής του, $\Xi^0 \to \Lambda\pi^0$ με $\pi^0 \to \gamma\gamma$, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.17β. Στην περίπτωση όπου ένα από τα παραγόμενα γ λείπει, αυτή η διάσπαση δείχνει πανομοιότυπη με τη διάσπαση Radiative Cascade, $\Xi^0 \to \Lambda\gamma$, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.17α.

Εκφράστε τη ορμή και τη μάζα, P M, του μητρικού σωματιδίου που παράγει ένα σωματίδιο Λ και ένα φωτόνιο γ με παρατηρούμενες ορμές $(P_{\Lambda x}, P_{\Lambda y}, P_{\Lambda z})$ και $(P_{\gamma_1 x}, P_{\gamma_1 y}, P_{\gamma_1 z})$ αντίστοιχα, υπό την υπόθεση ότι το απαρατήρητο γ_2 που λείπει σχηματίζει τη μάζα ενός ουδέτερου πιονίου, π^0, μαζί με το παρατηρούμενο, γ_1. Είναι αυτός ο υπολογισμός μοναδικά καθορισμένος; Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια έρευνα του Neutral Radiative decay $\Xi^0 \to \Lambda\gamma$ όπου η κύρια πηγή υποβάθρου συνεισφέρει στη διάσπαση του Normal Cascade, $\Xi^0 \to \Lambda\pi^0$ και $\pi^0 \to \gamma\gamma$, όπου ένα από τα παραγόμενα φωτόνια έχει διαφύγει του ανιχνευτή.

Στην περίπτωση που το υπόβαθρο έρχεται από τη διάσπαση Neutral Radiative Cascade $\Xi^0 \to \Sigma^0\gamma$, με $\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$, η ίδια τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί για να εκτιμηθεί ένα απαρατήρητο γ_2 στην περίπτωση που $\Lambda\gamma_2$ σχηματίζουν μια ουδέτερη σωματιδιακή μάζα Σ^0, γνωρίζοντας την ορμή των Λ, $(P_{\Lambda x}, P_{\Lambda y}, P_{\Lambda z})$, και την ορμή του παρατηρούμενου φωτονίου γ_1, $(P_{\gamma_1 x}, P_{\gamma_1 y}, P_{\gamma_1 z})$.



Σχήμα 8.16: *P_o^2 συναρτήσει του P_T διασπάσεις Υπερονίου $\Xi^0 \to \Lambda\gamma$ και $\Xi^0 \to \Lambda\pi^0$.*

Λύση:

Η διατήρηση της ορμής για τη διάσπαση $M \to \Lambda\gamma_1\gamma_2$ θα δώσει

$$P\frac{x_c}{r} = P_{\Lambda x} + P_{\gamma_1 x} + P_{\gamma_2 x} \Rightarrow P_{\gamma_2 x} = P\frac{x_c}{r} - \alpha$$
$$P\frac{y_c}{r} = P_{\Lambda y} + P_{\gamma_1 y} + P_{\gamma_2 y} \Rightarrow P_{\gamma_2 y} = P\frac{y_c}{r} - \beta$$
$$P\frac{z_c}{r} = P_{\Lambda z} + P_{\gamma_1 z} + P_{\gamma_2 z} \Rightarrow P_{\gamma_2 z} = P\frac{z_c}{r} - \gamma,$$

όπου, $r = (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2)^{1/2}$, $\alpha = P_{\Lambda x} + P_{\gamma_1 x}$, $\beta = P_{\Lambda y} + P_{\gamma_1 y}$, και $\gamma = P_{\Lambda z} + P_{\gamma_1 z}$.
Η ορμή του απαρατήρητου φωτονίου, γ_2, μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} P_{\gamma_2}^2 = P_{\gamma_2 x}^2 + P_{\gamma_2 y}^2 + P_{\gamma_2 z}^2 = \\ \left(P\frac{x_c}{r} - \alpha\right)^2 + \left(P\frac{y_c}{r} - \beta\right)^2 + \left(P\frac{z_c}{r} - \gamma\right)^2 = \\ P_{\gamma_2} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2P\frac{\alpha x_c + \beta y_c + \gamma z_c}{r} = \\ P_{\gamma_2} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2P\theta, \end{aligned}$$

όπου $\theta = (\alpha x_c + \beta y_c + \gamma z_c)/r$.
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον περιορισμό ότι τα δύο φωτόνια σχηματίζουν μια μάζα π^0, $m_{\pi^0} = 0.135\ \mathrm{GeV}/c^2$, και να πάρουμε την ακόλουθη έκφραση

$$\begin{aligned} m_{\pi^0}^2 = (E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2})^2 - (\boldsymbol{P}_{\gamma_1} + \boldsymbol{P}_{\gamma_2})^2 = \\ 2E_{\gamma_1}P_{\gamma_2} - 2(P_{\gamma_1 x}P_{\gamma_2 x} + P_{\gamma_1 y}P_{\gamma_2 y} + P_{\gamma_1 z}P_{\gamma_2 z}), \end{aligned} \tag{8.158}$$

όπου E_{γ_1} είναι η ενέργεια του παρατηρούμενου φωτονίου, και $P_{\gamma_2} = E_{\gamma_2}$ εφόσον έχουμε να κάνουμε με ένα άμαζο φωτόνιο. Επιπλέον, η εξίσωση (8) ανάγεται στην

$$\frac{m_{\pi^0}^2}{2} + (P_{\gamma_1 x}P_{\gamma_2 x} + P_{\gamma_1 y}P_{\gamma_2 y} + P_{\gamma_1 z}P_{\gamma_2 z}) = E_{\gamma_1}P_{\gamma_2} \tag{8.159}$$

Συνδυάζοντας την (8) με τις συναρτήσεις (8.35), παίρνουμε για την εξίσωση (8)

$$
\begin{aligned}
\frac{m_{\pi^0}^2}{2} + P_{\gamma_1 x}\left(P\frac{x_c}{r} - \alpha\right) + P_{\gamma_1 y}\left(P\frac{y_c}{r} - \beta\right) + P_{\gamma_1 z}\left(P\frac{z_c}{r} - \gamma\right) &= \\
\frac{m_{\pi^0}^2}{2} - \left(\alpha P_{\gamma_1 x} + \beta P_{\gamma_1 y} + \gamma P \gamma_1 z\right) + P\frac{x_c P_{\gamma_1 x} + x_c P_{\gamma_1 x} + y_c P_{\gamma_1 z}}{r} &= \\
E_{\gamma_1} P_{\gamma_2} &\Rightarrow \\
(P\nu + \mu)^2 = E_{\gamma_1}^2 (P^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2P\theta)&,
\end{aligned}
\tag{8.160}
$$

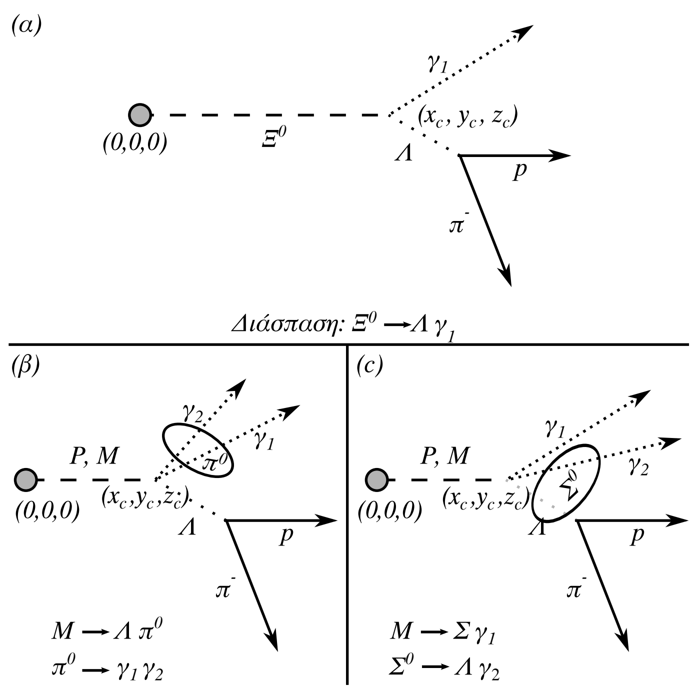
όπου $\mu = m_{\pi^0}^2/2 - (\alpha P_{\gamma_1 x} + \beta P_{\gamma_1 y} + \gamma P \gamma_1 z)$, και $\nu = P(x_c P_{\gamma_1 x} + x_c P_{\gamma_1 x} + y_c P_{\gamma_1 z})/r$.
Τελικά, η εξίσωση (8) μπορεί να αναχθεί στην ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση για την άγνωστη ορμή, P, του διεσπασμένου μητρικού σωματιδίου

$$
\begin{aligned}
P^2(\nu^2 - E_{\gamma_1}^2) + 2P(\nu\mu + E_{\gamma_1}^2\theta)&- \\
E_{\gamma_1}^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) &= 0,
\end{aligned}
\tag{8.161}
$$

όπου οι δύο λύσεις αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα μας δώσουν την ορμή του μητρικού σωματιδίου. Η μάζα, M, του μητρικού σωματιδίου δίνεται από τη διατήρηση της ενέργειας

$$
\begin{aligned}
M^2 = E^2 - P^2 &= \\
(E_\Lambda + E_{\gamma_1} + P_{\gamma_2})^2 - P^2&,
\end{aligned}
$$

όπου το P προκύπτει από την εξίσωση (8). Υπάρχουν δύο λύσεις για τον προσδιορισμό των M^2 και P.



Σχήμα 8.17: *(α) Μια διάσπαση του Neutral Radiative Cascade $\Xi^0 \to \Lambda\gamma$. (β) Μία διάσπαση του Normal Cascade $\Xi^0 \to \Lambda\pi^0$. (γ) Μια διάσπαση του Neutral Radiative Cascade $\Xi^0 \to \Sigma^0\gamma$, σε $\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$.*

Πρόβλημα 8.53 Τα κοσμικά μιόνια παράγονται στην ατμόσφαιρα σε ύψος περίπου 8000 m και κινούνται προς τη γη με ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός, περίπου $\upsilon = 0,998c$.
(α) Αν ο χρόνος ζωής του μιονίου είναι $\tau = 2,2 \times 10^{-6}$ s, να βρείτε το μήκος που θα διανύσει προτού διασπαστεί, σύμφωνα με την κλασσική φυσική. Θα φτάσει αυτό το μιόνιο στην επιφάνεια της γης;
(β) Να επαναλάβετε το ερώτημα (α) σύμφωνα με τη σχετικιστική μηχανική.

(γ) Να αναλύσετε το ίδιο φαινόμενο από την πλευρά του μιονίου, όπου το μιόνιο ζει για $2,2 \times 10^{-6}$ s. Θα φτάσει στην επιφάνεια της γης;
(δ) Τα πιόνια επίσης παράγονται στην άνω ατμόσφαιρα, όπου ενεργητικά πρωτόνια κτυπούν τα πρωτόνια της ατμόσφαιρας, με αποτέλεσμα να έχουμε την αντίδραση της μορφής

$$p + p \longrightarrow p + p + \text{ πιόνια}$$

όπου τα πιόνια διασπώνται μέσω των αντιδράσεων

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \qquad \pi^- \longrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$$

Ο χρόνος ζωής του πιονίου είναι κατά 100 φορές μικρότερος αυτού του μιονίου. Θα φτάσει ένα τέτοιο πιόνιο στην επιφάνεια της γης;

Λύση:

(α) Από κλασσικής πλευράς, το μήκος που θα διανύσει ένα μιόνιο είναι

$$L = vt = 0,998c\tau = 0,998 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 2,2 \times 10^{-6} \text{ s} = 660 \text{ m}$$

και επομένως δε θα φτάσει στην επιφάνεια της γης.
(β) Σύμφωνα με τη σχετικιστική μηχανική, το μήκος θα είναι

$$L' = \gamma L, \qquad \text{όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,998)^2}} = 15,8$$

δηλαδή το $L' = 15,8 \times 660 \text{ m} = 10,5 \text{ Km}$, επομένως θα φτάσει στη γη.
(γ) Σε αυτή την περίπτωση λόγω της συστολής του μήκους, το μιόνιο θα δει μια διαδρομή που θα είναι μικρότερη κατά ένα παράγοντα γ, και επομένως πάλι θα φτάσει την επιφάνεια της γης.
(δ) Για το πιόνιο, το μήκος της διαδρομής θα είναι

$$L'_\pi = \frac{1}{100} L'_\mu = \frac{1}{100} \times 10,4 \text{ Km} = 104 \text{ m}$$

δηλαδή το πιόνιο δε θα φτάσει στη γη.

Πρόβλημα 8.54 Να δείξετε ότι η ποσότητα

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Λύση:

Οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^0 & = & \gamma(x^{0'} + \beta x^{1'}) \\ x^1 & = & \gamma(x^{1'} + \beta x^{0'}) \\ x^2 & = & x^{2'} \\ x^3 & = & x^{3'} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} (x^0)^2 & = & \gamma^2 \left[(x^{0'})^2 + \beta^2 (x^{1'})^2 + 2\beta x^{0'} x^{1'} \right] \\ (x^1)^2 & = & \gamma^2 \left[(x^{1'})^2 + \beta^2 (x^{0'})^2 + 2\beta x^{1'} x^{0'} \right] \\ (x^2)^2 & = & (x^{2'})^2 \\ (x^3)^2 & = & (x^{3'})^2. \end{array} \right\}$$

Επομένως

$$I = \gamma^2 \left[(x^{0'})^2 + \beta^2 (x^{1'})^2 + 2\beta x^{0'} x^{1'} \right] -$$

$$-\gamma^2 \left[(x^{1'})^2 + \beta^2 (x^{0'})^2 + 2\beta x^{0'} x^{1'} \right] - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

$$\Rightarrow I = \gamma^2 (1-\beta^2)(x^{0'})^2 - \underbrace{\gamma^2 (1-\beta^2)}_{(1-\beta^2)/(1-\beta^2)=1} (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

$$\Rightarrow I = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

$$\Rightarrow (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

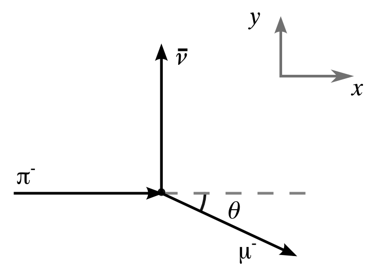
Πρόβλημα 8.55 Ένα πιόνιο κινείται με ταχύτητα υ και διασπάται σε ένα μιόνιο και ένα αντινετρίνο

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$$

Αν το αντινετρίνο κινείται κάθετα στην αρχική κατεύθυνση του πιονίου, (όπως φαίνεται στο σχήμα 8.18) να δείξετε ότι η γωνία με την οποία διαφεύγει το μιόνιο θα είναι

$$\tan\theta = \frac{1 - m\mu^2/m\pi^2}{2\beta_\pi\gamma_\pi^2}$$

όπου $\beta_\pi = \upsilon/c$, $\gamma_\pi = 1/\sqrt{1-\beta_\pi^2}$.



Σχήμα 8.18: *πιόνιο διασπάται σε μιόνιο και αντινετρίνο*

Λύση:

Τα 4-διανύσματα του πιονίου, μιονίου και αντινετρίνο είναι

$$p_\pi = (\gamma_\pi m_\pi,\ \gamma_\pi m_\pi \beta_\pi,\ 0,\ 0)$$

$$p_\mu = (E_\mu,\ |\boldsymbol{P}_\mu|\cos\theta,\ -|\boldsymbol{P}_\mu|\sin\theta,\ 0)$$

$$p_{\overline{\nu}} = (E_{\overline{\nu}},\ 0,\ E_{\overline{\nu}},\ 0)$$

Από τη διατήρηση ενέργειας και ορμής θα ισχύει

$$\gamma_\pi m_\pi = E_{\overline{\nu}} + E_\mu \tag{8.162}$$

$$\gamma_\pi m_\pi \beta_\pi = |\boldsymbol{P}_\mu|\cos\theta$$

$$E_{\overline{nu}} = |\boldsymbol{P}_\mu|\sin\theta \tag{8.163}$$

Από τις σχέσεις (8) και (8) μπορούμε να απαλείψουμε την $E_{\overline{\nu}}$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\pi m_\pi &= |\boldsymbol{p}_\mu|\sin\theta + E_\mu \\ \gamma_\pi m_\pi \beta_\pi &= |\boldsymbol{p}_\mu|\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

$$|\boldsymbol{p}_\mu|\sin\theta = \gamma_\pi m_\pi - E_\mu \tag{8.164}$$

$$\Rightarrow$$

$$|\boldsymbol{p}_\mu|\cos\theta = \gamma_\pi m_\pi \beta_\pi \tag{8.165}$$

Διαιρώντας τη σχέση (8) με την (8), θα έχουμε

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\gamma_\pi m_\pi - E_\mu}{\gamma_\pi m_\pi \beta_\pi} \tag{8.166}$$

Επίσης, αν υψώσουμε στο τετράγωνο τις σχέσεις (8) και (8) και τις προσθέσουμε, θα έχουμε

$$|\boldsymbol{P}_\mu|^2 = \gamma_\pi^2 m_\pi^2 + E_\mu^2 - 2\gamma_\pi m_\pi E_\mu + \gamma_\pi^2 m_\pi^2 \beta_\pi^2$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{P}_\mu|^2 = \gamma_\pi^2 m_\pi^2(1+\beta_\pi^2) + m_\mu^2 + |P_\mu|^2 - 2\gamma_\pi m_\pi E_\mu$$
$$\Rightarrow E_\mu = \frac{\gamma_\pi^2 m_\pi^2(1+\beta_\pi^2) + m_\mu^2}{2\gamma_\pi m_\pi}$$
$$\Rightarrow E_\mu = \frac{\gamma_\pi m_\pi(1+\beta_\pi^2)}{2} + \frac{m_\mu^2}{2\gamma_\pi m_\pi} \tag{8.167}$$

Από την αντικατάσταση της σχέσης (8) στην (8), έπεται ότι

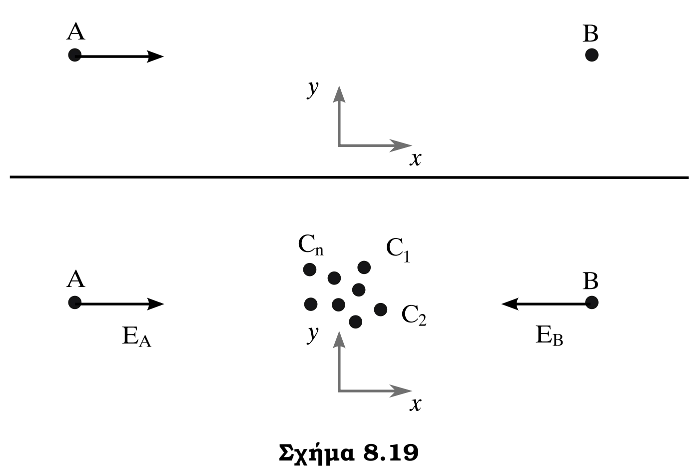
$$\tan\theta = \frac{\gamma_\pi m_\pi - \gamma_\pi m_\pi/2 - \gamma_\pi m_\pi \beta_\pi^2/2 - m_\mu^2/(2\gamma_\pi m_\pi)}{\gamma_\pi m_\pi \beta_\pi}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_\pi \overbrace{\gamma_\pi(1-\beta_\pi^2)}^{1/\gamma_\pi} - m_\mu^2/\gamma_\pi m_\pi}{2\gamma_\pi m_\pi \beta_\pi}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_\pi/\gamma_\pi - m_\mu/\gamma_\pi m_\pi}{2\gamma_\pi m_\pi \beta_\pi}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1 - m_\mu^2/m_\pi^2}{2\gamma_\pi^2 \beta_\pi}$$

Πρόβλημα 8.56 Ένα σωματίδιο A ενέργειας E αντιδρά με ένα ακίνητο σωματίδιο B, δημιουργώντας n σωματίδια $C_1,\ C_2, \dots,\ C_n$

$$A + B \longrightarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

Να βρείτε την ενέργεια κατωφλίου αυτής της αντίδρασης, δηλαδή την ελάχιστη ενέργεια για την επίτευξη αυτής της αντίδρασης.

Λύση:



Σχήμα 8.19

Στην ενέργεια κατωφλίου τα παραγόμενα σωματίδια $C_1, C_2, \dots, c_n$ δε διαθέτουν κινητική ενέργεια στο κέντρο μάζας CM, αλλά απλά δημιουργούνται. Στο σύστημα εργαστηρίου τα 4-διανύσματα θα είναι

$$\left.\begin{aligned} P_A^\mu &= (E,\ \underbrace{P_A}_{\sqrt{E^2-m_A^2}},\ 0,0) \\ P_B^\mu &= (m_B,\ 0,\ 0,0) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (P_A + P_B)^\mu = \left(E + m_B,\ \sqrt{E^2 - m_A^2},\ 0, 0\right)$$

$$\Rightarrow (P_A + P_B)^2 = (E + m_B)^2 - (E^2 - m_A^2) \tag{8.168}$$

$$\Rightarrow (P_A + P_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2Em_B$$

Στο κέντρο μάζας θα έχουμε

$$P_A^{\text{KM}} = (E_A,\ P_{\text{KM}},\ 0,\ 0),\ P_B^{\text{KM}} = (E_B,\ -P_{\text{KM}},\ 0,\ 0)$$

$$P_A^{\text{KM}} + P_B^{\text{KM}} = (E_A + E_B,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{8.169}$$

Στην τελική κατάσταση, όπου δημιουργούνται n σωματίδια χωρίς κινητική ενέργεια, θα έχουμε

$$P^{\text{KM}} = \left(\underbrace{\sum m_i}_{M},\ 0,\ 0,\ 0\right) \tag{8.170}$$

Από τη διατήρηση ενέργειας και ορμής από τις σχέσεις (8) και (8) θα ισχύει

$$E_A + E_B = M \tag{8.171}$$

Από την αναλλοίωτη ιδιότητα των τετρανυσμάτων θα έχουμε από τις σχέσεις (8) και (8)

$$(P_A + P_B)^2 = (P_A^{\text{KM}} + P_B^{\text{KM}})^2$$

$$\Rightarrow m_A^2 + M_B^2 + 2Em_B = (E_A + E_B)^2 = M^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{M^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}$$

Πρόβλημα 8.57 Ένα ακίνητο σωματίδιο A, μάζας m_A, διασπάται σε δύο σωματίδια B και C με μάζες m_B και m_C αντίστοιχα

$$\underbrace{A}_{m_A} \longrightarrow \underbrace{B}_{m_B} + \underbrace{C}_{m_C}$$

(α) Να δείξετε ότι η ενέργεια του B σωματιδίου είναι

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}$$

Να βρείτε το μέτρο της ορμής του σωματιδίου B.

Λύση:

(α) Σχηματικά αυτή η διάσπαση περιγράφεται στο σχήμα 8.20.
Τα 4-διανύσματα των τριών σωματιδίων θα είναι

$$P_A = (m_A,\ 0,\ 0,\ 0),\ P_B = (E_B,\ |\boldsymbol{P}_B|,\ 0,\ 0)$$

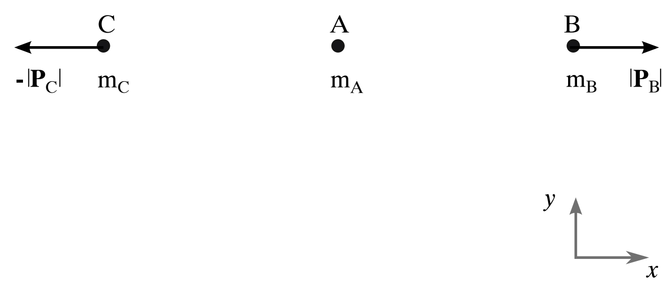
$$P_C = (E_C,\ -|\boldsymbol{P}_B,\ 0,\ 0)$$

διότι λόγω διατήρησης της ορμής η $|\boldsymbol{P}_C| = -|\boldsymbol{P}_B|$. Από τη διατήρηση της ενέργειας

$$m_A = E_B + E_C$$

όπου

$$E_B^2 = |\boldsymbol{P}_B|^2 + m_A^2, \qquad E_C^2 = |\boldsymbol{P}_B|^2 + m_C^2$$



Σχήμα 8.20: *Διάσπαση του σωματιδίου A σε B και C*

$$\Rightarrow m_A - E_B = E_C \Rightarrow (m_A - E_B)^2 = E_C^2$$
$$\Rightarrow m_A^2 - 2m_A E_B + E_B^2 = E_C^2 = \underbrace{|\boldsymbol{P}_C|^2}_{|\boldsymbol{P}_B|} + m_C^2$$
$$\Rightarrow m_A^2 - 2m_A E_B + E_B^2 = \underbrace{|\boldsymbol{P}_B|^2}_{E_B^2 - m_B^2} + m_C^2$$
$$\Rightarrow m_A^2 + m_B^2 - m_C^2 = 2m_A E_B$$

$$E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} \tag{8.172}$$

(β) Από τη σχέση (8) και την παρατήρηση ότι $E_B^2 = |\boldsymbol{P}_B|^2 + m_B^2$, θα έχουμε

$$|\boldsymbol{P}_B|^2 + m_B^2 = \left(\frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}\right)^2$$
$$\Rightarrow |\boldsymbol{P}_B|^2 = \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)^2}{4m_A^2} - m_B^2$$
$$\Rightarrow |\boldsymbol{P}_B|^2 = \frac{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 + 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2 - 4m_B^2 m_A^2}{4m_A^2}$$
$$\Rightarrow |\boldsymbol{P}_B| = \frac{\sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2}}{2m_A}$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{P}_B| = \frac{\sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)}}{2m_A} \tag{8.173}$$

όπου $\lambda(x, y, z)$ είναι η συνάρτηση τριγώνου

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση τριγώνου μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής

$$\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2) = (m_A + m_B + m_C)(m_A + m_B - m_C)(m_A - m_B + m_C)(m_A - m_B - m_C)$$

και επομένως η $|\boldsymbol{P}_B|$ μηδενίζεται για $m_A = m_B + m_C$, και είναι φανταστική ποσότητα για $m_A < m_B + m_C$, που είναι επακόλουθο της διατήρησης ενέργειας.

Πρόβλημα 8.58 Ένα ακίνητο πιόνιο, (π^-), διασπάται σε ένα μιόνιο, (μ^-), και ένα αντινετρίνο, ($\overline{\nu}$)

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$$

Να δείξετε ότι η απόσταση που διανύει το μιόνιο προτού διασπαστεί θα είναι

$$d = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu}\tau$$

όπου τ είναι ο χρόνος ζωής του μιονίου και m_π, m_μ είναι η μάζα του πιονίου και του μιονίου, αντίστοιχα.

Λύση:

Από τη σχέση (8) του προβλήματος 8.57 θα έχουμε για την ορμή του μιονίου

$$|\boldsymbol{P}_B| = \frac{\sqrt{m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2m_\pi^2 m_\mu^2}}{2m_\pi}$$

διότι η $m_{\overline{\nu}} = 0$.

$$\Rightarrow |\boldsymbol{P}_B| = \frac{\sqrt{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}}{2m\pi}$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{P}_B| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m\pi} \tag{8.174}$$

Επίσης, η ορμή του μιονίου γράφεται ως εξής

$$|\boldsymbol{P}_B| = m_\mu \gamma_\mu \upsilon_\mu \tag{8.175}$$

όπου υ_μ είναι η ταχύτητα του μιονίου. Το μήκος που θα διανύσει το μιόνιο είναι

$$L = \upsilon_\mu(\gamma\tau) \tag{8.176}$$

όπου γ η διαστολή χρόνου. Από τις σχέσεις (8) και (8), απαλείφοντας τη υ_μ, θα έχουμε

$$L = \frac{P_B}{m_\mu}\tau \tag{8.177}$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις (8) και (8), θα έχουμε

$$L = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu}\tau \sim 186 \text{ m}$$

Πρόβλημα 8.59 Στη σκέδαση δύο σωματιδίων, $A + B \longrightarrow C + D$, μας βολεύει να εισάγουμε τις μεταβλητές Mandelstam

$$s = (p_A + p_B)^2,\ t = (p_A - p_C)^2,\ u = (p_A - p_D)^2$$

(α) Να δείξετε ότι ισχύει

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

(β) Να βρείτε την ενέργεια του σωματιδίου A στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας (ΚΜ) ως συνάρτηση των μεταβλητών $s,\ t,\ u$ και των μαζών των σωματιδίων.

(γ) Αν το σωματίδιο Β είναι ακίνητο, να βρείτε την ενέργεια του σωματιδίου Α στα συστήματα αναφοράς του εργαστηρίου.

(δ) Να βρείτε την ολική ενέργεια στο σύστημα ΚΜ, δηλαδή να βρείτε την $E_{\text{ολ}} = E_A + E_B = E_C + E_D$.

Λύση:

(α) Από τον ορισμό των μεταβλητών Mendelstam θα έχουμε

$$s+t+u=(p_A+p_B)^2+(p_A-p_C)^2+(p_A-p_D)^2$$

$$\Rightarrow s+t+u=p_A^2+p_B^2+2p_Ap_B+p_A^2+p_C^2-2p_Ap_C+p_A^2+p_D^2-2p_Ap_D$$

$$\Rightarrow s+t+u=3p_A^2+p_B^2+p_C^2+p_D^2-2p_A(p_C+p_D)$$

αλλά από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε

$$p_A+p_B=p_C+p_B$$

επομένως

$$s+t+u=3p_A^2+p_B^2+p_C^2+p_D^2+2p_Ap_B-2p_A(p_A+p_B)$$

$$\Rightarrow s+t+u=3p_A^2+p_B^2+p_C^2+p_D^2+2p_Ap_B-2p_A^2-2p_Ap_B$$

$$\Rightarrow s+t+u=p_A^2+p_B^2+p_C^2+p_D^2 \tag{8.178}$$

Τα 4-διανύσματα $p_A,\ p_B,\ p_C,\ p_D$, είναι

$$p_A^2=m_A^2,\ p_B^2=m_B^2,\ p_C^2=m_C^2,\ p_D^2=m_D^2$$

και επομένως η σχέση (8) θα μας δώσει

$$s+t+u=m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2$$

(β) Στο σύστημα του κέντρου μάζας θα έχουμε

$$p_A=(E_A,\ \boldsymbol{p}),\quad p_B=(E_B,\ -\boldsymbol{p})$$

$$\Rightarrow p_A+p_B=(E_A+E_B,\ \gamma)$$

επομένως η μεταβλητή s είναι

$$s=(p_A+p_B)^2=(E_A+E_B)^2=E_A^2+E_B^2+2E_AE_B \tag{8.179}$$

Αλλά επίσης ισχύουν

$$\left.\begin{aligned} E_A^2&=p^2+m_A^2\\ E_B^2&=p^2+m_B^2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow E_B^2=E_A^2+m_B^2-m_A^2 \tag{8.180}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8) και (8), έπεται ότι

$$s=E_A^2+E_A^2-m_A^2+m_B^2+2E_AE_B$$

$$\Rightarrow s+m_A^2-m_B^2=2(E_A^2+E_AE_B)=0$$

$$\Rightarrow s+m_A^2-m_B^2=2E_A(E_A+E_B) \tag{8.181}$$

Αλλά από τη σχέση (8) είχαμε

$$s=(E_A+E_B)^2$$

$$\Rightarrow E_A+E_B=\sqrt{s} \tag{8.182}$$

Επομένως από τις σχέσεις (8) και (8) έπεται ότι

$$s + m_A^2 - m_B^2 = 2E_A\sqrt{s}$$

$$\Rightarrow E_A = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}}$$

(γ) Στο σύστημα του εργαστηρίου θα έχουμε

$$\left.\begin{aligned} p_A &= (E_A,\ \boldsymbol{p}) \\ p_B &= (m_B,\ 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_A + p_B = (E_A + m_b,\ \boldsymbol{p})$$

Επομένως, η μεταβλητή s θα είναι

$$s = (p_A + p_B)^2 = E_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B - p^2$$

όπου $p = |\boldsymbol{p}|$. Αλλά, $E_A^2 = p^2 + m_A^2$, και επομένως

$$s = m_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B$$

$$\Rightarrow s - m_A^2 - m_B^2 = 2E_A m_B$$

$$\Rightarrow E_A = \frac{s - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}$$

(δ) Από τη σχέση (8) έχουμε

$$E_{\text{ολ}} = E_A + E_B = \sqrt{s}$$

Πρόβλημα 8.60 Για την ελαστική σκέδαση δύο όμοιων σωματιδίων $A+A \longrightarrow A+A$, να δείξετε ότι οι μεταβλητές Mendelstam παίρνουν τη μορφή

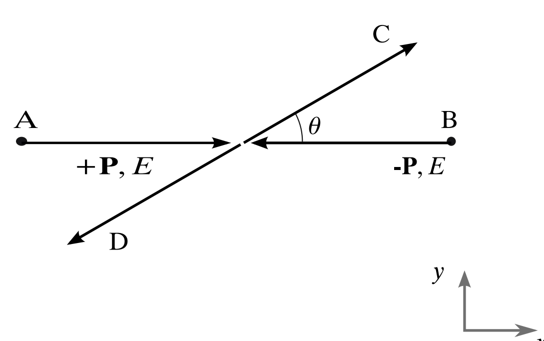
$$s = 4(p^2 + m^2c^2)$$

$$t = -2p^2(1 - \cos\theta)$$

$$u = -2p^2(1 + \cos\theta)$$

όπου p είναι η ορμή του εισερχόμενου σωματιδίου στο σύστημα του κέντρου μάζας (ΚΜ) και θ είναι η γωνία σκέδασης.

Λύση:



Σχήμα 8.21

Στους υπολογισμούς μας θεωρούμε ότι $c = 1$. Τα 4-διανύσματα των σωματιδίων θα είναι

$$\boldsymbol{p}_A = (E,\ p,\ 0,\ 0), \quad \boldsymbol{p}_B = (E,\ -p,\ 0,\ 0)$$

$$p_C = (E,\ p\cos\theta,\ p\sin\theta,\ 0), \quad p_D = (E,\ -p\cos\theta,\ -p\sin\theta,\ 0)$$

όπου $p = |\boldsymbol{p}|$ είναι το μέτρο της ορμής του σωματιδίου A. Επομένως η μεταβλητή s είναι

$$s = (p_A + p_B)^2 = (2E)^2 = 4E^2 = 4(p^2 + m^2)$$

$$\Rightarrow s = 4(p^2 + m^2)$$

Η μεταβλητή t είναι

$$t = (p_A - p_C)^2 = (0,\ p(1-\cos\theta),\ -p\sin\theta,\ 0)^2$$

$$\Rightarrow t = p^2(-1 - \cos^2\theta + 2\cos\theta - \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow t = -2p^2(1 + \cos\theta)$$

Η μεταβλητή u είναι

$$u = (p_A - p_D)^2 = (0,\ p(1+\cos\theta,\ p\sin\theta,\ 0)^2$$

$$\Rightarrow u = -p^2(1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow u = -2p^2(1 + \cos\theta)$$

Πρόβλημα 8.61 Σωματίδια μάζας M και ορμής P παρατηρούνται ότι διανύουν κατά μέσο όρο μια απόσταση L προτού διασπαστούν. Ποιος είναι ο χρόνος ζωής των σωματιδίων αυτών;

Λύση:

Αν η ταχύτητα των σωματιδίων στο σύστημα εργαστηρίου είναι $\beta = v/c$, τότε θα διανύουν μια απόσταση

$$L = \beta\tau_{\text{εργ}}$$

όπου $\tau_{\text{εργ}}$ είναι ο χρόνος ζωής στο σύστημα του εργαστηρίου, και προφανώς θα ισχύει

$$\tau_{\text{εργ}} = \gamma\tau$$

όπου τ είναι ο χρόνος ζωής στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου. Επομένως

$$L = \gamma\beta\tau \tag{8.183}$$

αλλά η ορμή του σωματιδίου θα είναι

$$P = M\gamma\beta$$

$$\Rightarrow \beta\gamma = P/M \tag{8.184}$$

Από τις σχέσεις (8) και (8) θα έχουμε

$$L = \frac{P}{M}\tau$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{LM}{P}$$

Πρόβλημα 8.62 Ένα ηλεκτρόνιο ενέργειας 100 MeV συγκρούεται με ένα φωτόνιο με μήκος κύματος $\lambda = 3 \times 10^7\ \mathring{A}$, το οποίο αντιστοιχεί στο κοσμικό υπόβαθρο των 3 deg. Ποια είναι η μέγιστη ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο;

Λύση:

Η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου θα είναι

$$E_\gamma = p_\gamma = hc\frac{2\pi}{\lambda} = 197 \text{ MeV fm}\frac{2\pi}{3\times 10^{12}\text{ fm}} = 4,1\times 10^{-10}\text{ MeV}$$

Η ολική 4-ορμή θα είναι $p^\mu = p_\gamma^\mu + p_\mathrm{e}^\mu$ και επομένως για τη μεταβλητή Mandelstam, s, θα έχουμε (στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, ΚΜ)

$$s = p^\mu p_\mu = p_\gamma^2 + p_\mathrm{e}^2 + 2p_\gamma^\mu (p_e)_\mu = m_\gamma^2 + m_\mathrm{e}^2 + 2(E_\gamma E_e - \boldsymbol{p}_e\cdot\boldsymbol{p}_\gamma)$$

$$\Rightarrow s = m_\mathrm{e}^2 + 2E_\gamma(E_e + |\boldsymbol{p}_e|) \simeq m_\mathrm{e}^2 + 4E_\gamma E_e$$

Η κίνηση του ΚΜ χαρακτηρίζεται από ένα παράγοντα Lorentz

$$\gamma = \frac{E_\gamma + E_e}{\sqrt{s}} \simeq \frac{Ee}{\sqrt{s}} \simeq \frac{100\text{ MeV}}{0.511\text{ MeV}} \simeq 200$$

και ταχύτητα v

$$v = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1$$

Από τους μετασχηματισμούς Lorentz της ενέργειας ορμής, η ενέργεια ή η ορμή του φωτονίου στο ΚΜ θα είναι

$$E_\gamma^{KM} = \gamma(E_\gamma + \underbrace{v}_{1}\underbrace{p_\gamma}_{E_\gamma}) \simeq 2\gamma E_\gamma$$

Στην ελαστική σκέδαση αυτή η έκφραση μας δίνει επίσης την ενέργεια μετά τη σκέδαση, αλλά η ορμή αντιστρέφεται ώστε να έχουμε τη μέγιστη μεταφορά ορμής. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου θα έχουμε

$$E_\gamma^{\text{εργ.}} = \gamma(E_\gamma^{\text{KM}} + vp_\gamma^{\text{KM}}) \simeq 2\gamma E_\gamma^{\text{KM}}$$

$$\Rightarrow E_\gamma^{\text{εργ.}} = 4\gamma^2 E_\gamma = 4\left(\frac{E_e}{m_e}\right)E_\gamma = 66\text{ eV}$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε αυτή την ενέργεια θεωρώντας τη σχέση της σκέδασης Compton

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m}(1-\cos\theta)$$

όπου για $\theta = \pi$, έχουμε τη μέγιστη μεταφορά ενέργειας και επομένως οι ενέργειες των φωτονίων θα είναι

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{2}{m} \tag{8.185}$$

Στο σύστημα όπου το ηλεκτρόνιο έχει ενέργεια E_e και παράγοντα Lorentz $\gamma = E_e/m$, οι ενέργειες των φωτονίων θα είναι

$$E_\gamma = \gamma(E - vp) = \gamma E(1-v) \tag{8.186}$$

$$E'_\gamma = \gamma(E + vp) = \gamma E'(1+v) \tag{8.187}$$

Από τις σχέσεις (8), (8) και (8), θα έχουμε

$$\frac{\gamma(1+v)}{E'_\gamma} - \frac{\gamma(1-v)}{E} = \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow E'_\gamma - E_\gamma = \frac{2\gamma v - 2E_\gamma/m}{2/m + \gamma(1-v)/E_\gamma}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{2\gamma v - 2E_\gamma/m}{2/m + \gamma(1-v)/E_\gamma} \tag{8.188}$$

Προσεγγιστικά μπορεί να έχουμε

$$1 - v \sim \frac{1}{2\gamma^2},\ E_\gamma << m,\ \gamma E_\gamma << m$$

και επομένως η σχέση (8) θα είναι

$$\Delta E \simeq \frac{2\gamma v}{2/m + 1/(2\gamma E_\gamma)} \simeq 4\gamma^2 v E_\gamma = 4\gamma^2 E_\gamma$$

Πρόβλημα 8.63 Υπεριώδεις ακτίνες φωτός, μήκους κύματος $\lambda = 3500\ \AA$, κτυπούν επιφάνεια νατρίου. Η μέγιστη ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι $1,6$ eV. Να βρείτε το έργο εξαγωγής του νατρίου.

Λύση:

Από το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο θα έχουμε

$$E_\gamma = hc\frac{2\pi}{\lambda} = 197 \text{ MeV fm}\frac{2\pi}{3500 \times 10^5 \text{ fm}} = 3,54 \text{ eV}$$

και επομένως το έργο εξαγωγής θα είναι

$$\phi = (3,54 - 1,6) \text{ eV} = 1,94 \text{ eV}$$

Πρόβλημα 8.64 Με τη βοήθεια του αποτελέσματος του προβλήματος (8.57) να βρείτε την ενέργεια στο σύστημα του κέντρου μάζας για κάθε εξερχόμενο σωματίδιο για τις παρακάτω διασπάσεις:
(α) $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$,
(β) $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$,
(γ) $K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0$,
(δ) $\Lambda \longrightarrow p + \pi^-$,
(ε) $\Omega^- \longrightarrow \Lambda + K^-$.

Λύση:

(α)

$$\left.\begin{array}{rcl} m_{\pi^-} = & = & 139,6 \text{ MeV/C}^2 \\ m_{\mu^-} & = & 105,7 \text{ MeV/C}^2 \\ m_{\nu^-} & = & 0 \text{ MeV/C}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} E_{\mu^-} & = & 109,8 \text{ MeV} \\ \\ E_{\overline{\nu}_\mu} & = & 29,8 \text{ MeV}, \end{array}$$

(β)

$$\left.\begin{array}{rcl} m_{\pi^0} & = & 135 \text{ MeV/C}^2 \\ \\ m_\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} \neq 7,5 \text{ MeV}$$

(γ)

$$\left.\begin{array}{rcl} m_{K^+} & = & 493,7 \text{ MeV/C}^2 \\ m_{\pi^+} & = & 139,6 \text{ MeV/c}^2 \\ m_{\pi^0} & = & 135 \text{ MeV/c}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} E_{\pi^+} & = & 248,1 \text{ MeV} \\ \\ E_{\pi^0} & = & 245,6 \text{ MeV}, \end{array}$$

(δ)

$$\left.\begin{array}{rcl} m_\Lambda & = & 1115,6 \text{ MeV/c}^2 \\ \\ m_{\pi^-} & = & 139,6 \text{ MeV/c}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} E_p & = & 943,7 \text{ MeV} \\ \\ E_{\pi^-} & = & 171,8 \text{ MeV}, \end{array}$$

(ε)

$$\left.\begin{array}{rcl} m_{\Omega^-} &=& 1672\ \mathrm{MeV/c^2} \\ m_\Lambda &=& 1115,6\ \mathrm{MeV/c^2} \\ m_{K^-} &=& 493,7\ \mathrm{MeV/c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} E_\Lambda &=& 1135,3\ \mathrm{MeV} \\ && \\ E_{K^-} &=& 536,7\ \mathrm{MeV.} \end{array}$$

Πρόβλημα 8.65 Πρωτόνια επιταχύνονται με ένα επιταχυντή και κτυπούν πυρήνες υδρογόνου που βρίσκονται σε ηρεμία. Να βρείτε την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να δημιουργηθούν αντιπρωτόνια.

Λύση:

Η αντίδραση για να δημιουργηθούν αντιπρωτόνια είναι

$$p + p \longrightarrow \overline{p} + p + p + p$$

Αν η ενέργεια του εισερχόμενου πρωτονίου είναι E, τότε τα δύο 4-διανύσματα του εισερχόμενου πρωτονίου και του πυρήνα του υδρογόνου είναι

$$p_1^\mu = (\ E,\ \underbrace{\sqrt{E^2 - m_p^2}}_{\text{ορμή}}),\ \ p_2^\mu = (\ m_p,\ 0)$$

και επομένως

$$(p_1 + p_2)^\mu = (\ E + m_p,\ \sqrt{E^2 - m_p^2})$$

$$\Rightarrow (p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)_\mu = (E + m_p)^2 - (E^2 - m_p^2) \tag{8.189}$$

Για τα τέσσερα παραγόμενα πρωτόνια θα έχουμε τα ακόλουθα 4-διανύσματα

$$p_1'^\mu = (\ m_p,\ 0),\ p_2'^\mu = (\ m_p,\ 0),\ p_3'^\mu = (\ m_p,\ 0),\ p_4'^\mu = (\ m_p,\ 0)$$

καθότι απλά παράγονται χωρίς κινητική ενέργεια στην περίπτωση της ελάχιστης ενέργειας εισόδου. Το ολικό 4-διάνυσμα των παραγόμενων πρωτονίων θα είναι

$$p_1'^\mu + p_2'^\mu + p_3'^\mu + p_4'^\mu = (\ 4m_p,\ 0)$$

$$\Rightarrow (p_1' + p_2' + p_3' + p_4')^\mu (p_1' + p_2' + p_3' + p_4')_\mu = (4m_p)^2 \tag{8.190}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας οι σχέσεις (8) και (8) θα μας δώσουν

$$(E + m_p)^2 - (E^2 - m_p^2) = (4m_p)^2$$

$$\Rightarrow E = 7m_p = 6,6\ \mathrm{GeV}$$

Πρόβλημα 8.66 Να προσδιορίσετε την ενέργεια κατωφλίου μιας ακτίνας γάμμα όταν αλληλεπιδρά με ένα ηλεκτρόνιο το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία, για την παραγωγή ενός ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου .

Λύση:

Η αντίδραση της ακτίνας γ με ένα e^- θα είναι

$$\gamma + \mathrm{e}^- \longrightarrow \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^-$$

ώστε να έχουμε διατήρηση του λεπτονικού αριθμού. Το 4-διάνυσμα του πρώτου μέλους της αντίδρασης είναι

$$p_i^\mu = (\ E_\gamma + m_e,\ p_\gamma + 0)$$

$$\Rightarrow p_i^\mu p_{i\mu} = (E_\gamma + m_e)^2 - p_\gamma^2$$

όπου $E_\gamma = p_\gamma$ για την εισερχόμενη ακτίνα γάμμα, δηλαδή

$$p_i^\mu p_{i\mu} = (E_\gamma + m_e)^2 - E_\gamma^2 = 2E_\gamma m_e + m_\mathrm{e}^2 \tag{8.191}$$

Το ολικό 4-διάνυσμα των προϊόντων της αντίδρασης θα είναι

$$p_0^\mu = (\ 3m_e,\ 0) \Rightarrow p_0^\mu p_{0\mu} = (3m_e)^2 \tag{8.192}$$

για να λάβει χώρα η αντίδραση στο κατώφλι. Από τις σχέσεις (8) και (8), με τη βοήθεια της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε

$$2E_\gamma m_e + m_\mathrm{e}^2 = 9m_\mathrm{e}^2$$

$$\Rightarrow E_\gamma = 4m_e = 2,044 \text{ MeV}$$

Πρόβλημα 8.67 Στο μικρό συγκρουστήρα του CERN δύο δέσμες πρωτονίων συγκρούονται με ολική ενέργεια 30 GeV. Ποια είναι η ενέργεια που πρέπει να έχει μία δέσμη πρωτονίων όταν συγκρούεται με πρωτόνια που βρίσκονται σε ηρεμία, ώστε να πάρουμε την ίδια ολική ενέργεια των 30 GeV;

Λύση:

Έστω ότι E και p είναι η ενέργεια και ορμή (στο σύστημα του εργαστηρίου) των εισερχόμενων πρωτονίων που συγκρούονται με τα εν ηρεμία πρωτόνια. Επομένως στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας οι δύο δέσμες των πρωτονίων θα φέρουν ενέργεια E'. Η μάζα στα δύο συστήματα είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz και επομένως

$$s = (2E')^2 = (E + m_p)^2 - p^2 = 2m_p E + 2m_p^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{4E'^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{4 \times 30^2 - 2 \times (0,938)^2}{2 \times 0,938} \text{ GeV}$$

$$\Rightarrow E = 1,92 \times 10^3 \text{ GeV}$$

Πρόβλημα 8.68 Μια δέσμη καονίων, K^-, συγκρούεται με πρωτόνια που βρίσκονται σε ηρεμία σύμφωνα με την αντίδραση

$$K^- + p \longrightarrow \pi^0 + \Lambda$$

Να βρείτε την ενέργεια των εισερχόμενων K^- (ως συνάρτηση των μαζών $m_K^-,\ m_p,\ m_\pi,\ m_\Lambda$), στην περίπτωση που τα παραγόμενα Λ ηρεμούν στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Λύση:

Τα 4-διανύσματα στην είσοδο είναι

$$p_K^\mu = (\ E_K,\ p_K), \quad p_p^\mu = (\ m_p,\ 0)$$

$$\Rightarrow p_i^\mu = (p_K + p_p)^\mu = (\ E_K + m_p,\ p_K)$$

$$p_i^\mu p_{i\mu} = (E_K + m_p)^2 - p_K^2 \tag{8.193}$$

που είναι η αναλλοίωτη μάζα στο τετράγωνο. Όμοια τα 4-διανύσματα στην έξοδο είναι

$$p_\pi^\mu = (\ E_\pi,\ p_\pi), \quad p_\Lambda^\mu = (\ m_\Lambda,\ 0)$$

$$\Rightarrow p_o^\mu = (p_\pi + p_\Lambda)^\mu = (\ E_\pi + m_\Lambda,\ p_\pi)$$

$$\Rightarrow p_o^\mu p_{o\mu} = (E_\pi + m_\Lambda)^2 - p_\pi^2 \tag{8.194}$$

Αφού η αναλλοίωτη μάζα διατηρείται σε αυτή την αντίδραση, από τις σχέσεις (8) και (8) θα έχουμε

$$(E_K + m_p)^2 - p_K^2 = (E_\pi + m_\Lambda)^2 - p_\pi^2 \tag{8.195}$$

Εφόσον το Λ παράγεται σε ηρεμία, τότε $p_\Lambda = 0$ και η αρχική ορμή του καονίου, p_K, μεταφέρεται στο παραγόμενο π^0, δηλαδή $p_\pi = p_K$. Επομένως από τη σχέση (8) έπεται ότι

$$E_K + m_p = E_\pi + m_\Lambda \Rightarrow E_\pi = E_K + (m_p - m_\Lambda)$$

και η ενέργεια του πιονίου θα είναι

$$\begin{aligned} E_\pi^2 &= p_\pi^2 + m_\pi^2 = p_K^2 + m_\pi^2 \\ \Rightarrow \left[E_K + (m_p - m_\Lambda)\right]^2 &= p_K^2 + m_\pi^2 \\ \Rightarrow E_K^2 + (m_p - m_\Lambda)^2 + 2E_K(m_p - m_\Lambda) &= p_K^2 + m_\pi^2 \\ \Rightarrow \underbrace{m_K^2}_{E_K^2 - p_K^2} - m_\pi^2 + (m_p - m_\Lambda)^2 &= 2E_K(m_\Lambda - m_p) \\ \Rightarrow E_K &= \frac{m_K^2 - m_\pi^2 + (m_\Lambda - m_p)^2}{2(m_\Lambda - m_p)} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 8.69 Πιόνια μάζας $m = 140$ MeV/c^2 διασπώνται σε μιόνια και νετρίνα

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu_\mu$$

Να βρείτε τη μέγιστη ορμή των παραγόμενων μιονίων στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου.

Λύση:

Έστω E_μ και p_μ η ενέργεια και ορμή αντίστοιχα του μιονίου στο σύστημα ηρεμία του πιονίου. Από τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής θα είναι

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi \Rightarrow E_\mu = m_\pi - E_\nu \tag{8.196}$$

$$p_\mu = p_\nu \tag{8.197}$$

όπου E_ν, p_ν είναι η ενέργεια και η ορμή του νετρίνου αντίστοιχα. Για το νετρίνο έχουμε $p_\nu = E_\nu$ και επομένως από τις σχέσεις (8) και (8) θα έχουμε

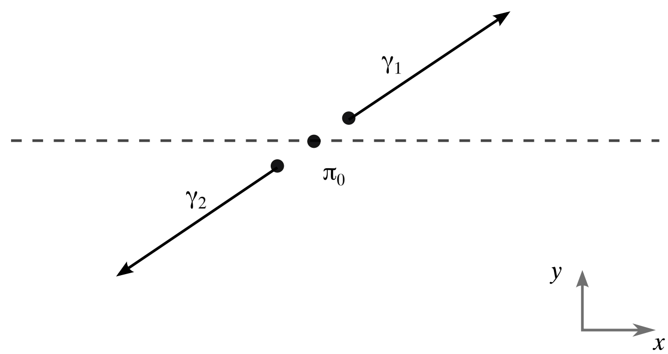
$$\begin{aligned} p_\mu^2 + m_\mu^2 &= (m_\pi - p_\mu)^2 \\ \Rightarrow p_\mu &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29,9 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 8.70 Να βρείτε την ενέργεια των φωτονίων της διάσπασης $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$, ως συνάρτηση της μάζας M, ενέργειας E, ταχύτητας β του πιονίου και της γωνίας εκπομπής θ του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου.

Λύση:

Στο σύστημα ηρεμίας του π^0 (βλ. σχήμα 8.22) θα έχουμε τα ακόλουθα 4-διανύσματα για το πιόνιο και τις δύο ακτίνες γάμμα

$$\begin{aligned} p_{\pi^0}^\mu &= (\ M,\ 0,\ 0,\ 0) \\ p_{\gamma_1} &= \left(\frac{M}{2},\ \frac{M}{2}\cos\theta,\ \frac{M}{2}\sin\theta,\ 0\right) \\ p_{\gamma_2} &= \left(\frac{M}{2},\ -\frac{M}{2}\cos\theta,\ -\frac{M}{2}\sin\theta,\ 0\right) \end{aligned}$$



Σχήμα 8.22

Αν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό Lorentz για το φωτόνιο γ_1 όπου το σύστημα π^0 κινείται με ταχύτητα βc (θεωρούμε $c = 1$), τότε η ενέργεια του φωτονίου E_1 θα είναι

$$E_1 = \gamma(E_1 + \beta p'_{1x})$$

$$\Rightarrow E_1 = \gamma\left(\frac{M}{2} + \beta\frac{M}{2}\cos\theta\right) \qquad (8.198)$$

Αλλά η ενέργεια του πιονίου είναι

$$E = \gamma M \Rightarrow \gamma = \frac{E}{M} \qquad (8.199)$$

Από τις σχέσεις (8) και (8) έπεται ότι

$$E_1 = \frac{E}{2}(1 + \beta\cos\theta)$$

Όμοια εργαζόμενοι για το φωτόνιο γ_2 θα έχουμε

$$E_2 = \frac{E}{2}(1 - \beta\cos\theta)$$

Πρόβλημα 8.71 Να δείξετε ότι, σε μετωπικές συγκρούσεις δύο δεσμών με σχετικιστικά σωματίδια ενέργειας E_1 και E_2 αντίστοιχα, το τετράγωνο της ενέργειας στο σύστημα του κέντρου της ορμής είναι $4E_1E_2$. Επίσης, να δείξετε ότι, αν οι δέσμες συγκρούονται με γωνία θ, το τετράγωνο της ενέργειας στο σύστημα του κέντρου της ορμής μειώνεται κατά έναν παράγοντα $(1 + \cos\theta)/2$.

Λύση:

Το τετράγωνο της ενέργειας που έχουμε στη διάθεσή μας στο σύστημα του κέντρου της ορμής δύο συγκρουόμενων δεσμών είναι

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2$$

$$\Rightarrow s = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - \boldsymbol{p}_1^2 - \boldsymbol{p}_2^2 - 2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|\cos\theta \qquad (8.200)$$

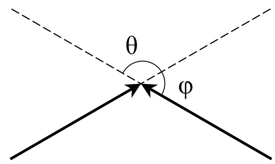
θεωρώντας ότι έχουμε σχετικιστικά σωματίδια, και $p^2 \gg m^2$, ώστε να έχουμε κατά προσέγγιση $E \simeq |p|$.

$$(8) \Rightarrow s = 2E_1E_2(1 - \cos\theta)$$

Το πρόσημο στον όρο που βρίσκεται στις παρενθέσεις εξαρτάται από τον ορισμό της γωνίας θ. Για μετωπικές συγκρούσεις έχουμε $\theta = 180^o$ και επομένως

$$\cos\theta = -1 \Rightarrow s = 4E_1E_2$$

Στην περίπτωση που $\theta \neq 180°$, σύμφωνα με τον ορισμό του σχήματος (8.23) (η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ορμών που συνήθως είναι μεγαλύτερη των $90°$), θεωρώντας ως άξονα την $\boldsymbol{p}_n$ και προβάλλοντας την $\boldsymbol{p}_2$ πάνω στον άξονα παίρνουμε $-p_2 \cos\phi$. Άρα το s μειώνεται κατά $(1+\cos\phi)/2$.



Σχήμα 8.23

Πρόβλημα 8.72 Να δείξετε ότι η ενέργεια που έχουμε στη διάθεσή μας στη μετωπική σύγκρουση δύο πρωτονίων 25 GeV ισούται με τη σύγκρουση δέσμης πρωτονίων ενέργειας 1300 GeV με ένα νουκλεόνιο σε ηρεμία.

Λύση:

Για τη μετωπική σύγκρουση έχουμε

$$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$$

άρα

$$s = (E_1 + E_2)^2 - \underbrace{(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}_{=0} = (50)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = 50 \text{ GeV}$$

Για την περίπτωση του σταθερού στόχου έχουμε $\boldsymbol{p}_2 = 0$ και $E_2 = m_p = 1$ GeV

$$\Rightarrow s = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - \boldsymbol{p}_1^2$$

$$\Rightarrow s = m_p^2 + m_p^2 + 2E_1 m_p$$

Επειδή $E_1 \gg m_p$ έχουμε $s = 2E_1 m_p = 2600$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = \sqrt{2600} = 50,99 \text{ GeV}$$

άρα βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε σχεδόν την ίδια ενέργεια στη διάθεσή μας.

Πρόβλημα 8.73 Προσδιορίστε την ενέργεια κατωφλίου στο σύστημα του εργαστηρίου για την παραγωγή ενός ζεύγους ενός πρωτονίου και ενός αντιπρωτονίου στις συγκρούσεις δύο πρωτονίων. Να εκφράσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση της μάζας του πρωτονίου.

Λύση:

Η αντίδραση είναι

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \overline{p}$$

Για το αριστερό μέρος της αντίδρασης έχουμε

$$s = (p_a + p_b)^2 = (E_a + E_b)^2 - (\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b)^2$$

αλλά $\boldsymbol{p}_b = 0$ και $E_b = m_p$, άρα

$$s = m_p^2 + m_p^2 + 2E_a m_p \tag{8.201}$$

Για το δεξί μέρος της αντίδρασης έχουμε

$$s = (4m_p)^2 \tag{8.202}$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (8) και (8) παίρνουμε

$$2m_p^2 + 2E_a m_p = 16m_p^2$$

$$\Rightarrow E_a = 7m_p$$

Αυτή είναι η συνολική ενέργεια της δέσμης πρωτονίων. Αν θέλουμε την κινητική ενέργεια έχουμε

$$T = E_a - m_p = 6m_p$$

Μάλιστα, είναι γεγονός ότι το αντιπρωτόνιο ανακαλύφθηκε όταν ο επιταχυντής BEVATRON στο Berkeley έφτασε σε ενέργεια 7 GeV.

Πρόβλημα 8.74

Τον Αύγουστο του 2003 η Γη και ο Άρης βρέθηκαν σε μια πολύ κοντινή απόσταση μεταξύ τους της τάξης των 55×10^9 m. Η NASA εκμεταλλευόμενη το γεγονός της προσέγγισης των δυο πλανητών έστειλε επανδρωμένο διαστημόπλοιο στον Άρη με ταχύτητα $c/4$ ως προς τη Γη.
(α) Να υπολογίσετε τη διάρκεια του ταξιδιού όπως τη μέτρησαν οι επιστήμονες στη NASA, και
(β) ο αστροναύτης μέσα στο διαστημόπλοιο.
(γ) Ποιά ήταν η απόσταση Γη-Άρη στο σύστημα στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου;
(δ) Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού εκτοξεύθηκε από το διαστημόπλοιο αντικείμενο με ταχύτητα $c/3$ ως προς αυτό και σε κατεύθυνση κάθετη στην ευθεία κίνησης που ενώνει τη Γη με τον Άρη. Ποιό ήταν το μέτρο της ταχύτητας και ποιά η κατεύθυνση κίνησης του αντικειμένου όπως τη μέτρησαν οι επιστήμονες στη NASA.

Λύση:

(α)

$$t = \frac{s}{v} = \frac{55 \times 10^9 \text{ m}}{c/4} = 4 \times \frac{55 \times 10^9}{3 \times 10^8} \text{ s} = 733.3 \text{ s για τη NASA}$$

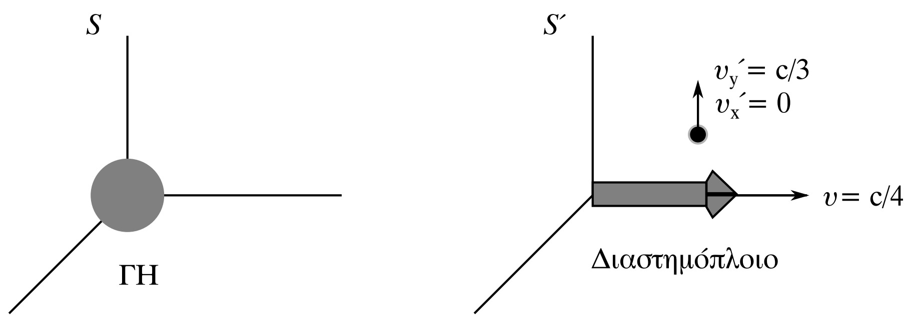
(β) Ο χρόνος τ στο διαστημόπλοιο είναι ο ιδιοχρόνος που μετράται στην ίδια θέση, άρα είναι $< t$.

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1-\beta^2} = t\sqrt{1 - \left(\frac{c/4}{c}\right)^2} = 733.3 \text{ s} \times \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}}_{0.968} = 710 \text{ s για τον αστροναύτη.}$$

(γ) Συστολή μήκους

$$S' = \frac{S}{\gamma} = S\underbrace{\sqrt{1-\beta^2}}_{0.968} \simeq 53.2 \times 10^9 \text{ m}$$

(δ)



- στο S': $v'_x = 0,\ v'_y = \dfrac{c}{3},\ v = \dfrac{c}{4}$

- στο S:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}} = \frac{0 + v}{1 + 0} = \frac{c}{4} = 0.25c$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}} = \frac{(c/3) \times 0.968}{1 + 0} = 0.32c, \quad \beta = v/c$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(0.25c)^2 + (0.32c)^2} = c\sqrt{0.165} = 0.41c$$

και

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0.32c}{0.25c} = 1.68 \Rightarrow \theta = 59.2^\circ$$

9

Σχέσεις Frenet-Serret

9.1 Σχέσεις των Frenet-Serret

Σ' αυτό το παράρτημα θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μια σύντομη περιγραφή των πολύ χρήσιμων σχέσεων των Frenet-Serret στη διαφορική γεωμετρία για την περιγραφή καμπυλών ή τροχιών σωματιδίων στο χώρο.

Μια καμπύλη σε 3-διαστάσεις στο Ευκλείδειο χώρο μπορεί να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος του πέρατος ενός διανύσματος θέσης που δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\hat{\boldsymbol{x}} + y(t)\hat{\boldsymbol{y}} + z(t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπου t είναι μια παράμετρος που παίρνει τιμές από ένα σύνολο τιμών $t_0 \leq t \leq t_1$, π.χ. μπορεί να θεωρήσετε το t ως το χρόνο ή κάποια γωνία. Στην παρακάτω ανάλυση μας θα θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις $x(t),\ y(t),\ z(t)$ είναι συνεχείς και επιπλέον οι παράγωγοι τους, οποιουδήποτε βαθμού, είναι και αυτοί συνεχείς συναρτήσεις.

Έστω s είναι το μήκος της καμπύλης μετρούμενο από κάποιο σταθερό σημείο Q μέχρι το σημείο P όπως φαίνεται στο σχήμα. Το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}(s) = x(s)\hat{\boldsymbol{x}} + y(s)\hat{\boldsymbol{y}} + z(s)\hat{\boldsymbol{z}}$ μπορεί να περιγραφεί με τη παράμετρο s και επομένως η παράγωγός του, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.1}$$

και

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}{(\mathrm{d}s)^2} = \frac{(\mathrm{d}s)^2}{(\mathrm{d}s)^2} = 1$$

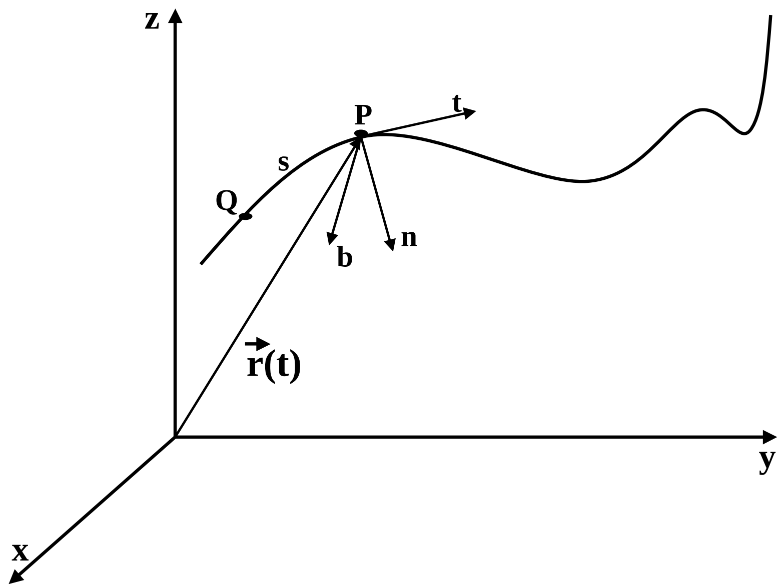
Επομένως το διάνυσμα

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Καθώς το $\Delta s \to 0$, η θέση του διανύσματος $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta s$ προσεγγίζει την εφαπτομένη στο σημείο P. Επομένως το διάνυσμα της σχέσης (9.1) αντιπροσωπεύει το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο P. Ονομάζουμε αυτό το μοναδιαίο διάνυσμα το εφαπτόμενο στην καμπύλη

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος του εφαπτόμενου μοναδιαίου διανύσματος, $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s$, είναι κάθετη στο $\hat{\boldsymbol{t}}$ (διότι το $\hat{\boldsymbol{t}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα) που ουσιαστικά μας λέει πόσο γρήγορα το εφαπτόμενο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{t}}$ αλλάζει



Σχήμα 9.1

διεύθυνση καθώς μετακινείται πάνω στη καμπύλη (το ονομάζουμε το πρώτο κάθετο διάνυσμα). Επομένως μπορούμε να ορίσουμε το κάθετο διάνυσμα στο $\hat{\boldsymbol{t}}$ από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}} \tag{9.2}$$

όπου κ είναι το μέτρο του $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s$ και ονομάζεται καμπυλότητα. Το αντίστροφο της καμπυλότητας, $\rho = 1/\kappa$, ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας. Παρατηρούμε ότι η σχέση (9.1) προσδιορίζει συγχρόνως τη κ και $\hat{\boldsymbol{n}}$, όπου κ είναι το μέτρο του $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s$ ενώ το $\hat{\boldsymbol{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση την παράλληλη στο διάνυσμα $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s$.

Μέχρι αυτό το σημείο, έχουμε ορίσει δύο κάθετα μοναδιαία διανύσματα, $\hat{t}$ και $\hat{\boldsymbol{n}}$, για κάθε σημείο της καμπύλης. Για να μπορέσουμε τώρα να ορίσουμε μια ορθοκανονική βάση συντεταγμένων στο σημείο P θα πρέπει να ορίσουμε ένα τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $\hat{t}$ και $\hat{\boldsymbol{n}}$. Ονομάζουμε το τρίτο αυτό μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{b}}$ (το ονομάζουμε το δεύτερο κάθετο), όπου ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{t}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$$

Επομένως κάθε διάνυσμα που σχετίζεται με τη καμπύλη στο τυχαίο σημείο P θα μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδιασμός των τριών αυτών θεμελιωδών μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$ (εφαπτόμενο, πρώτο και δεύτερο κάθετο διάνυσμα) τα οποία ορίζουν ένα τρίεδρο στο σημείο P, το ονομαζόμενο τρίεδρο του Frenet.

Ας υπολογίσουμε τώρα την πρώτη παράγωγο $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}/\mathrm{d}s$ και $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}/\mathrm{d}s$. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{b}}$ θα έχει την πρώτη παράγωγου του κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{b}}$ και επομένως θα βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{t}, \hat{\boldsymbol{n}}$. Επιπλέον $\hat{\boldsymbol{b}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = 0$, άρα η παραγώγιση αυτής της σχέσης θα μας δώσει

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} + \kappa\hat{\boldsymbol{b}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = 0$$

δηλαδή το διάνυσμα $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}/\mathrm{d}s$ είναι κάθετο στο $\hat{t}$ και επομένως θα πρέπει να είναι παράλληλο στο $\hat{\boldsymbol{n}}$. Επομένως θα μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \tau\hat{\boldsymbol{n}}$$

όπου η παράμετρος τ εξ ορισμού θα είναι το μέτρο του $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}/\mathrm{d}s$, η οποία καλείται στρέψη της καμπύλης . Ομοίως, για να υπολογίσουμε το $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}/\mathrm{d}s$, παρατηρούμε ότι το $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{b}} \times \hat{\boldsymbol{t}}$, και επομένως

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \hat{\boldsymbol{b}} \times \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} \times \hat{\boldsymbol{t}} = \hat{\boldsymbol{b}} \times \kappa\hat{\boldsymbol{n}} + \tau\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{t}}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\hat{\boldsymbol{t}} - \tau\hat{b}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, παραθέτουμε τις τρεις γνωστές σχέσεις του Frenet-Serret

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{9.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = -(\kappa\hat{\boldsymbol{t}} + \tau\hat{\boldsymbol{b}}), \tag{9.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} = \tau\hat{\boldsymbol{n}} \tag{9.5}$$

9.2 Παραδείγματα στις Σχέσεις Frenet-Serret

Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα-ασκήσεις πάνω στις σχέσεις Frenet-Serret για την πληρέστερη κατανόηση της διαφορικής γεωμετρίας των καμπύλων.

9.2.1 Κυκλικός έλικας

Ένας κυκλικός έλικας περιγράφεται παραμετρικά ως ακολούθως

$$\boldsymbol{r} = a\cos t\hat{\boldsymbol{x}} + a\sin t\hat{\boldsymbol{y}} + bt\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = (-a\sin t\hat{\boldsymbol{x}} + a\cos t\hat{\boldsymbol{y}} + b\hat{\boldsymbol{z}})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

και

$$\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = 1 = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 \left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2\right) = (a^2+b^2)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

και επομένως

$$\hat{\boldsymbol{t}} = (-a\sin t\hat{\boldsymbol{x}} + a\cos t\hat{\boldsymbol{y}} + b\hat{\boldsymbol{z}})\sqrt{(a^2+b^2)}$$

Από τη σχέση (9.1) έχουμε

$$\kappa\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = (-a\cos t\,\hat{\boldsymbol{x}} - a\sin t\,\hat{\boldsymbol{y}})(a^2+b^2)^{-1/2}$$

και επομένως η καμπυλότητα, κ, θα είναι

$$\kappa^2 = a^2(a^2+b^2)^{-2}$$
$$\Rightarrow \kappa = a(a^2+b^2)^{-1}$$

Επιπλέον

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{t}} \times \hat{\boldsymbol{n}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{y}} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} (a^2+b^2)^{-1/2}$$
$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{b}} = (b\sin t\hat{\boldsymbol{x}} - b\cos t\hat{\boldsymbol{y}} + a\hat{\boldsymbol{z}})(a^2+b^2)^{-1/2}$$

και

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \tau\hat{\boldsymbol{n}} = (b\cos t\hat{\boldsymbol{x}} + b\sin t\hat{\boldsymbol{y}})(a^2+b^2)^{-1}$$

και επομένως η στρέψη, τ, της καμπύλης θα είναι

$$\tau = b(a^2+b^2)^{-1}$$

9.2.2 Κυκλοειδής καμπύλη

Μια κυκλοειδής καμπύλη σε 2-διαστάσεις περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1+\cos\theta) \text{ με } 0 \le \theta \le 2\pi$$

όπου κάθε σημείο της καμπύλης θα περιγράφεται από το διάνυσμα

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= a(\theta - \sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{x}} + a(1+\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{y}} \\
\Rightarrow \hat{\boldsymbol{t}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = a[(1-\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}]\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \\
\Rightarrow \hat{\boldsymbol{t}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}} = 1 &= \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 a^2\left[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right] = 2a^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2(1-\cos\theta) \\
\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= \frac{1}{2a^2(1-\cos\theta)} = \frac{1}{4a^2\sin^2(\theta/2)} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{2a\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

και επομένως το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{t}}$ είναι

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{a(1-\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{x}} - a\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}}{2a\sin(\theta/2)} = \sin\frac{\theta}{2}\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\frac{\theta}{2}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

και από τη σχέση (9.1) θα έχουμε

$$\kappa\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\frac{\theta}{2}\,\hat{\boldsymbol{y}}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\cos(\theta/2)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\theta/2)\,\hat{\boldsymbol{y}}}{4a\sin(\theta/2)}$$

και η καμπυλότητα θα μας δώσει

$$\begin{aligned}
\kappa^2 &= \frac{1}{4a\sin(\theta/2)} \\
\Rightarrow \kappa &= \frac{1}{2\sqrt{a\sin(\theta/2)}}
\end{aligned}$$

Τελικώς, το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στη καμπύλη θα έχει

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\cos(\theta/2)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\theta/2)\,\hat{\boldsymbol{y}}}{4a\kappa\sin(\theta/2)}$$

9.2.3 Ανώτεροι παράγωγοι ως προς s

Πρόβλημα 9.1 Να δείξετε ότι $\boldsymbol{r}''' = -\kappa^2\hat{\boldsymbol{t}} + \kappa'\hat{\boldsymbol{n}} - \tau\kappa\hat{\boldsymbol{b}}$ όπου οι τόνοι δηλώνουν παράγωγο ως προς το μήκος, s, της καμπύλης.

Λύση:

Γνωρίζουμε εξ ορισμού ότι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \hat{\boldsymbol{t}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}'' &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}''' &= \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{n}} + \kappa\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \kappa'\hat{\boldsymbol{n}} - \kappa(\kappa\hat{\boldsymbol{t}} + \tau\hat{\boldsymbol{b}}) \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}''' &= -\kappa^2\hat{\boldsymbol{t}} + \kappa'\hat{\boldsymbol{n}} - \kappa\tau\hat{\boldsymbol{b}}
\end{aligned}$$

όπου οι σχέσεις (9.1), (9.1), και (9.1) έχουν χρησιμοποιηθεί.

9.2.4 Καμπύλη σ' επίπεδο

Πρόβλημα 9.2 [Καμπύλη σ' επίπεδο] Να δείξετε ότι η συνθήκη της στρέψης $\tau = 0$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η καμπύλη να ανήκει σ' ένα επίπεδο.

Λύση:

Όταν $\tau = 0$, η εξίσωση του Frenet (9.1) μας δίνει

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \tau\,\hat{\boldsymbol{n}} = 0$$

$$\Rightarrow\ \hat{\boldsymbol{b}} = \text{σταθερό}$$

Το διάνυσμα $\hat{b}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ και επομένως η καμπύλη θα βρίσκεται στο επίπεδο το κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{b}}$ που θα είναι σταθερό.
Αν η καμπύλη ανήκει σ' ένα σταθερό επίπεδο, αυτό συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $\hat{b}$=σταθερό και επομένως

$$0 = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \tau\,\hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\Rightarrow \tau = 0$$

Πρόβλημα 9.3 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = 0$$

Λύση:

Από τις εξισώσεις των Frenet-Serret (9.1), (9.1) και (9.1) θα έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\tau\,\hat{\boldsymbol{n}} = kt$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = -(\kappa\,\hat{\boldsymbol{t}} + \tau\,\hat{\boldsymbol{b}})\cdot(\tau\,\hat{\boldsymbol{n}}) = -\kappa\tau\,\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\,\hat{\boldsymbol{n}} - \tau^2\,\hat{\boldsymbol{b}}\cdot\,\hat{\boldsymbol{n}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\kappa\,\hat{\boldsymbol{t}} + \tau\,\hat{\boldsymbol{b}}) = -\kappa^2\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\,\hat{\boldsymbol{t}} - \kappa\tau\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\,\hat{\boldsymbol{b}} = 0$$

διότι τα διανύσματα $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$ ορίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και είναι κάθετα μεταξύ τους.

Πρόβλημα 9.4 Να βρείτε τη στρέψη μιας καμπύλης που περιγράφεται από την εξίσωση $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$.

Λύση:

Από την εξίσωση (9.1) έπεται ότι

$$\tau = -\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s}$$

Αλλά ισχύει

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}$$

και επομένως

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s \times d^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s^2}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s \times d^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s^2|} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\right)$$

και η στρέψη θα πάρει τη μορφή

$$\tau = -\frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^3}\right)$$

Πρόβλημα 9.5 Να Βρείτε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης ενός σωματιδίου σε σχέση με το κινούμενο τρίεδρο των Frenet-Serret πάνω σε μια καμπύλη.

Λύση:

Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ είναι η εξίσωση της τροχιάς ενός σωματιδίου, όπου η παράμετρος t αντιπροσωπεύει το χρόνο. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα, $\boldsymbol{v}$, και η επιτάχυνση, $\boldsymbol{a}$, του σωματιδίου θα είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

Ξεκινώντας από την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου μπορούμε πάντοτε να βρούμε μια συνάρτηση $s = s(t)$ που συνδέει το μήκος, s, μετρούμενο πάνω στην καμπύλη με τη παράμετρο του χρόνου t, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[s(t)]$$

και η ταχύτητα του σωματιδίου θα είναι

$$\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \hat{\boldsymbol{t}}\,v$$

όπου $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ είναι το μέτρο της ταχύτητας. Επομένως η επιτάχυνση, $\boldsymbol{a}$, θα είναι

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}t}v + \hat{\boldsymbol{t}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}v + \hat{\boldsymbol{t}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{t}}$$

όπου η σχέση (9.1) έχει χρησιμοποιηθεί. Επομένως το διάνυσμα της επιτάχυνσης του σωματιδίου θα βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $\hat{t}, \hat{n}$ και οι συνιστώσες της επιτάχυνσης θα είναι

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad a_b = 0 \tag{9.6}$$

όπου ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας.

Πρόβλημα 9.6 Να δείξετε ότι

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{d^3\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^3}\right) = \kappa^5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)$$

Λύση:

Η σχέση (9.1) μας δίνει

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{n}} + \kappa\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{n}}a - \kappa^2\hat{\boldsymbol{t}} - \kappa\tau\hat{\boldsymbol{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^3} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} - \kappa^3 - \kappa\tau\right)\hat{\boldsymbol{n}} - 2\kappa\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{t}} - \left(\tau\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} + \kappa\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right)\hat{\boldsymbol{b}}$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα τον όρο $(d^2\hat{t}/\mathrm{d}s^2) \times (d^3\hat{t}/\mathrm{d}s^3)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{d^3\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^3} = 2\kappa b\left(\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\right)^2\hat{\boldsymbol{b}} - \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}(\kappa\tau)}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{t}} -$$

$$\kappa^2\left(\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right)\hat{\boldsymbol{b}} - \kappa^2\frac{\mathrm{d}(\kappa\tau)}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{n}} +$$

$$\kappa\tau\left(\frac{\mathrm{d}^2\kappa}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right)\hat{\boldsymbol{t}} + 2\kappa^2\tau\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}\hat{\boldsymbol{n}}$$

Επομένως η ζητούμενη σχέση $(\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s) \cdot [(d^2\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s^2) \times (d^3\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s^3)]$ μπορεί να αναπτυχθεί με τη βοήθεια των παραπάνω όρων

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{d^3\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^3}\right) = \kappa\left(2\kappa^2\tau\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} - \kappa^2\frac{\mathrm{d}(\kappa\tau)}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{d^3\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^3}\right) = \kappa^5\left(2\frac{\tau}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}(\kappa\tau)}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{d^3\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^3}\right) = \kappa^5\left[\frac{\tau(\mathrm{d}\kappa/\mathrm{d}s) - \kappa(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s)}{\kappa^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{d^3\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s^3}\right) = \kappa^5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)$$

9.2.5 Ελικοειδής καμπύλη

Πρόβλημα 9.7 Ένα σημείο κινείται στο χώρο όπου εκτελεί δύο κινήσεις συγχρόνως. Μια περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω, γύρω από τον άξονα των z και μια ομοιόμορφη μετατόπιση κατά μήκος του θετικού άξονα των z με σταθερή ταχύτητα v. Βρείτε την ελικοειδή καμπύλη που διαγράφει το σημείο. Βρείτε το μήκος s της έλικας και δείξτε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{t}$ της καμπύλης σχηματίζει μια σταθερή γωνία με το επίπεδο xy.

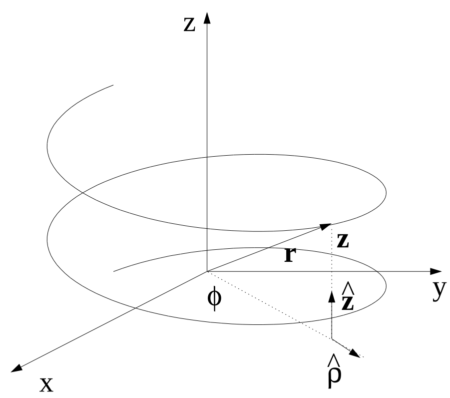
Λύση:

Όπως φαίνεται στο σχήμα η θέση του κινούμενου σημείου θα είναι

$$\boldsymbol{r} = R\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ είναι το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα και R είναι η ακτίνα του κύκλου στο επίπεδο xy που ουσιαστικά αντιπροσωπεύει την προβολή της έλικας στο επίπεδο. Από τον ορισμό της έλικας θα έχουμε

$$\phi = \omega t, \qquad z = vt$$



Σχήμα 9.2

διότι το σημείο κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και συγχρόνως κινείται με σταθερή γραμμική ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα των z. ϕ είναι η γωνία που διαγράφει η ακτίνα του κύκλου στο επίπεδο xy. Άρα η εξίσωση της έλικας θα είναι

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\phi) = R\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{v}{\omega}\phi\hat{\boldsymbol{z}}$$

Για τον υπολογισμό του μήκος s της καμπύλης, παρατηρούμε ότι

$$s = \int_0^\phi \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\phi}\right| \mathrm{d}\phi = \int_0^\phi \sqrt{R^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}\, \mathrm{d}\phi$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{R^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}\, \phi$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{t}$ του Frenet-Serret θα είναι

$$\hat{t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{R\hat{\boldsymbol{\phi}} + (v/\omega)\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{R^2 + (v/\omega)^2}}$$

διότι η παράγωγος του $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ ως προς το ϕ μας δίνει το $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ όπως γνωρίζουμε από την ανάλυση των πολικών συντεταγμένων

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\mathrm{d}\phi} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \frac{v/\omega}{\sqrt{R^2 + (v/\omega)^2}}$$

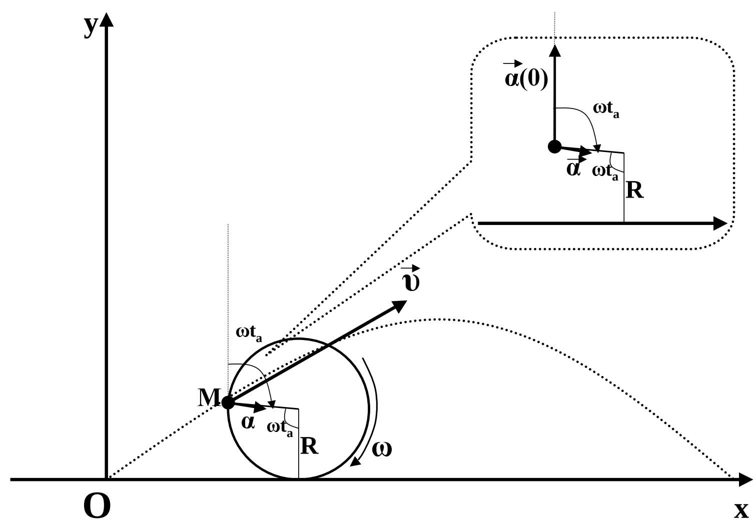
δηλαδή, το $\hat{\boldsymbol{t}}$ σχηματίζει μια σταθερή γωνία με τον άξονα των z και επομένως θα σχηματίζει σταθερή γωνία με το επίπεδο xy.

Πρόβλημα 9.8 Η τροχιά (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα) που διαγράφει ένα σημείο $M(x, y)$ της περιφέρειας ενός τροχού ακτίνας R, κατά την κύλισή του σε οριζόντια επιφάνεια στην κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{x}}$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω, περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς καμπύλης:

$$x = R(\omega t - \sin(\omega t)), \quad y = R(1 - \cos(\omega t))$$

όπου t είναι ο χρόνος.
(α) Βρείτε την ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ και την επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$ του σημείου M, ως συναρτήσεις του χρόνου. Να σχεδιάστε τα διανύσματα αυτά σε κάποια αυθαίρετη χρονική στιγμή t_a.
(β) Να δείξτε ότι: Αν το M αποτελεί σημείο επαφής του τροχού, δηλαδή $M(2k\pi R, 0)$ όπου k ακέραιος, τότε αυτό θα βρίσκεται στιγμιαία σε ηρεμία κατά τη διεύθυνση του άξονα x.
(γ) Βρείτε την επιτρόχιο $\boldsymbol{a}_t$ και την κεντρομόλο $\boldsymbol{a}_n$ επιτάχυνση του σημείου $M(x, y)$ ως συναρτήσεις του χρόνου. Σε ποιους χρόνους τα μέτρα των συνιστωσών αυτών γίνονται ίσα;

Λύση:



Σχήμα 9.3

(α) Η ταχύτητα του σημείου θα είναι

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v} = R\omega\left[(1-\cos(\omega t))\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\ \hat{\boldsymbol{y}}\right] \tag{9.7}$$

και η επιτάχυνση θα είναι

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = R\omega^2(\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{y}})$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στην τροχιά με φορά κατά το $\hat{\boldsymbol{x}}$, ενώ το διάνυσμα της επιτάχυνσης την τυχαία χρονική στιγμή t_a θα σχηματίζει γωνία ϕ με τον κατακόρυφο άξονα που θα είναι

$$\cos\phi = \frac{\boldsymbol{a}(t_a)\cdot\boldsymbol{a}(0)}{|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t_a})||\boldsymbol{a}(0)|} = \cos(\omega t)_a$$

$$\Rightarrow \phi = \omega t_a$$

(β) Αν το M είναι ένα σημείο επαφής, $M(2k\pi R, 0)$, δηλαδή

$$x = 2k\pi R$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t) = 1$$

$$\Rightarrow \omega t = 2k\pi$$

και επομένως η ταχύτητα αυτού του σημείου από τη σχέση (9.2.5) θα έχει

$$\boldsymbol{v}\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) = R\omega\left[1-\cos(2k\pi)\right]\,\hat{\boldsymbol{x}} + R\omega\sin(2k\pi)\,\hat{\boldsymbol{y}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = 0, \\ \\ v_y = 0, \end{cases}$$

και η επιτάχυνση για $t = 2k\pi/\omega$ θα είναι

$$\boldsymbol{a}\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) = R\omega^2\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\Rightarrow \quad a_x = 0$$

δηλαδή έχουμε μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση. Επομένως για το σημείο $M(2k\pi R, 0)$ θα έχουμε

$$v_x = v_y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v} = 0, \\ \\ a_x = 0 \\ \\ a_y = R\omega^2\hat{\boldsymbol{y}}, \end{cases}$$

δηλαδή το σημείο επαφής βρίσκεται στιγμιαία σε ηρεμία κατά τη διεύθυνση του άξονα x.
(γ) Για το υπολογισμό της επιτρόχιου και κεντρομόλου επιτάχυνσης θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (9.2.4)

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{t}}$$

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}$$

όπου ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας, και $\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{n}}$ είναι το εφαπτόμενο και το πρώτο κάθετο διάνυσμα αντίστοιχα από το τρίεδρο των Frenet-Serret. Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{[R\omega(1-\cos(\omega t))]^2 + \left(R\omega\sin(\omega t)\right)^2} = \sqrt{2}\,R\omega\sqrt{1-\cos(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R\omega^2}{\sqrt{2}}\frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{1-\cos(\omega t)}}$$

και επομένως το μέτρο της επιτροχίου επιτάχυνσης θα είναι

$$a_t = \frac{R\omega^2}{\sqrt{2}}\frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{1-\cos(\omega t)}} \tag{9.8}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας ρ θα υπολογιστεί από το αποτέλεσμα της άσκησης 9.10 στη σελίδα 449 είναι

$$\rho = \left|\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\right|$$

όπου οι διάφοροι όροι θα είναι

$$\dot{x} = R\omega(1-\cos(\omega t))$$
$$\dot{y} = R\omega\sin(\omega t)$$

και

$$\ddot{x} = R\omega^2\sin(\omega t)$$
$$\ddot{y} = R\omega^2\cos(\omega t)$$

και η ακτίνα καμπυλότητας ρ θα είναι

$$\rho = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \right|$$

$$\Rightarrow \rho = \left| \frac{\left[R^2\omega^2 \left(1 - \cos(\omega t)\right)^2 + R^2\omega^2 \sin^2(\omega t) \right]^{3/2}}{R\omega(1 - \cos(\omega t))R\omega^2 \cos(\omega t) - R\omega \sin(\omega t)\, R\omega^2 \sin(\omega t)} \right|$$

$$\Rightarrow \rho = R\sqrt{8(1 - \cos(\omega t))}$$

και η κεντρομόλος επιτάχυνση θα είναι

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R\omega^2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos(\omega t)} \tag{9.9}$$

Ο λόγος της κεντρομόλου με την επιτρόχιου επιτάχυνση θα βρεθεί από τις σχέσεις ((9.2.5)) και ((9.2.5)) είναι

$$\frac{a_n}{a_t} = \frac{1 - \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}$$

Αυτός ο λόγος είναι μονάδα όταν

$$\frac{1 - \cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} = 1 \qquad \Rightarrow 1 - \cos(\omega t) = \sin(\omega t)$$

αν $x = \cos(\omega t)$ είναι μια μεταβλητή, τότε αυτή η εξίσωση θα δώσει

$$1 - x = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow 2x(x - 1) = 0$$

ή

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \qquad \text{ή} \qquad x = 1$$

Η λύση $x = 1 \Rightarrow \cos(\omega t) = 1$ απορρίπτεται διότι η έκφραση της επιτρόχιου επιτάχυνσης απειρίζεται. Η λύση $x = \cos(\omega t) = 0$ θα μας δώσει

$$\cos(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{(2k + 1)\pi}{2\omega}$$

όπου k ακέραιος.

9.2.6 Στριφτή καμπύλη

Πρόβλημα 9.9 Να δείξετε ότι η ακτίνα καμπυλότητας μιας στριφτής καμπύλης που περιγράφεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$x = \ln\cos\theta, \qquad y = \ln\sin\theta, \qquad z = \sqrt{2}\theta$$

είναι

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2}\csc 2\theta$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης.

Λύση:

Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\hat{t}$ θα έχει

$$\hat{t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{2}\,\hat{\boldsymbol{z}}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{-\sin^2\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos^2\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\cos\theta\sin\theta} + \sqrt{2}\,\hat{\boldsymbol{z}}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

Ας υπολογίσουμε την ποσότητα $\hat{t}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφρασή του

$$1 = \hat{\boldsymbol{t}}\cdot\hat{\boldsymbol{t}} = \left(\frac{\sin^4\theta + \cos^4\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} + 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 \tag{9.10}$$

Αλλά με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας μπορούμε να γράψουμε

$$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 = \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

και επομένως η σχέση (9.2.6) θα γραφτεί ως εξής

$$1 = \frac{4}{\sin^2 2\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα θα είναι

$$\hat{t} = \frac{-\sin^2\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos^2\theta\,\hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{2}\,\cos\theta\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\cos\theta\sin\theta}\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{t} = -\sin^2\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos^2\theta\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = (-2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} - 2\cos\theta\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{2}\,\cos 2\theta\,\hat{\boldsymbol{z}})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

και επομένως το πρώτο κάθετο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{n}}$ της καμπύλης που δίνεται από τη σχέση (9.1) θα είναι

$$\kappa\,\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \left(-2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} - 2\cos\theta\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}} + \sqrt{2}\,\cos 2\theta\,\hat{\boldsymbol{z}}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

$$\Rightarrow \kappa\,\hat{\boldsymbol{n}} = -\left(\sin 2\theta(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}) + \sqrt{2}\cos 2\theta\,\hat{\boldsymbol{z}}\right)\frac{\sin 2\theta}{2}$$

Σχηματίζουμε την ποσότητα $(\kappa\hat{\boldsymbol{n}})\cdot(\kappa\hat{\boldsymbol{n}})$

$$(\kappa\hat{\boldsymbol{n}})\cdot(\kappa\hat{\boldsymbol{n}}) = \kappa^2|\hat{\boldsymbol{n}}|^2 = \left(2\sin^2 2\theta + 2\cos^2 2\theta\right)\frac{\sin^2 2\theta}{4}$$

$$\Rightarrow \kappa^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2}\,\csc(2\theta)$$

Πρόβλημα 9.10 Για μια καμπύλη πάνω σ' ένα επίπεδο που περιγράφεται από $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y(t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$, δείξτε ότι η καμπυλότητα και ακτίνα καμπυλότητας δίνονται από τη σχέση

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

όπου

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \quad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

Λύση:

Από την εξίσωση της καμπύλης το εφαπτόμενο διάνυσμα θα έχει

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \left(\dot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\,\hat{\boldsymbol{y}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\ \Rightarrow \hat{t}\cdot\hat{\boldsymbol{t}} &= \left((\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{aligned}$$

και επομένως το εφαπτόμενο διάνυσμα θα είναι

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\dot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{9.11}$$

Το πρώτο κάθετο διάνυσμα, $\hat{\boldsymbol{n}}$, ορίζεται (με καμπυλότητα κ) ως

$$\kappa\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\ddot{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \ddot{y}\hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) - \frac{\dot{x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{y}}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})$$

και αντικαθιστώντας τη σχέση (9.2.6) θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \kappa\hat{\boldsymbol{n}} &= \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\,\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{y}(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})\,\hat{\boldsymbol{y}}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}\sqrt{\dot{x}^2(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + \dot{y}^2(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})^2} \\ \Rightarrow k &= \frac{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \\ \Rightarrow \quad \kappa &= \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{9.12}$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \dot{y} &= y'\dot{x} \end{aligned}$$

όπου $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Ομοίως η δεύτερη παράγωγος θα είναι

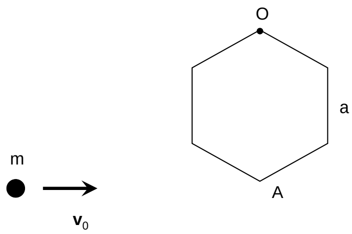
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y'\dot{x}) \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\dot{x} + y'\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\dot{x}^2 + y'\ddot{x} = y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x} \end{aligned}$$

Επομένως η καμπυλότητα από τη σχέση (9.2.6) θα έχει

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{y''\dot{x}^3 + y'\ddot{x}\dot{x} - y'\dot{x}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + y'^2\dot{x}^2)^{3/2}} \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

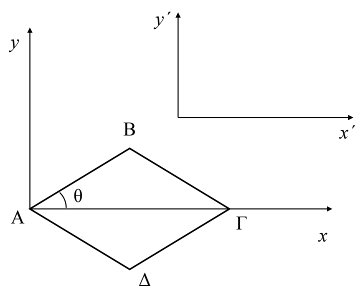
10

Άλυτες Ασκήσεις



Πρόβλημα 10.1

Ένα εξαγωνικό πλαίσιο αποτελείται από έξι ράβδους που η καθεμία τους έχει μάζα m και μήκος a. Το πλαίσιο είναι κατακόρυφο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που περνά από την κορυφή O και είναι κάθετος στο επίπεδο του πλαισίου.
(α) Να βρείτε τη ροπή αδρανείας του πλαισίου ως προς το κέντρο μάζας του.
Μια σφαίρα μάζας m και αμελητέων διαστάσεων σε σχέση με το πλαίσιο κινείται με ταχύτητα v_0 στο επίπεδο που ορίζεται από το πλαίσιο και ενσωματώνεται με το πλαίσιο στην κορυφή A.
(β) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την ενσωμάτωση της σφαίρας.
(γ) Να γράψετε την εξίσωση κίνησης του συστήματος πλαισίου - μάζας, μετά την ενσωμάτωση της σφαίρας.
(δ) Θεωρώντας ότι η γωνία εκτροπής του πλαισίου μετά την ενσωμάτωση της σφαίρας είναι μικρή να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος.



Πρόβλημα 10.2

Ένα πλαίσιο ΑΒΓΔ με σχήμα ρόμβου έχει πλευρές μήκους a, είναι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα S, και είναι προσανατολισμένο έτσι ώστε η διαγώνιος $A\Gamma$ να είναι παράλληλη στον άξονα x (και κατά συνέπεια η $B\Delta$ παράλληλη στον άξονα y), όπως δείχνει το σχήμα. Η γωνία θ είναι 30^o. Ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα S' κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ ως προς το S.

(α) Να περιγράψετε πώς βλέπει το πλαίσιο ένας παρατηρητής ακίνητος στο S'. Τι μήκος μετράει για την κάθε πλευρά; Πώς μεταβάλλεται η γωνία θ;
(β) Έστω ότι $v = (2/3)^{1/2}c$. Τι σχήμα θα έχει το πλαίσιο για παρατηρητή ακίνητο στο S'; Τι εμβαδόν υπολογίζει για το πλαίσιο ο παρατηρητής αυτός; Πώς συγκρίνεται με το εμβαδόν του πλαισίου στο σύστημα αναφοράς S;

Πρόβλημα 10.3

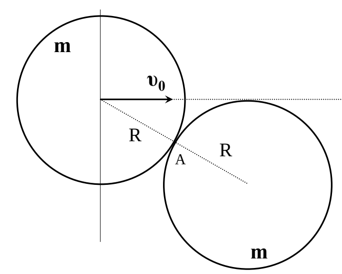
Μια βενζινάκατος με μάζα M κινείται σε ευθεία γραμμή με μεγάλη ταχύτητα, v_0, στο νερό. Κάποια στιγμή η μηχανή σβήνει. Αρχικά, η δύναμη αντίστασης του νερού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, $F_1 = -\kappa v^2$. Όταν η ταχύτητα μειωθεί κάτω από $v_0/2$, τότε η δύναμη της αντίστασης του νερού γίνεται ανάλογη της ταχύτητας, $F_2 = -\lambda v$. Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η βενζινάκατος μέσα στο νερό ώσπου να σταματήσει.

Πρόβλημα 10.4

Ένα σώμα με μάζα $m = 1$ Kg κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δυναμικής ενέργειας $U(x) = x^2 - (1/3)x^3$.
(α) Να σχεδιάσετε τη $U(x)$.
(β) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη δύναμη $F(x)$.
(γ) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα σημεία ισορροπίας. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.
(δ) Το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 1$ m με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v} = -1\hat{\boldsymbol{x}}$ m/s. Να περιγράψετε ποιοτικά την κίνησή του. Σε ποιο σημείο έχει τη μέγιστη ταχύτητα;

Πρόβλημα 10.5

Δύο όμοιοι λεπτοί δίσκοι μάζας m και ακτίνας R γλιστρούν χωρίς τριβή πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο (το επίπεδο των δίσκων είναι πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, και οι δίσκοι κινούνται χωρίς να περιστρέφονται). Στην αρχική κατάσταση ο ένας είναι ακίνητος ενώ ο άλλος πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα v_0 με διεύθυνση κίνησης του δίσκου εφαπτομενική του ακίνητου δίσκου (βλ. σχήμα). Η κρούση είναι πλαστική.



(α) Ποια είναι η ορμή του συστήματος πριν την κρούση;
(β) Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος, ακριβώς πριν την κρούση, ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος των δύο δίσκων;
(γ) Διατηρείται η ορμή και η στροφορμή και γιατί;
(δ) Γράψτε τη στροφορμή του συστήματος, ως προς το A, μετά την κρούση (βρείτε πρώτα τη ροπή αδρανείας του συστήματος) και υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος μετά την κρούση.
(ε) Ποια είναι η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο δίσκων;

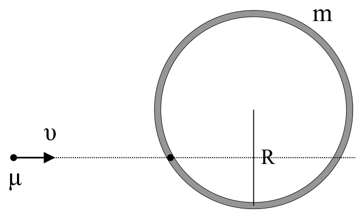
Πρόβλημα 10.6

Μια βάρκα μάζας m επιβραδύνεται πάνω στην επιφάνεια μιας λίμνης υπό την επίδραση μιας δύναμης τριβής $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$. Ξεκινώντας από μια αρχική ταχύτητα v_0, χωρίς την επίδραση άλλης οριζόντιας δύναμης, παρατηρούμε ότι η ταχύτητά της ελαττώνεται σύμφωνα με τη σχέση

$$v = C(t_s - t)^2$$

όπου t_s είναι ο χρόνος που χρειάζεται η βάρκα να σταματήσει, $t_s > t$ και C μια θετική σταθερά. Θεωρήστε την κίνηση της βάρκας για $t_s > t$.
(α) Να βρείτε τη δύναμη $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$.
(β) Τι απόσταση καλύπτει η βάρκα μέχρι να σταματήσει.
(γ) Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται η βάρκα για να σταματήσει ως συνάρτηση του v_0.
(δ) Να βρείτε το έργο που καταναλίσκεται από το νερό για να σταματήσει η βάρκα.

Πρόβλημα 10.7

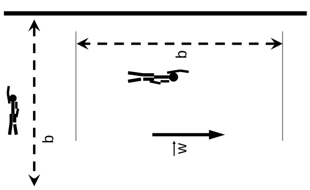


Ένας δακτύλιος με μάζα m και ακτίνα R βρίσκεται ακίνητος πάνω σ'ένα λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα με μάζα μ, που κινείται οριζόντια με ταχύτητα v, κτυπά το δακτύλιο στη διεύθυνση μιας ευθείας που απέχει από το κέντρο $R/2$ και σφηνώνεται στην περιφέρεια του δακτυλίου. Να βρεθεί η κίνηση του δακτυλίου μετά τη συσσωμάτωση του βλήματος και να υπολογίσετε τα μεγέθη της κίνησής του.

Πρόβλημα 10.8

Σώμα μερικώς (ή ολικώς) βυθισμένο σε υγρό, υφίσταται μια δύναμη άνωσης, που είναι ίση με το βάρος του υγρού που το σώμα εκτοπίζει (αρχή του Αρχιμήδη).
(α) Να αποδειχθεί ότι ένα σώμα με ομοιόμορφη οριζόντια διατομή, που εξαναγκάζεται να κινηθεί κατακόρυφα μέσα σε υγρό με πυκνότητα μεγαλύτερη από την πυκνότητά του, εκτελεί απλές αρμονικές ταλαντώσεις.
(β) Πόση είναι η περίοδος;
(γ) Ποιο είναι το όριο στο πλάτος των ταλαντώσεων;

Πρόβλημα 10.9



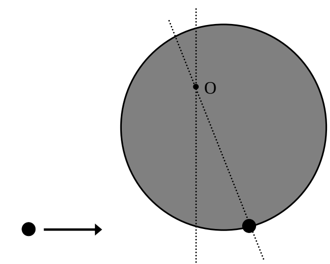
Σ' ένα ποτάμι η ταχύτητα του νερού είναι παντού ίση με w. Ένας κολυμβητής διασχίζει το ποτάμι μέχρι το σημείο που βρίσκεται ακριβώς απέναντι από το σημείο που άρχισε και γυρίζει πίσω στην αφετηρία. Ένας άλλος κολυμβητής κολυμπάει απόσταση ακριβώς ίση με το πλάτος του ποταμού σε κατεύθυνση αντίθετη με το ρεύμα και ξανά πίσω στην αφετηρία.
Αν και οι δύο κολυμβητές είναι εξίσου καλοί και μπορούν να κολυμπούν και οι δύο με την ίδια ταχύτητα v (και ισχύει $w < v$) ποιος από τους δύο θα κερδίσει;

Πρόβλημα 10.10

Σώμα κινείται σε μία διάσταση με δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση
$$U(x) = ax^2 - bx^4, \qquad \text{με } a > b > 0$$
(α) Να δώσετε ένα προσεγγιστικό γράφημα της δυναμικής ενέργειας.
(β) Να βρείτε τη δύναμη του πεδίου αυτού ως συνάρτηση της θέσης x.
(γ) Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος και να προσδιορίσετε το είδος της.
(δ) Να βρείτε τη συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας το οποίο είναι ευσταθές.
(ε) Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = \sqrt{2a/b}$ με ολική μηχανική ενέργεια $E = 2a^2/9b$, να βρείτε τα όρια της κίνησης του σώματος και να περιγράψετε εν συντομία την κίνησή του.

Πρόβλημα 10.11

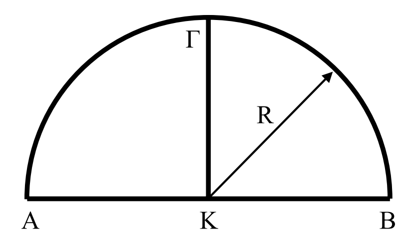
Ένας δίσκος μάζας m και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που περνά από το σημείο Ο, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $2R/3$ από το κέντρο του, και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Μια σφαίρα μάζας m και αμελητέων διαστάσεων σε σχέση με το πλαίσιο κινείται με ταχύτητα v_0 στο επίπεδο που ορίζεται από το πλαίσιο και ενσωματώνεται με το δίσκο.



(α) Να βρείτε τη ροπή αδρανείας του συστήματος ως προς το σημείο Ο.
(β) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την ενσωμάτωση της σφαίρας.
(γ) Να γράψετε την εξίσωση κίνησης του συστήματος δίσκου-μάζας.
(δ) Θεωρώντας ότι η γωνία εκτροπής του δίσκου μετά την ενσωμάτωση της σφαίρας είναι μικρή να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος.

Πρόβλημα 10.12

(α) Να βρείτε το κέντρο μάζας του ημικυκλικού «μοιρογνωμονίου» του σχήματος. Τόσο το ημικυκλικό, όσο και τα ευθύγραμμα μέρη έχουν κυκλική διατομή Α, με $\sqrt{A} << R$, και η μάζα είναι ομογενώς κατανεμημένη σ' αυτά με πυκνότητα ρ.



(β) Περιγράψτε ένα πρακτικό πειραματικό τρόπο εύρεσης του κέντρου βάρους του στερεού αυτού, άρα και πειραματικού ελέγχου του προηγούμενου υπολογισμού.

Πρόβλημα 10.13

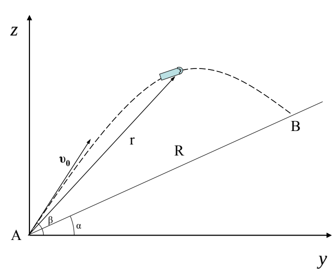
(α) Να βρείτε τη ροπή αδρανείας ενός ομογενούς δίσκου μάζας M (πχ. ενός κέρματος), που αποτελείται από δύο δακτυλίους: Ο κεντρικός δακτύλιος έχει ακτίνα R_1 και αποτελείται από ομογενές υλικό (κράμα) πυκνότητας ρ_1. Ο περιφερειακός δακτύλιος έχει ακτινικό εύρος $R_2 - R_1$, όπου $R_2 = (5/3)R_1$, και αποτελείται από κράμα πυκνότητας $\rho_2 = (3/5)\rho_1$. Το κέρμα έχει πάχος $h << R_1, R_2$. Η ροπή αδρανείας να βρεθεί ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του και διερχόμενο από το κέντρο του.
(β) Θεωρήστε ένα ομογενή δίσκο, πχ. ένα κέρμα «δίευρο», που έχει $M = 8,5 \times 10^{-3}$ Kg και $R = 1,4 \times 10^{-2}$ m, να κυλιέται χωρίς ολίσθηση σε ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. (Για απλούστευση θεωρήστε ότι το «δίευρο» είναι όλο κατασκευασμένο από ένα ομογενές κράμα).
($β_I$) Να βρείτε τη γραμμική επιτάχυνση a του κέντρου μάζας του «δίευρου».
($β_{II}$) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης τριβής F που δρα στο σημείο επαφής ανάμεσα στο «δίευρο» και στο κεκλιμένο επίπεδο. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που δρουν στο κυλιόμενο κέρμα.
(γ) Αν το κέρμα, αφού φτάσει στο κατώτατο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου, εξακολουθήσει την κύλιση στο οριζόντιο επίπεδο, εξηγήστε πώς επιτυγχάνεται η επιβράδυνση της κύλισής τους, μέχρι μηδενισμού της

ταχύτητας του κέντρου μάζας του. Συγκρίνετε τη φύση της τριβής αυτής με την F που βρήκατε στο (β$_{II}$).

Πρόβλημα 10.14

Υποθέστε ότι η Γη είναι ομογενής σφαίρα ακτίνας $R = 6,4 \times 10^6$ m και περιστρέφεται με σταθερή περίοδο T περί τον άξονα «Νότιος-Βόρειος» πόλος.
(α) Αγνοώντας την κίνηση της Γης περί τον Ήλιο, να υπολογίσετε, συναρτήσει των R, T, G και του γεωμετρικού πλάτους θ ($\theta =$ γωνία ανάμεσα στην ακτίνα της Γης στο σημείο μέτρησης και στην προβολής της επί τον ισημερινό), τη γωνία ϕ ανάμεσα στο νήμα της στάθμης και την τοπική κατακόρυφο.
(β) Χρησιμοποιώντας τιμές δεδομένων ή γνωστών μεγεθών, αναπτύξτε την τελική σχέση του ερωτήματος (α) σε προσέγγιση πρώτης τάξης και δείξτε ότι $\phi \approx \arctan[(\tan\theta)(1+c)] - \theta,\ (c = ;)$, και υπολογίστε τη γωνία ϕ για τις περιπτώσεις
(β$_1$) $\theta = 0^0$ (β$_2$) $\theta = 45^0$ (β$_3$) $\theta = 90^0$
(γ) Σχολιάστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (β$_1$), (β$_2$), (β$_3$).

Πρόβλημα 10.15



Θεωρήστε κεκλιμένο επίπεδο με κλίση $\boldsymbol{\alpha}$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο (βλ. σχήμα). Από το σημείο Α στη βάση του επιπέδου βάλλεται σώμα υπό γωνία $\boldsymbol{\beta}$ με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$.
(α) Να υπολογίσετε το βεληνεκές R του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο, και
(β) Να δείξετε ότι το μέγιστο βεληνεκές αντιστοιχεί σε γωνία βολής

$$\beta = (\alpha/2) + (\pi/4)$$

Πρόβλημα 10.16

Το ανάχωμα μιας στροφής ακτίνας R έχει κλίση θ. Εάν ένα αυτοκίνητο, του οποίου οι τροχοί έχουν συντελεστή τριβής μ πρόκειται να κινηθεί μέσα στη στροφή χωρίς να ολισθήσει,
(α) πόση είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα;
(β) Πόση θα ήταν η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα χωρίς τριβή;

Πρόβλημα 10.17

Στερεό σώμα μάζας M κινείται υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$. Τυχαίο (μαθηματικό) σημείο Σ (εντός ή εκτός του σώματος) έχει ταχύτητα v_Σ, ως προς το ίδιο αδρανειακό σύστημα.
(α) Να υπολογιστεί ο ρυθμός $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\Sigma/\mathrm{d}t$ με τον οποίο μεταβάλλεται η στροφορμή $\boldsymbol{L}_\Sigma$ του συστήματος περί το σημείο Σ, συναρτήσει των μεγεθών $\boldsymbol{N}_\Sigma^{\varepsilon\xi}$ (ροπή εξωτερικών δυνάμεων ως προς Σ), $\boldsymbol{v}_\Sigma$ (ταχύτητα του σημείου Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$), και $\boldsymbol{v}_{\rm cm}$ (ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος, ως προς το $Oxyz$).

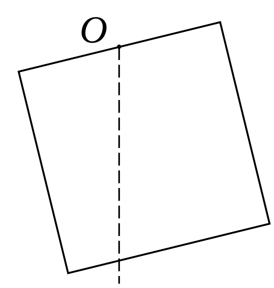
(β) Υπό ποιες προϋποθέσεις (για την κίνηση του σημείου Σ), ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς Σ, ικανοποιεί τη σχέση $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\Sigma/\mathrm{d}t = \boldsymbol{N}_\Sigma^{\varepsilon\xi}$. Η στροφορμή είναι περί το Σ αλλά ως προς το αδρανειακό σύστημα που αναφέραμε, οπότε οι ταχύτητες αναφέρονται ως προς αυτό.

Πρόβλημα 10.18

Ένα μικρό σώμα με μάζα m αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μ_κ μεταβάλλεται αναλόγως με το τετράγωνο της απόστασης x από το σημείο εκκίνησης, $\mu_\kappa = \lambda x^2$, όπου λ είναι μια θετική σταθερά και ο άξονας x είναι κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g. Να υπολογίσετε:
(α) την απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει, και
(β) τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει, καθώς και τη θέση που θα συμβεί αυτό.

Πρόβλημα 10.19

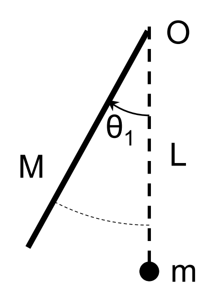
Ένα μεταλλικό τετραγωνικό πλαίσιο είναι κατασκευασμένο με τέσσερις ομογενείς λεπτές μεταλλικές ράβδους, η κάθε μία από τις οποίες έχει μάζα M και μήκος L. Το τετράγωνο αυτό είναι αναρτημένο σε σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσο της άνω οριζόντιας πλευράς του και εκτελεί ταλάντωση όπως στο σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδρανείας του εκκρεμούς ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο O.
(β) Να βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας του σώματος ως προς το O.
(γ) Να διατυπώσετε την εξίσωση κίνησης και να βρείτε τη συχνότητα της ταλάντωσης για ταλαντώσεις μικρού πλάτους.

Πρόβλημα 10.20

Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M ξεκινά από μικρή γωνία θ_1.

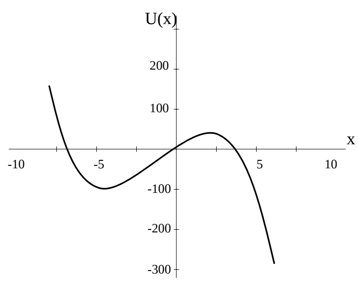


(α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο κατώτερο σημείο της κίνησής της;
(β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητά της και η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας της όταν βρίσκεται στο κατώτερο σημείο; (προσοχή: ξεχωρίστε το σύμβολο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου - χρησιμοποιήστε, για παράδειγμα, το σύμβολο Ω ή θ' - από το ω της ταλάντωσης).
(γ) Ποια είναι η στροφορμή της ράβδου, ως προς O, αυτή τη χρονική στιγμή;
Μόλις η ράβδος φτάσει στο κατώτερο σημείο προσκολλάται πάνω της σημειακή μάζα m (η μάζα είναι αρχικά ακίνητη).
(δ) Εξηγήστε σύντομα γιατί κατά την κρούση διατηρείται η στροφορμή, παρόλο που υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις.
(ε) Από τη διατήρηση της στροφορμής, ως προς O, του συστήματος ράβδος-μάζα, υπολογίστε τη γραμμική ταχύτητα του (νέου) κέντρου μάζας αμέσως μετά την κρούση (Υπενθύμιση: Ροπή αδρανείας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στη ράβδο: $(1/12ML^2$)).

Πρόβλημα 10.21

(α) Δίνεται η δύναμη $\boldsymbol{F} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$. Βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού (αφού ελέγξετε ότι μπορεί να οριστεί) με σημείο αναφοράς το $(0,0,0)$. Βρείτε το έργο της δύναμης αυτής από το σημείο $(1,1,1)$ έως το σημείο $(2,2,2)$.
(β) Δίνεται η δύναμη $\boldsymbol{F} = xyz\hat{\boldsymbol{x}} + xyx\hat{\boldsymbol{y}} + xyz\hat{\boldsymbol{z}}$. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη αυτή κατά τη μετακίνηση από το σημείο $(0,2,0)$ ως το σημείο $(3,3,1)$ πάνω στην καμπύλη που δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις ($x = 3t,\ y = t+2,\ z = t^2$).

Πρόβλημα 10.22



Σώμα μάζας κινείται στον άξονα x με δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση $V(x) = -(x+5)^3 + 10(x+5)^2 - 100$. Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 10$, με ταχύτητα που κατευθύνεται προς τον αρνητικό ημιάξονα των x και με ολική ενέργεια $E = -100$,
(α) να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η x.
(β) Αν η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι $E = 0$ και το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -5$, ποια είναι τα όρια κίνησής του; (Η εξίσωση $V(x) = 0$ έχει λύσεις $x = -7,8,\ x = -0,9$ και $x = 3,7$.)

Πρόβλημα 10.23

Ένα υπερηχητικό αεροπλάνο κινείται ως προς τη Γη με ταχύτητα $1,8\text{Mach} = 600\,\text{m/s}$. Πόση ώρα πρέπει να περάσει για τον πιλότο του υπερηχητικού αεροπλάνου για να φαίνεται «καθυστερημένο» το ρολόι του κατά 1 s σε σχέση με τα ρολόγια της γης; Αν το κανονικό μήκος (μήκος ηρεμίας) του αεροπλάνου είναι 50 m, πόσο μήκος υπολογίζει ένας παρατηρητής στη Γη; (Υπενθύμιση: για $\epsilon << 1$ ισχύει η προσέγγιση $\sqrt{1 \pm \epsilon} = 1 \pm (1/2)\epsilon$). Ταχύτητα φωτός: 3×10^8 m/s.

Πρόβλημα 10.24

Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r} = -kr\hat{\boldsymbol{r}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι επίπεδη.
(β) Να γράψετε, σε διανυσματική μορφή την εξίσωση κίνησης, και θεωρώντας ότι το επίπεδο κίνησης είναι το (xy),να την αναλύσετε σε δύο εξισώσεις. Να γράψετε τη λύση των δύο διαφορικών εξισώσεων και να υπολογίσετε τις παραμέτρους, αν γνωρίζουμε ότι για $t = 0$, το σώμα είχε συντεταγμένες $(x = a,\ y = 0)$ και ταχύτητα $(v_x = 0,\ v_y = V)$.
(γ) Να δείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι έλλειψη και να υπολογίσετε την περίοδο (Υπενθύμιση: η εξίσωση της έλλειψης είναι $x^2/A + y^2/B = 1$).

Πρόβλημα 10.25

Ένας λεπτός δακτύλιος με μάζα M και ακτίνα R είναι συναρμολογημένος έτσι ώστε να περιστρέφεται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του. Ένα σωματίδιο με μάζα m δένεται στο δακτύλιο και το σύστημα κρέμεται ακίνητο με τη μάζα m στο κάτω μέρος. Να βρείτε τη συχνότητα του συστήματος για ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Επίσης, να βρείτε τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που αποκτά το σύστημα, αν ελευθερωθεί από τη θέση ισορροπίας με τη μάζα m στην ανώτατη θέση.

Πρόβλημα 10.26

Ένας πύραυλος που έχει αρχική μάζα m_0 εκπέμπει αέρια με σταθερό ρυθμό m_0/τ και σταθερή ταχύτητα, v_0, σε σχέση με τον πύραυλο. Ο πύραυλος ξεκινά από ακινησία στην επιφάνεια της γης και ανυψώνεται κατακόρυφα. Θεωρώντας ότι το πεδίο βαρύτητας της γης είναι ομογενές, βρείτε το ύψος h ως συνάρτηση του χρόνου. Εξετάστε το τι συμβαίνει στην ταχύτητα και τη μετατόπιση του πυραύλου για την περίπτωση που $t << \tau$ και για την περίπτωση που $t \to \tau$.

Πρόβλημα 10.27

Δίνεται το πεδίο δυνάμεων $\boldsymbol{F} = (Ax + By^2)\hat{\boldsymbol{x}} + Cxy\,\hat{\boldsymbol{y}}$, με $ABC \neq 0$.

(α) Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τις σταθερές A, B και C ώστε το πεδίο αυτό να είναι διατηρητικό;

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση που βρήκατε μεταξύ των συντελεστών B και C στο ερώτημα (α):

(β) Να ελέγξετε αν το πιο πάνω πεδίο δυναμικού $\boldsymbol{F}$ απορρέει από τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x, y, z) = -(1/2)Ax^2 - By^2x$.

(γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα σωματίδιο μάζας $m = 0,2$ Kg βρίσκεται στο σημείο $\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{z}}\ \ (m)$ εντός του πεδίου, με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 0,1$ m/s, ποια είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 5$ min αντίστοιχα;

(δ) Τη στιγμή $t = 0$ αφήνουμε το σωματίδιο να κινηθεί. Με ποια επιτάχυνση θα ξεκινήσει;

Θεωρήστε τις σταθερές A, B γνωστές.

Πρόβλημα 10.28

Μια σφαιρική χιονοστιβάδα αρχικής μάζας m_0 αρχίζει να κατρακυλά τη στιγμή $t = 0$ σε μια πλαγιά που έχει κλίση 30^o ως προς τον ορίζοντα. Να υποθέσετε ότι η κάθοδός της γίνεται με σταθερή ταχύτητα v.

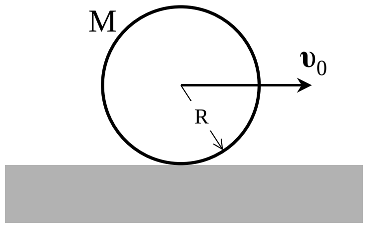
Αν αγνοήσετε τις δυνάμεις τριβής και αντιδράσεις ή άλλες δυνάμεις πλην του βάρους:

(α) Να γράψετε την εξίσωση κίνησης της χιονοστιβάδας.

(β) Υπολογίστε την αύξηση της μάζας της στη μονάδα του χρόνου, $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση $m = m(t)$.

(δ) Αναφέρετε τις γενικές περιπτώσεις όπου υπάρχει ο όρος $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t \neq 0$ στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.



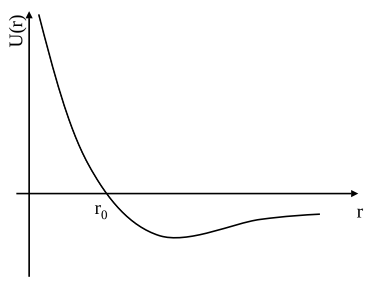
Πρόβλημα 10.29

Μια μπάλα μπιλιάρδου έχει μάζα M και ακτίνα R. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ μπάλας και τραπεζιού είναι η. Μια στέκα μπιλιάρδου κτυπάει τη μπάλα, έτσι που το κέντρο της αποκτά αρχική ταχύτητα v_0. Η διεύθυνση της δύναμης που δημιουργεί την κίνηση της μπάλας περνάει από το κέντρο της μάζας της. Τριβή δεν υπάρχει.

(α) Βρείτε τη γωνιακή και γραμμική επιτάχυνση της μπάλας αμέσως μετά το κτύπημα.

(β) Υπολογίστε το χρόνο και το διάστημα μέχρι η μπάλα να σταματήσει να ολισθαίνει, δηλαδή να αποκτήσει καθαρή κύλιση.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ροπή αδρανείας της μπάλας του μπιλιάρδου ως προς μία διάμετρό της είναι $I = (2/5)MR^2$.



Πρόβλημα 10.30

Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται υπό την επίδραση δυναμικού της μορφής

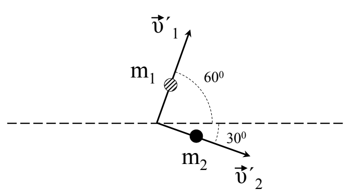
$$U(r) = U_0[(r_0/r)^2 - (r_0/r)]$$

όπου U_0 και r_0 είναι σταθερές ποσότητες και η απόσταση r είναι πάντα θετική.

(α) Να βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο, καθώς και το σημείο ισορροπίας του, $r_{ις}$.

(β) Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου στο σημείο ισορροπίας για να μπορέσει να διαφύγει στο άπειρο;

(γ) Αν το σωματίδιο κρατιέται αρχικά στη θέση $3r_0/2$ και αφήνεται ελεύθερο, σε ποια απόσταση θα φτάσει υπό την επίδραση του δυναμικού $U(r)$; Σε ποιο σημείο αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα και πόση είναι αυτή; Τι είδους κίνηση κάνει το σωματίδιο;



Πρόβλημα 10.31

Ένα σώμα με μάζα m_1 κινείται στον άξονα x με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_1$ και συγκρούεται με ακίνητο σώμα του οποίου η μάζα m_2 δεν είναι γνωστή. Μετά την κρούση, το σώμα που έχει μάζα m_1 παρεκκλίνει από την πορεία του προς τα επάνω κατά 60^o, ενώ το δεύτερο σώμα κινείται υπο γωνία 30^o κάτω από τον άξονα x, όπως δείχνει το σχήμα. Η κρούση είναι ελαστική.

(α) Να βρείτε τη μάζα m_2 συναρτήσει της m_1, καθώς και τις τελικές ταχύτητες $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ως συνάρτηση της $\boldsymbol{v}_1$.

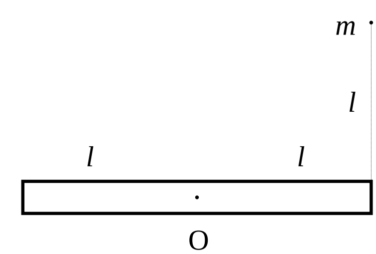
(β) Να βρείτε τις ταχύτητες των δύο σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Πρόβλημα 10.32

Δύο ίδιοι κύλινδροι μάζας M και ακτίνας r κυλίονται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο, κάθετα στη διεύθυνση των αξόνων τους. Τα κέντρα τους είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους και με σταθερά άκρα με ίδια ελατήρια σταθεράς k. Για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας, γράψτε τις εξισώσεις κίνησης και υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος. Η ροπή αδράνειας των κυλίνδρων ως προς τον άξονά τους είναι $Mr^2/2$.

Πρόβλημα 10.33

Μια ομογενής λεπτή ράβδος έχει μήκος 2ℓ και μάζα M. Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της, O, και είναι κάθετος σε αυτήν. Η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από αυτόν τον άξονα είναι $I_0 = (1/3)M\ell^2$. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη και οριζόντια. Μια σημειακή μάζα $m = M/3$ βρίσκεται αρχικά ακίνητη πάνω από το ένα άκρο της ράβδου, και σε ύψος ℓ πάνω από αυτό. Η μάζα αφήνεται ελεύθερη, με μηδενική αρχική ταχύτητα, να πέσει και να συγκρουστεί με το άκρο της ράβδου, στο οποίο και σφηνώνεται. Να δείξετε ότι:



(α) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά από την κρούση είναι $\omega_0 = \sqrt{g/2\ell}$.

(β) Κατά την κρούση, η μισή κινητική ενέργεια της m μετατρέπεται σε θερμότητα.

(γ) Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος της ράβδου και της σημειακής μάζας στην κίνηση που θα επακολουθήσει είναι $\omega_{\max} = \sqrt{3}\omega_0$.

Πρόβλημα 10.34

Ένα φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\gamma = \mu c^2$, όπου μ μια θετική σταθερά. Το φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο σωματίδιο του οποίου η μάζα ηρεμίας είναι M. Μετά τη σύγκρουση δημιουργείται ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_0, το οποίο παραμένει ακίνητο, και ένα άλλο σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_1, το οποίο κινείται με ταχύτητα v_1.

(α) Να δείξετε ότι $\dfrac{v_1}{c} = \dfrac{\mu}{M - m_0 + \mu}$.

(β) Να δείξετε ότι $m_1 = \sqrt{(M - m_0)(M - m_0 + 2\mu)}$.

(γ) Εξηγήστε με λόγια τι συμβαίνει στις ειδικές περιπτώσεις:

1. όταν είναι $m_0 = 0$, και

2. όταν είναι $m_0 = M$.

Πρόβλημα 10.35

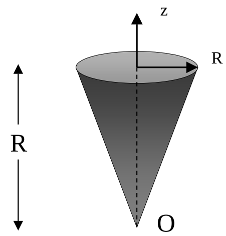
Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακόρυφα λόγω της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας, η ακτίνα της r αυξάνεται με ρυθμό $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \lambda r$, όπου λ είναι μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι a και η αρχική της μάζα m_0.

(α) Βρείτε τη μάζα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Βρείτε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

(γ) Να δείξετε ότι η ταχύτητα της σταγόνας τείνει προς μια οριακή τιμή, ίση με $g/3\lambda$.

Πρόβλημα 10.36



Βρείτε τη ροπή αδράνειας ενός συμπαγούς ομογενούς κώνου μάζας M, ύψους h και ακτίνας βάσης R, περί τον άξονα συμμετρίας του Oz.

Πρόβλημα 10.37

Το δυναμικό Lennard-Jones χαρακτηρίζει τα διατομικά μόρια και είναι της μορφής

$$U(r) = -\frac{b}{r^6} + \frac{a}{r^{12}}$$

όπου $a, b > 0$ και r η απόσταση των κέντρων των ατόμων.

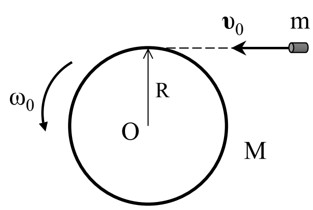
(α) Να υπολογίσετε τη δύναμη μεταξύ των ατόμων. Εξετάστε αν η δύναμη αυτή είναι κεντρική, διατηρητική, ελκτική ή απωστική.

(β) Σε ποια απόσταση τα άτομα βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας και τι είδος ισορροπίας είναι αυτή;

(γ) Πόση ενέργεια τουλάχιστο χρειάζεται για να διασπαστεί το μόριο;

Πρόβλημα 10.38

Ένας κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του χωρίς τριβές με μια αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0.



Μια σφαίρα, μάζας m και αρχικής ταχύτητας v_0, κτυπάει και ενσωματώνεται στο άκρο του κυλίνδρου, όπως δείχνει το σχήμα. (α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος κυλίνδρου-σφαίρας.

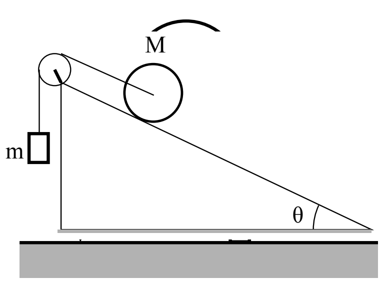
(β) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του συστήματος.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι: $I = (1/2)MR^2$.

Πρόβλημα 10.39

Δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 συνδέονται μέσω τροχαλίας με αβαρές νήμα και ελατήριο σταθεράς k. Αρχικά η μάζα m_1 είναι ακίνητη στην επιφάνεια του εδάφους, ενώ η m_2 συγκρατείται σε ύψος h, ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος. Αν η μάζα m_2 αφεθεί να πέσει, ποια είναι η ελάχιστη μάζα της, ώστε η άλλη μάζα να ανασηκωθεί από το έδαφος;

Πρόβλημα 10.40



Κύλινδρος μάζας M και ακτίνας r συγκρατείται ακίνητος σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Το κέντρο του κυλίνδρου συνδέεται με αβαρές νήμα μέσω τροχαλίας αμελητέας μάζας, με άλλο σώμα μάζας m. Το σώμα μάζας m αιωρείται πάνω από το έδαφος. Αν ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στον κύλινδρο και το επίπεδο είναι μ, να περιγράψετε την κίνηση των δύο σωμάτων μόλις αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν. Να εξετάσετε επίσης αν ο κύλινδρος μπορεί να κινηθεί χωρίς να ολισθήσει.

Πρόβλημα 10.41

Διατομικό μόριο αποτελείται από δύο άτομα με μάζες $m_1 = m_0$ και $m_2 = m_0/2$, των οποίων η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι της μορφής $U(r) = -U_0 r/(r^2 + a^2)$, όπου U_0, a, θετικές σταθερές και r το μέτρο της μεταξύ τους απόστασης. Να δείξετε ότι:

(α) υπάρχει απόσταση ευσταθούς ισορροπίας, r_0, μεταξύ των ατόμων και να την υπολογίσετε,

(β) για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο άτομα, το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, και

(γ) να υπολογίσετε την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος.

Πρόβλημα 10.42

Απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα m και σταθερά ελατηρίου s, διεγείρεται από μια δύναμη $F = F_0 \sin(\omega t)$.

(α) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση $x = x(t)$, στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t=0) = 0$ και $\dot{x}(t=0) = v_0$.

(β) Για συχνότητες διέγερσης κοντά στη συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{s/m}$, θεωρήστε ότι $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ (όπου $\Delta\omega$ μικρό και τέτοιο ώστε $\Delta\omega\, t << 1$). Αναπτύσσοντας τη λύση του ερωτήματος (α) γύρω από το ω_0, να δείξετε ότι το πλάτος της μετατόπισης αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.

Πρόβλημα 10.43

Ένα έλκυθρο γλυστρά οριζόντια στον πάγο. Σ' ένα ορισμένο σημείο O της τροχιάς του, η ταχύτητά του είναι $\boldsymbol{v}_0$. Από το σημείο αυτό και μέχρι να σταματήσει, το έλκυθρο διανύει απόσταση x_0. Να αποδειχθεί ότι ο συντελεστής τριβής, στην περίπτωση αυτή, είναι $v_0^2/(2gx_0)$.

Πρόβλημα 10.44

Λεπτή ράβδος μήκους l μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο, ο οποίος περνάει από το ένα της άκρο, O. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) που δίνεται από τη σχέση

$$\lambda(x) = \frac{2m}{3l}\left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

όπου x είναι η απόσταση από το άκρο O.

(α) Να δείξετε ότι η συνολική μάζα της ράβδου είναι ίση με m, το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο σημείο $x_C = (5/9)l$, και η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I_0 = (7/18)ml^2$.

(β) Η ράβδος εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης της ράβδου συναρτήσει της γωνίας απόκλισης θ της ράβδου από την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το άκρο O. Να δείξετε ότι, για μικρές τιμές της γωνίας θ η ταλάντωση είναι απλή αρμονική και να βρείτε τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.45

Στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου, ένα φωτόνιο ενέργειας E_γ συγκρούεται με έναν ακίνητο πυρήνα μάζας ηρεμίας M_0. Το φωτόνιο απορροφάται πλήρως από τον πυρήνα.

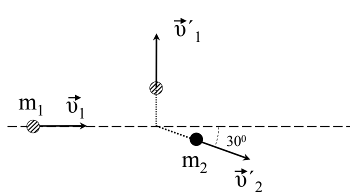
(α) Να βρείτε την ταχύτητα, v_1, και τη μάζα M_1, του σώματος που προκύπτει.

(β) Να δείξετε ότι στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου, η ταχύτητα V του κέντρου μάζας του συστήματος φωτονίου-πυρήνα πριν από τη σύγκρουση είναι

$$V = c\frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_0c^2}$$

(γ) Να βρείτε τις ενέργειες του φωτονίου, E_γ^C, και του πυρήνα, E^C, στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Πρόβλημα 10.46

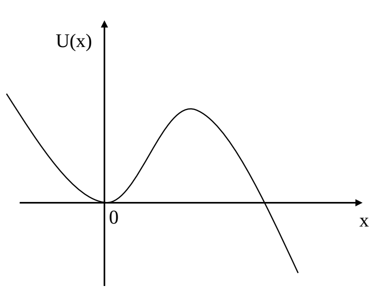


Ένα σώμα με μάζα m_1, το οποίο κινείται στον άξονα x με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_1$, συγκρούεται με ακίνητο σώμα του οποίου η μάζα m_2 δεν είναι γνωστή. Μετά την κρούση, το σώμα που έχει μάζα m_1 παρεκκλίνει από την πορεία του και κινείται κατά τον άξονα y, ενώ το δεύτερο σώμα κινείται υπό γωνία 30^o κάτω από τον άξονα x, όπως δείχνει το σχήμα. Η κρούση είναι ελαστική. Να βρείτε:

(α) τη μάζα m_2 ως συνάρτηση της μάζας m_1, καθώς και τις τελικές ταχύτητες $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$ ως συναρτήσεις της $\boldsymbol{v}_1$, και

(β) τις ταχύτητες των δύο σωματιδίων πριν ($\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$) και μετά την κρούση ($\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'$) στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Πρόβλημα 10.47



Ένα σώμα με μάζα $m = 1$ Kg κινείται στη μία διάσταση υπό την επίδραση δυναμικής ενέργειας $U(x) = kx^2 - k'x^3$, όπου $k = 1$ N/m και $k' = (1/3)$ N/m^2 (βλ. σχήμα).

(α) Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας της $U(x)$, καθώς και τα σημεία που μηδενίζεται.

(β) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη δύναμη $\boldsymbol{F}(x)$.

(γ) Το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 1$ με αρχική ταχύτητα $v = -1x$ m/s. Να περιγράψετε την κίνησή του.

Πρόβλημα 10.48

Ένας πλανήτης έχει την ίδια πυκνότητα με τη Γη αλλά διπλάσια ακτίνα. Πόση είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά του; (δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη $g = 10$ m/s^2)

Πρόβλημα 10.49

Ένα εκκρεμές μήκους l κρέμεται από την οροφή ενός ανελκυστήρα που βρίσκεται στην επιφάνεια της γης. Ο ανελκυστήρας κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση $a = g/2$ (όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας). Να βρεθεί η συχνότητα, όταν το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Πρόβλημα 10.50

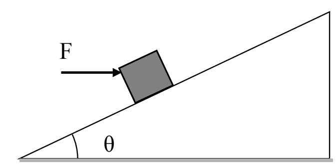
Μια σφαίρα μάζας m κινείται με σταθερή ταχύτητα v και κτυπά μια άλλη σφαίρα μάζας M η οποία είναι αρχικά ακίνητη. Μετά την κρούση η μάζα m ενσωματώνεται στη μάζα M. Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος των δύο σφαιρών;

Πρόβλημα 10.51

Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται σε διάσταση έτσι ώστε η ταχύτητά του να δίνεται από τη σχέση $v(x) = ax^{-n}$, όπου a, n είναι σταθερές και x η θέση του σωματιδίου. Να βρείτε την επιτάχυνση του σωματιδίου ως συνάρτηση της θέσης x.

Πρόβλημα 10.52

Μια οριζόντια δύναμη σπρώχνει σώμα μάζας m, σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ ως προς οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης της τριβής που ασκείται στο σώμα.



Πρόβλημα 10.53

Μια μάζα κρέμεται από ένα κατακόρυφο ελατήριο και μετατοπίζεται, κατά την κατακόρυφη προς τα κάτω, κατά μια απόσταση y από το σημείο ισορροπίας του. Αφού αφεθεί ελεύθερο, εκτελεί μια αρμονική περιοδική κίνηση με περίοδο T. Να βρεθεί η ταχύτητα της μάζας μετά από χρόνο $5T/4$.

Πρόβλημα 10.54

Δύο δορυφόροι κινούνται γύρω από τη γη σε διαφορετικές κυκλικές τροχιές που έχουν ακτίνες a και $b = 3a$. Αν η επιτρόχιος ταχύτητα του δορυφόρου που κινείται στην τροχιά με τη μικρότερη ακτίνα είναι v, να βρεθεί η ταχύτητα του άλλου δορυφόρου.

Πρόβλημα 10.55

Για δυναμική ενέργεια του τύπου $U(r) = kr^n$, όπου k θετική σταθερά, να γράψετε το διάνυσμα της δύναμης.

Πρόβλημα 10.56

Όταν ο ήλιος μας καταλήξει κάποτε σ' ένα λευκό νάνο, η ακτίνα του θα μικρύνει περίπου κατά 100 φορές. Μεταβάλλεται η περίοδος της περιστροφής περί τον άξονά του (που είναι σήμερα γύρω στον ένα μήνα); Αν ναι, να δοθεί μια εκτίμηση. (δίνεται η ροπή αδράνειας σφαίρας μάζας M και ακτίνας R ως προς τον άξονά της, $I_{\text{σφ}} = (2/5)MR^2$)

Πρόβλημα 10.57

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από ένα σταθερό σημείο υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης μέτρου $F = k/r^3$, όπου $k > 0$. Αν η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου είναι μηδέν για $r \to \infty$,να βρεθεί η ολική ενέργεια του σωματιδίου στην κυκλική τροχιά.

Πρόβλημα 10.58

Μια σφαίρα κι ένας κύλινδρος ξεκινούν από την ίδια θέση όπου βρίσκονταν σε ακινησία και κυλούν προς τα κάτω (χωρίς να ολισθαίνουν) στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Όταν θα διανύσουν το ίδιο μήκος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, να δείξετε ότι η σφαίρα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και ότι αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων.

Πρόβλημα 10.59

Να αποδείξετε ότι η ακόλουθη έκφραση

$$I = 2\frac{\partial R(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + S(x,t)A_1(x,t) + 2R(x,t)A_2(x,t) - 3\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\dot{x} + T(x,t)$$

διατηρείται για ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\ddot{x} + A_2(x,t)\dot{x}^2 + A_1(x,t)\dot{x} + A_0(x,t) = 0$$

όπου $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}^2t$. Τα $R(x,t),\ S(x,t),\ T(x,t)$ περιγράφονται από το παρακάτω σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 3A_0\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial SA_1}{\partial t} + R\frac{\partial A_1}{\partial x} + 2A_2\frac{\partial R}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} + 2A - 1\frac{\partial S}{\partial x} + S\frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{RA_2}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - A_2\frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial x} + S\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} - 2\frac{\partial A_2}{\partial t}\right) &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial t} + R\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} - 2\frac{\partial A_2}{\partial t}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 10.60

Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται σε μία διάσταση x και η κίνησή του περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή, όπου

$$m\ddot{x(t)} + k(t)x(t) = 0 \tag{10.6}$$

όπου $k(t)$ είναι συνάρτηση του t.

(α) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα της άσκησης 10. 10 για να κατασκευάσετε μια διατηρούμενη ποσότητα κίνησης. Η εξίσωση (10) αναφέρεται ως εξίσωση Ermakov.

(β) Επίσης να αποδείξετε ότι το I_1 που δίνεται από

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + (\dot{\rho}x - \dot{x}\rho)^2\right]$$

είναι διατηρούμενη ποσότητα, όπου ρ είναι μια λύση της ακόλουθης εξίσωσης

$$\ddot{\rho} + \frac{k(t)}{m}\rho = \frac{1}{\rho^3}$$

Πρόβλημα 10.61

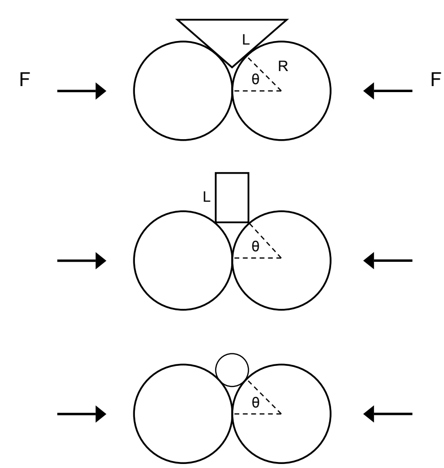
Θεωρήστε σωματίδιο μοναδιαίας μάζας ($m = 1$) που κινείται σε μια διάσταση-x και η κίνηση περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή, όπου

$$\ddot{x} + k\dot{x}^2 + a(t)\dot{x} = 0$$

όπου k είναι σταθερά, και $a(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου.
Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 10.10 για να κατασκευάσετε μια διατηρούμενη ποσότητα κίνησης.

Πρόβλημα 10.62

Το καθένα από τα παρακάτω επίπεδα αντικείμενα τοποθετείται, όπως φαίνεται στο σχήμα, μεταξύ δύο κύκλων ακτίνας R μηδενικής τριβής. Η πυκνότητα μάζας του κάθε αντικειμένου είναι σ, και οι ακτίνες στα σημεία επαφής σχηματίζουν γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε την οριζόντια δύναμη που πρέπει να εφαρμοστεί στους κύκλους για να κρατηθούν ενωμένοι. Για ποια γωνία θ είναι αυτή η δύναμη μέγιστη ή ελάχιστη;



(α) Ισοσκελές τρίγωνο με μήκος κοινής πλευράς L

(β) Ορθογώνιο ύψους L

(γ) Κύκλος.

Πρόβλημα 10.63

Θεωρήστε σωματίδιο μοναδιαίας μάζας που κινείται σε μια διάσταση-x και η κίνηση περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή, όπου

$$\ddot{x} - \frac{2}{x}\dot{x}^2 + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

όπου $a(t)$, $b(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου.

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 10.10 για να κατασκευάσετε μια διατηρούμενη ποσότητα κίνησης.

Πρόβλημα 10.64

Φορτισμένο σωματίδιο φορτίου q και μάζας m είναι σε ηρεμία στην αρχή των αξόνων την $t = 0$ σε ηλεκτρικό, $\boldsymbol{E}$, και μαγνητικό, $\boldsymbol{B}$, πεδίο (κάθετα μεταξύ τους) που δίνεται από

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= E[\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}],\\ \boldsymbol{B} &= -B\hat{\boldsymbol{z}},\end{aligned}$$

όπου $(\omega = qB/m)$. Βρείτε την κινητική ενέργεια T του σωματιδίου και της τροχιάς του και να αποδείξετε ότι η κίνηση είναι στο επίπεδο xy.

Πρόβλημα 10.65

Αλυσίδα μήκους L και πυκνότητας μάζας σ. βρίσκεται ευθυγραμμισμένη πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια μηδενικής τριβής. Πιάνετε το ένα άκρο και το τραβάτε προς τα πίσω κατά μήκος της ίδιας της αλυσίδας, παράλληλα. Υποθέστε ότι το τραβάτε με σταθερή ταχύτητα v. Πόση δύναμη πρέπει να ασκήσετε; Πόσο έργο παράγετε συνολικά μέχρι να ευθυγραμμιστεί ξανά η αλυσίδα; Χάνεται καθόλου ενέργεια μετατρεπόμενη σε ζέστη;

Πρόβλημα 10.66

Να ορίσετε ένα δυναμικό σύστημα N σωματιδίων το καθένα μάζας m και θέσης $\boldsymbol{r}_i$ στο χώρο, που κινείται υπό την επίδραση δυνάμεων $\boldsymbol{F}_i$ στο κάθε σωματίδιο, όπου $\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{F}_i$ και $\boldsymbol{p}_i$ είναι η ορμή του i-οστού σωματιδίου.

(α) Να αποδείξετε ότι

$$2\langle T\rangle = -\langle\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{r}_i\rangle$$

όπου $\langle f(t)\rangle$ είναι η μέση τιμή μιας τυχαίας συνάρτησης $f(t)$ ως προς το χρόνο

$$\langle f(t)\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\mathrm{d}t$$

και T είναι η ολική κινητική ενέργεια του δυναμικού συστήματος.

(β) Εφαρμόστε το παραπάνω αποτέλεσμα στην περίπτωση ενός σωματιδίου που κινείται σε κεντρικό δυναμικό $U(r)$, που δίνεται από:

$$U(r) = \frac{a}{r^n}$$

όπου a η τιμή του δυναμικού, για $n = 1$ έχουμε το δυναμικό Coulomb, να αποδείξετε ότι:

$$\langle T\rangle = -\frac{n}{2}\langle U\rangle$$

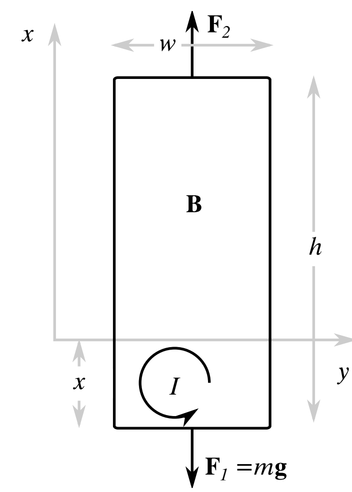
και η ολική μέση ενέργεια $\langle E\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle$ είναι

$$\langle E\rangle = \frac{2-n}{2}\langle U\rangle$$

Πρόβλημα 10.67

Να εκφράσετε την κινητική ενέργεια, T, για ένα σωματίδιο μάζας m σε παραβολικές συντεταγμένες ξ, η, ϕ, όπου $z = (\xi - \eta)/2$, $\rho = \sqrt{\xi\eta}$ και όπου ρ, ϕ, z είναι οι συνήθεις κυλινδρικές συντεταγμένες. Με τι μοιάζουν οι συντεταγμένες επιφάνειες;

Πρόβλημα 10.68



Ορθογωνικός αγώγιμος βρόχος, πλάτους, w, μήκους, h, και μάζας m, πέφτει μέσα από οριζόντιο μαγνητικό πεδίο που έχει ομογενή τιμή, B, για $x < 0$ και εξαφανίζεται για $x > 0$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρήστε ότι τα R και L είναι η αντίσταση και η επαγωγή του βρόχου. Βρείτε την εξίσωση για την ταχύτητα του βρόχου συναρτήσει του χρόνου, $v(t) = \dot{x}(t)$, για αρχική συνθήκη $v(0) = x(0) = 0$, (όπου x είναι ο βαθμός ελευθερίας που περιγράφει την κίνηση του βρόχου), για την ειδική περίπτωση που $\lambda < \omega_0$, όπου $\lambda = R/2L$ και $\omega_0 = wB/(mL)^{1/2}$. Να εξετάσετε την περίπτωση ενός υπεραγώγιμου βρόχου, $R \to 0$, και να αποδείξετε ότι ο βρόχος ταλαντώνεται με συχνότητα $\omega_0 = wB/(mL)^{1/2}$ μεταξύ του $x = 0$ και του $x = 2g/\omega_0^2$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Επίσης, βρείτε την εξίσωση για το επαγόμενο ρεύμα, $I(t)$.

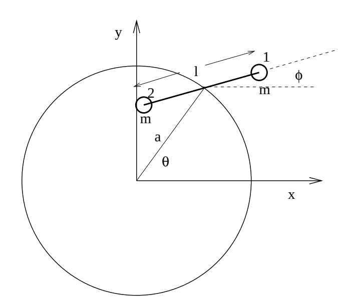
Πρόβλημα 10.69

Να εκφράσετε την κινητική ενέργεια, T, για ένα σωματίδιο μάζας m σε ελλειπτικές συντεταγμένες $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \phi$ όπου $\bar{\xi} = (r_1 + r_2)/2\sigma$, $\bar{\eta} = (r_2 - r_1)/2\sigma$, με

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-\sigma)^2}, \qquad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+\sigma)^2}$$

όπου σ είναι θετική σταθερά. Σημειώστε ότι $\bar{\xi} > \bar{\eta}$ εφόσον $(r_1 + r_2) > (r_2 - r_1)$ και r_1, r_2 είναι και τα δύο θετικοί αριθμοί. Με τι μοιάζουν οι συντεταγμένες επιφάνειες;

Πρόβλημα 10.70



Δύο μάζες m συνδέονται με στερεή αβαρή ράβδο μήκους l, το κέντρο του οποίου είναι περιορισμένο να κινείται σε κύκλο ακτίνας a. Δώστε την κινητική ενέργεια στις γενικευμένες συντεταγμένες, θ και ϕ.

Πρόβλημα 10.71

Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\boldsymbol{F}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}, t)$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα P_g που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\boldsymbol{P}_g = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{C}$$

να είναι διατηρούμενη ποσότητα, όπου $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ είναι η γραμμική ορμή του σωματιδίου. Ας ονομάσουμε αυτό το διάνυσμα, $\boldsymbol{P}_g$, μια *γενικευμένη γραμμική ορμή*. Πώς σχετίζεται το διάνυσμα $\boldsymbol{C}$ με τη δύναμη $\boldsymbol{F}$;

(α) Να εφαρμόσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα στην περίπτωση σωματιδίου που πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας και να υποθέσετε ότι η δύναμη της τριβής με τον αέρα έχει γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - \lambda\boldsymbol{v}$$

όπου $\boldsymbol{g}$, και $\boldsymbol{v}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και η ταχύτητα του σωματιδίου, αντίστοιχα. Ποια είναι η διατηρούμενη ποσότητα $\boldsymbol{P}_g$ στην περίπτωση αυτή;

(β) Επιπλέον εφαρμόστε την ίδια διαδικασία στην περίπτωση φορτισμένου σωματιδίου φορτίου, q, που αλληλεπιδρά με ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}(t)$ και σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Βρείτε τη *γενικευμένη γραμμική ορμή*, $\boldsymbol{P}_g$.

Οι ίδιες ιδέες μπορούν να εφαρμοσθούν στην περίπτωση σωματιδίου που κινείται υπό την επίδραση εξωτερικής ροπής, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Στην περίπτωση αυτή, να αποδείξετε ότι υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, t)$ τέτοιο ώστε η ποσότητα

$$\boldsymbol{L}_g = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{G}$$

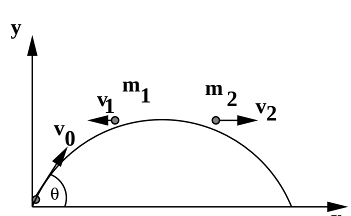
να είναι διατηρούμενη, όπου $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ είναι η στροφορμή του σωματιδίου. Ας ονομάσουμε αυτό το νέο διάνυσμα $\boldsymbol{L}_g$ *γενικευμένη στροφορμή*.

(γ) Εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία στην περίπτωση φορτισμένου σωματιδίου φορτίου q, που κινείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ κάθετο στην κίνησή του. Θεωρήστε ότι το σωματίδιο κινείται στο επίπεδπο xy. Ποια είναι η *γενικευμένη στροφορμή*;

(δ) Επιπλέον βρείτε τη *γενικευμένη γραμμική ορμή*, $\boldsymbol{L}_g$, ηλεκτρικού φορτίου q που αλληλεπιδρά με μαγνητικό μονόπολο g (αν υπάρχει!), ακίνητο στην αρχή των αξόνων, όπου το μαγνητικό του πεδίο δίνεται από

$$\boldsymbol{B} = \frac{g}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Πρόβλημα 10.72

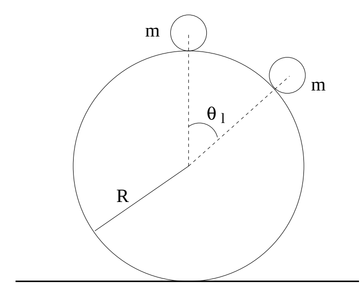


Βλήμα εκτοξεύεται από κανόνι σε γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Στο ζενίθ της τροχιάς του το βλήμα εκρήγνυται σε δύο κομμάτια μάζας m_1 και m_2, το καθένα από τα οποία ταξιδεύει οριζόντια αμέσως μετά την έκρηξη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ενέργεια της έκρηξης είναι ίση με την αρχική ενέργεια του βλήματος E_0. Ένα από τα κομμάτια κτυπάει το κανόνι. Βρείτε το λόγο μαζών των κομματιών ως συνάρτηση του θ. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα και τη μάζα του εκρηκτικού.

Πρόβλημα 10.73

Βαρύ σωματίδιο μάζας m τοποθετείται στην κορυφή κατακόρυφου στεφανιού ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέστε ότι υπάρχει τριβή ολίσθησης και ότι η στατική και η κινητική τριβή είναι ίσες με έναν αριθμό μ. Να αποδείξετε ότι η γωνία θ_l με την οποία η μάζα αφήνει το κατακόρυφο στεφάνι μπορεί να υπολογισθεί λύνοντας την παρακάτω εξίσωση:

$$\cos\theta_l = 2\frac{1+\mu^2}{1+4\mu^2}\left[2\cos\theta_l - \frac{3}{1+\mu^2}(\cos\theta_l - \mu\sin\theta_l) + \right.$$
$$\left. + \, \mathrm{e}^{2\mu(\theta_l - \tan^{-1}\mu)}\frac{1}{(1+\mu^2)^{1/2}}\right]$$



Πρόβλημα 10.74

Υποθέστε ότι ένα σύννεφο αποτελείται από μικροσκοπικά σταγονίδια νερού αιωρούμενα (ομογενώς κατανεμημένα, με μέση πυκνότητα μάζας λ και σε ηρεμία) στον αέρα, και θεωρήστε μια σταγόνα της βροχής (πυκνότητας ρ) που πέφτει ανάμεσά τους. Να δείξετε ότι η επιτάχυνση της σταγόνας είναι $a = g/7$. (Υποθέστε ότι, όταν η σταγόνα χτυπάει ένα σταγονίδιο, το νερό του σταγονιδίου προστίθεται στη σταγόνα. Επίσης, υποθέστε ότι η σταγόνα είναι πάντα σφαιρική.)

Πρόβλημα 10.75

Έστω ένα μολύβι που στέκεται όρθιο στη μύτη του κι έπειτα πέφτει. Ας εξιδανικεύσουμε το μολύβι ως μια μάζα m που κάθεται στο άκρο μιας αβαρούς ράβδου μήκους l.

(α) Θεωρήστε ότι το μολύβι σχηματίζει αρχική (μικρή) γωνία θ_0 με την κατακόρυφο, και ότι η αρχική της γωνιακή ταχύτητα είναι ω_0. Η γωνία τελικά θα γίνει μεγάλη, αλλά για όσο είναι ακόμα μικρή (έτσι ώστε $\sin\theta \approx \theta$), να την υπολογίσετε συναρτήσει του χρόνου.

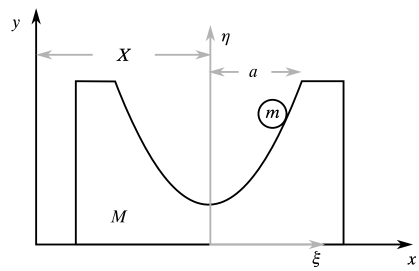
(β) Μπορεί να σκεφτείτε ότι θα ήταν δυνατό (θεωρητικά, έστω) το μολύβι να ισορροπήσει για ένα τυχαία μεγάλο χρονικό διάστημα, κάνοντας τα αρχικά θ_0 και ω_0 αρκετά μικρά.

Τελικά όμως, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg (που θέτει ένα περιορισμό στο πόσο καλά μπορούμε να γνωρίζουμε τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου), είναι αδύνατο να ισορροπήσει το μολύβι για περισσότερο από ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Το θέμα είναι ότι δε μπορείτε να είστε σίγουροι ότι το μολύβι είναι αρχικά και στην κορυφή *και* σε ηρεμία. Ο στόχος αυτού του προβλήματος είναι να ποσοτικοποιηθούν τα προηγούμενα. Το όριο του χρόνου είναι σίγουρο ότι θα σας εκπλήξει.

Χωρίς να μπούμε στη θεωρία της κβαντομηχανικής, ας πούμε απλά ότι η αρχή της αβεβαιότητας λέει (μέχρι και για όρους πρώτης τάξης) ότι $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ (όπου $\hbar = 1.06 \cdot 10^{-34}$ Js είναι η σταθερά του Planck).

Οι ακριβείς επιπτώσεις αυτού είναι κάπως ασαφείς, αλλά θα θεωρήσουμε ότι σημαίνει πως οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν τη σχέση: $(l\theta_0)(ml\omega_0) \geq \hbar$.
Με αυτή τη συνθήκη, βρείτε το μέγιστο χρόνο που μπορεί να πάρει η λύση στο ερώτημα (α) για να γίνει πρώτης τάξης. Με άλλα λόγια, καθορίστε (προσεγγιστικά) το μέγιστο χρόνο που μπορεί να ισορροπήσει το μολύβι. (Υποθέστε ότι $m = 0.01$ Kg, και $l = 0.1$ m.)

Πρόβλημα 10.76



Μικρό κομμάτι μάζας m ηρεμεί σε μια παραβολική βάση μάζας M που κάθεται σε ένα οριζόντιο τραπέζι, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σχήμα της βάσης δίνεται από

$$\eta = \frac{1}{2}k\xi^2, \quad -a \leq \xi \leq a$$

στο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) με αρχή των αξόνων στο τραπέζι, όπου k είναι σταθερά. Αν το σύστημα ξεκινάει σε ηρεμία με το σημείο P της μάζας σε απόσταση $y = y_0 = (1/2)ka^2$ πάνω από το τραπέζι, βρείτε την τροχιά του κομματιού και την περίοδο, T, της ταλαντωτικής κίνησης του συστήματος.Συγκεκριμένα, να αποδείξετε ότι η περίοδος είναι

$$T = 4\sqrt{\frac{k}{g}\frac{a}{\rho}}E(\rho)$$

όπου $E(\rho)$ είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους

$$E(\rho) = \int_{\pi/2}^{0}(1-\rho\sin^2\theta)^{1/2}\mathrm{d}\theta = \int_0^1\left(\frac{1-\rho t^2}{1-t^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}t$$

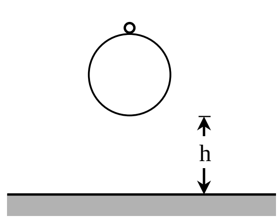
και το ρ δίνεται από

$$\rho = ka\left(\frac{1+\mu}{1+k^2(1+\mu)a^2}\right)^{1/2}, \qquad \text{με } \mu = m/M$$

Πρόβλημα 10.77

Δεδομένου ενός σημείου P στο διάστημα, και δεδομένου ενός κομματιού από ελατό υλικό σταθερής πυκνότητας, τι σχήμα θα δίνατε στο υλικό και πώς θα το τοποθετούσατε έτσι ώστε να δημιουργήσετε το μεγαλύτερο δυνατό βαρυτικό πεδίο στο P;

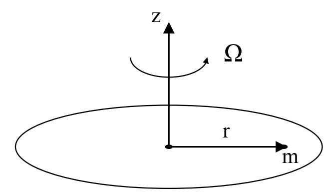
Πρόβλημα 10.78



Ένα μπαλάκι του τέννις με (μικρή) μάζα m_2 κάθεται στην κορυφή μιας μπάλας του μπάσκετ με (μεγάλη) μάζα m_1. Το κατώτατο σημείο της μπάλας του μπάσκετ βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος. Οι μπάλες αφήνονται να πέσουν. Σε τι ύψος αναπηδά το μπαλάκι του τέννις; (*Σημ: Θεωρήστε προσεγγιστικά ότι η $m_1 >> m_2$, και θεωρήστε ότι οι μπάλες αναπηδούν ελαστικά.*)

Πρόβλημα 10.79

Μπάλα ακτίνας R και μάζας m με ομογενή πυκνότητα μάζας κυλιέται χωρίς ολίσθηση σε μια περιστροφική πλάκα, που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω. Να δείξετε ότι η μπάλα κινείται κυκλικά (όπως φαίνεται από το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου), με συχνότητα ίση με τα **2/7** της συχνότητας της περιστροφικής πλάκας, δηλαδή $\omega = (2/7)\Omega$. Η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας μάζας m και ακτίνας R είναι $I = (2/5)mR^2$.



Πρόβλημα 10.80

Θεωρήστε πυρήνα φορτίου $Ze > 0$ και ηλεκτρόνιο φορτίου $-e$ και μάζας m που περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα βρίσκεται σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$ που δείχνει κατά μήκος της θετικής φοράς του άξονα z.
Να γράψετε τις κλασσικές εξισώσεις κίνησης για ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο με ορμή, $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$, και στροφορμή $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, όπου $\boldsymbol{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του ηλεκτρονίου με φορτίο $-e$ σε σχέση με τον πυρήνα. Μπορείτε εύκολα να αποδείξετε ότι η ενέργεια, H, και η προβολή της στροφορμής κατά μήκος του ηλεκτρικού πεδίου, $\boldsymbol{E}$, $\Gamma = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{E}$ ενός τέτοιου ηλεκτρονίου είναι σταθερές της κίνησης.
Να δείξετε ότι η ποσότητα Ω είναι επίσης διατηρήσιμη

$$\Omega = \left[\left(\boldsymbol{p} - \frac{Z\mathrm{e}^2 m}{rL^2} \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{r} \right) \times \boldsymbol{L} - \frac{em}{2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{r} \right] \cdot \boldsymbol{E}$$

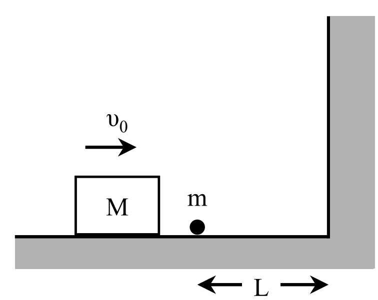
Πρόβλημα 10.81

Κουτί μεγάλης μάζας M κυλιέται με ταχύτητα υ_0 σε τραπέζι μηδενικής τριβής προς ένα τοίχο. Συγκρούεται ελαστικά με μια μπάλα μικρής μάζας m, που αρχικά ηρεμεί σε απόσταση L από τον τοίχο. Η μπάλα κυλιέται προς τον τοίχο, αναπηδά ελαστικά, και έπειτα συνεχίζει αναπηδώντας μεταξύ του κουτιού και του τοίχου.

(α) Πόσο κοντά θα έρθει το κουτί στον τοίχο;

(β) Πόσες φορές αναπηδά η μπάλα στο κουτί, μέχρι το κουτί να φτάσει τη μικρότερη απόσταση από τον τοίχο;

Υποθέστε ότι $M >> m$, και δώστε την απάντησή σας στην πρώτη δύναμη του m/M.



Πρόβλημα 10.82

Σωματίδιο μάζας m υπόκειται σε δύναμη $F(t) = me^{-bt}$. Η αρχική θέση και ταχύτητα είναι μηδέν. Βρείτε το $x(t)$.

Πρόβλημα 10.83

Μια μπάλα εκτοξεύεται από την άκρη ενός γκρεμού ύψους h. Με τι γωνία κλίσης πρέπει να πεταχτεί έτσι ώστε να διανύσει μια μέγιστη οριζόντια απόσταση; Υποθέστε ότι το έδαφος κάτω από το γκρεμό είναι επίπεδο.

Πρόβλημα 10.84

Μπάλα πέφτει από ύψος h. Αναπηδά σε μια επιφάνεια σε ύψος y (χωρίς απώλεια ταχύτητας). Η επιφάνεια έχει κλίση 45^o, έτσι ώστε η μπάλα να αναπηδήσει οριζόντια. Πόσο πρέπει να είναι το y έτσι ώστε η μπάλα να διανύσει μέγιστη οριζόντια απόσταση;

Πρόβλημα 10.85

Μπάλα εκτοξεύεται με ταχύτητα v από το έδαφος. Έστω θ_0 η γωνία με την οποία η μπάλα θα έπρεπε να εκτοξευθεί ώστε η διανυόμενη απόσταση στον αέρα να είναι μέγιστη. Να δείξετε ότι η θ_0 ικανοποιεί την

$$1 = \sin\theta_0 \ln\left(\frac{1+\sin\theta_0}{\cos\theta_0}\right)$$

(Η αριθμητική λύση μας δίνει την τιμή $\theta_0 \approx 56.5^o$.)

Πρόβλημα 10.86

Μπάλα εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 από το έδαφος. Με τι γωνία θα έπρεπε να εκτοξευθεί η μπάλα ώστε το εμβαδό κάτω από την τροχιά να είναι μέγιστο;

Πρόβλημα 10.87

Μπάλα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω έτσι ώστε να φτάσει σε ύψος h. Πέφτει κάτω και αναπηδά επανειλημμένα. Μετά από κάθε αναπήδηση, επιστρέφει σε ένα συγκεκριμένο κλάσμα f του προηγούμενού της ύψους. Βρείτε την ολική απόσταση που διανύθηκε, και επίσης τον ολικό χρόνο, πριν φτάσει σε ηρεμία. Ποια είναι η μέση ταχύτητά της;

Πρόβλημα 10.88

Για μικρές ταλαντώσεις, η περίοδος ενός εκκρεμούς είναι κατά προσέγγιση $T \approx 2\pi\sqrt{\ell/g}$, ανεξάρτητα από το πλάτος, θ_0. Για πεπερασμένες ταλαντώσεις, να δείξετε ότι η ακριβής έκφραση για το T είναι

$$T = \sqrt{\frac{8\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Έπειτα, βρείτε μια προσέγγιση για την τιμή αυτή του T. Είναι πιο βολικό να αντιμετωπίζουμε ποσότητες που τείνουν στο 0 καθώς το $\theta \to 0$, και γι' αυτό κάντε χρήση της ταυτότητας $\cos\phi = 1 - 2\sin^2(\phi/2)$ για γράψετε το T σε σχέση με τα συνημίτονα. Έπειτα κάντε την αλλαγή μεταβλητών, $\sin x \equiv \sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)$. Τέλος, αναπτύξτε την ποσότητα υπό ολοκλήρωση διακριτικά σε δυνάμεις της (αρκετά μικρής ποσότητας) θ_0, και εκτελέστε τα ολοκληρώματα για να δείξετε ότι

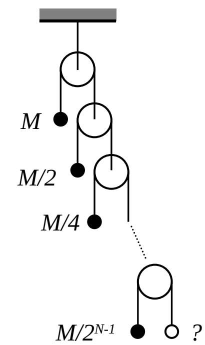
$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots\right)$$

Πρόβλημα 10.89

Θεωρήστε μια μηχανή του Atwood (βλ. σχήμα) που αποτελείται από N μάζες, M, $M/2$, $M/4$, $\dots$, $M/2^{N-1}$. (Όλες οι τροχαλίες και τα νήματα είναι αβαρή, ως συνήθως.)

(α) Τοποθετήστε μια μάζα $M/2^{N-1}$ στο ελεύθερο άκρο του κατώτατου νήματος. Ποιες είναι οι επιταχύνσεις όλων των μαζών;

(β) Αφαιρέστε τη μάζα $M/2^{N-1}$ (που ήταν τυχαία μικρή, για πολύ μεγάλο N) που ήταν τοποθετημένη στο ερώτημα (α). Ποιες είναι οι επιταχύνσεις όλων των μαζών, τώρα που αφαιρέσατε αυτό το απειροστό κομμάτι;

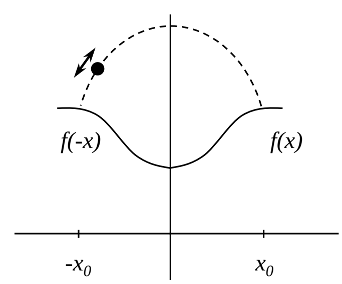


Πρόβλημα 10.90

Πλάκα μάζας m αρχικά κινείται οριζόντια με ταχύτητα v πάνω σε τραπέζι μηδενικής τριβής. Μάζα m αφήνεται να πέσει κατακόρυφα πάνω στην πλάκα και σύντομα φτάνει σε ισορροπία σε σχέση με την πλάκα. Πόση ενέργεια απαιτείται για να έρθει ξανά το σύστημα σε ταχύτητα v;

Πρόβλημα 10.91

Θεωρήστε μια πιο γενική περίπτωση του προβλήματος (**;;**). Τώρα, έστω μια μπάλα που αναπηδά μεταξύ μιας επιφάνειας που ορίζεται από την $f(x)$ (για $x > 0$) και $f(-x)$ (για $x < 0$) (βλ. σχήμα). Και πάλι, υποθέστε ότι οι αρχικές συνθήκες έχουν καθοριστεί έτσι ώστε η κίνηση της μπάλας να είναι μια παραβολή (η μπάλα αναπηδά μεταξύ των σημείων επαφής στα $(x_0, f(x_0))$ και $(-x_0, f(x_0))$, για κάποιο x_0).*

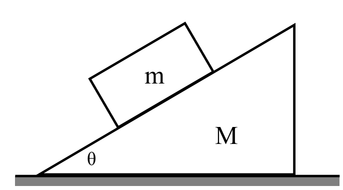


Πρόβλημα 10.92

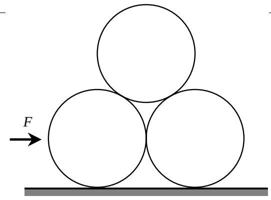
Μπάλα πέφτει από ύψος h. Αναπηδά σε επιφάνεια σε ύψος h (χωρίς απώλεια ταχύτητας). Η επιφάνεια είναι κεκλιμένη έτσι ώστε η μπάλα να αναπηδά σε γωνία θ σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο. Πόσο πρέπει να είναι το y και το θ ώστε η μπάλα να ταξιδέψει μέγιστη οριζόντια απόσταση;

Πρόβλημα 10.93

Κομμάτι μάζας m κρατείται ακίνητο σε ένα κεκλιμένο επίπεδο μηδενικής τριβής μάζας M και γωνίας κλίσης θ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κεκλιμένο επίπεδο ηρεμεί σε επίπεδη επιφάνεια μηδενικής τριβής. Η μάζα αφήνεται να κυλίσει. Ποια είναι η οριζόντια επιτάχυνση του κεκλιμένου επιπέδου;



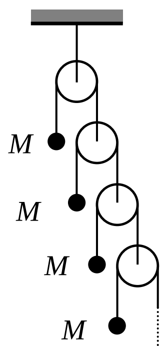
*Ποια είναι αυτή η άσκηση, δεν την βρίσκω πουθενά!



Πρόβλημα 10.94

Τρεις πανομοιότυποι κύλινδροι τοποθετούνται σε τριγωνική διάταξη, όπως φαίνεται στο σχήμα, με τα δύο κατώτερα να ακουμπούν στο έδαφος. Το έδαφος και οι κύλινδροι είναι μηδενικής τριβής.
Εφαρμόζετε μια σταθερή οριζόντια δύναμη (κατευθυνόμενη προς τα δεξιά) στον αριστερό κύλινδρο. Έστω a η επιτάχυνση που δίνεται στο σύστημα. Για ποιο εύρος του a θα παραμείνουν και οι τρεις κύλινδροι σε επαφή μεταξύ τους;

Πρόβλημα 10.95



Θεωρήστε την άπειρη μηχανή του Atwood που φαίνεται στο σχήμα. Νήμα περνάει πάνω από κάθε τροχαλία, με το ένα άκρο προσδεμένο σε μάζα και το άλλο άκρο προσδεμένο σε άλλη τροχαλία. Όλες οι μάζες είναι ίσες με M, και όλες οι τροχαλίες και τα νήματα είναι αβαρή.
Οι μάζες κρατιούνται σταθερά και έπειτα αφήνονται ελεύθερες ταυτόχρονα. Ποια είναι η επιτάχυνση της ανώτατης μάζας;
(Μπορείτε να ορίσετε αυτό το άπειρο σύστημα ως ακολούθως. Θεωρήστε ότι αποτελείται από N τροχαλίες, με μια μη-μηδενική μάζα να αντικαθιστά αυτό που θα ήταν η $(N+1)$-οστή τροχαλία. Έπειτα πάρτε το όριο για $N \to \infty$. Δεν είναι απαραίτητο, πάραυτα, να χρησιμοποιήσετε αυτόν ακριβώς τον ορισμό.)

Πρόβλημα 10.96

Είναι η μέση (μετά από χρόνο) τάση στο σκοινί ενός εκκρεμούς μεγαλύτερη ή μικρότερη από mg; Κατά πόσο; (Ως συνήθως, υποθέστε ότι το γωνιακό πλάτος είναι μικρό σε σχέση με το R).

Πρόβλημα 10.97

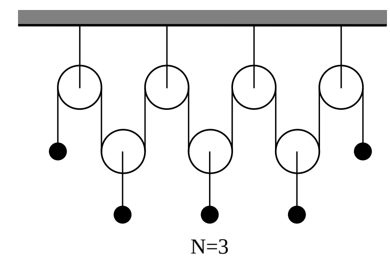
Υποθέστε ότι είναι αδύνατο να χτίσουμε ένα δομικά ορθό κιβώτιο που να μπορεί να κρατήσει καύσιμα, έστω, εννιαπλάσια της μάζας του. Θα φαινόταν τότε ότι το όριο για την ταχύτητα ενός πυραύλου είναι $u \ln 10$. Πώς μπορείτε να κάνετε ένα πύραυλο που να έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή;

Πρόβλημα 10.98

Δύο χάντρες μάζας m τοποθετούνται στην κορυφή ενός δακτυλίου μηδενικής τριβής, μάζας M και ακτίνας R, που κάθεται κατακόρυφα στο έδαφος. Δίνοντας στις χάντρες πολύ μικρά χτυπήματα, αυτές κατηφορίζουν το δακτύλιο, η μία στα δεξιά και η άλλη στα αριστερά του. Ποια είναι η μικρότερη τιμή του m/M για την οποία ο δακτύλιος σηκώνεται από το έδαφος, κάποια στιγμή κατά την κίνηση;

Πρόβλημα 10.99

$N+2$ ίσες μάζες κρέμονται από ένα σύστημα τροχαλιών, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η επιτάχυνση των μαζών στο άκρο του νήματος;

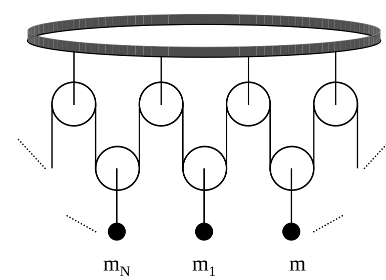


Πρόβλημα 10.100

Ένα άπειρα μεγάλο επίπεδο, πυκνότητας μάζας σ (ανά εμβαδό), εμφανίζει μια τρύπα ακτίνας R. Ένα σωματίδιο αρχικά κάθεται στο κέντρο του κύκλου, και έπειτα δέχεται ένα πολύ μικρό σπρώξιμο κάθετα στο επίπεδο. Υποθέστε ότι η μόνη δύναμη που δρα στο σωματίδιο είναι η βαρυτική δύναμη από το επίπεδο. Βρείτε τη συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων (δηλαδή, όπου το πλάτος είναι μικρό σε σχέση με το R).

Πρόβλημα 10.101

Θεωρήστε το σύστημα τροχαλιών του σχήματος. Το νήμα (που είναι ένας βρόχος χωρίς άκρα) κρέμεται από N σταθερές τροχαλίες. N μάζες, $m_1, m_2, \ldots, m_N$, είναι συνδεδεμένες με N τροχαλίες που κρέμονται από το νήμα. Βρείτε την επιτάχυνση της κάθε μάζας.



Πρόβλημα 10.102

Τη χρονική στιγμή $t=0$, ένας αβαρής κουβάς περιέχει μάζα M άμμου. Συνδέεται σε τοίχο με αβαρές ελατήριο σταθερής τάσης T (δηλαδή, ανεξάρτητης από το μήκος). Το έδαφος δεν παρουσιάζει τριβή. Το αρχικό μήκος του ελατηρίου είναι L. Μετά από κάποιο χρόνο, έστω x η απόσταση από τον τοίχο, και έστω m η μάζα στον κουβά.
Ο κουβάς ελευθερώνεται. Κινούμενος προς τον τοίχο, ο κουβάς «χάνει» άμμο με ρυθμό $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -bM$ (έτσι ώστε ο ρυθμός να είναι σταθερός σε σχέση με το χρόνο, όχι την απόσταση. Έχουμε βγάλει ένα $'M'$, έτσι ώστε να γίνουν απλούστεροι οι υπολογισμοί).

(α) Βρείτε τα $v(t)$ και $x(t)$ (για το χρόνο στον οποίο ο κουβάς περιέχει μη μηδενική ποσότητα άμμου).

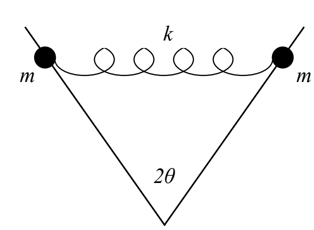
(β) Ποια είναι η μέγιστη ποσότητα της κινητικής ενέργειας του κουβά;

(γ) Ποια είναι η μέγιστη ποσότητα του μέτρου της ορμής του κουβά;

(δ) Για ποια τιμή του b αδειάζει ο κουβάς τελείως ακριβώς μόλις χτυπήσει τον τοίχο;

Πρόβλημα 10.103

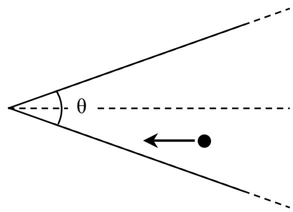
Δύο σωματίδια μάζας m είναι περιορισμένα να κινούνται κατά μήκος δύο βεργών που σχηματίζουν γωνία 2θ μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Συνδέονται με ελατήριο σταθεράς k. Ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης για την κίνηση στην οποία το ελατήριο παραμένει παράλληλο στη θέση ισορροπίας του;



Πρόβλημα 10.104

Σωματίδιο κινείται κατά μήκος του $x = 0$ υπό την επίδραση δυναμικού $V(x) = -A|x|^n$ (υποθέστε ότι $n > 0$). Το σωματίδιο έχει μόλις και μετα βίας αρκετή ενέργεια για να φτάσει το $x = 0$. Για ποιες τιμές του n θα φτάσει το $x = 0$ σε πεπερασμένο χρόνο;

Πρόβλημα 10.105

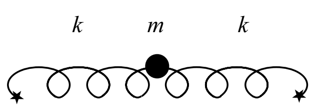


Μια μπάλα εκτοξεύεται πάνω σε ένα τοίχο ενός πολύ μεγάλου μήκους τριγωνικού δωματίου γωνίας κορυφής θ. Η αρχική κατεύθυνση της μπάλας είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας (βλ. σχήμα). Πόσες αναπηδήσεις θα κάνει η μπάλα;

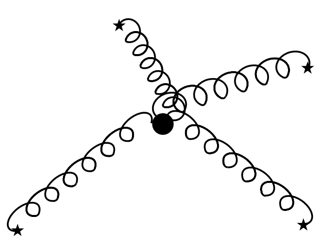
Πρόβλημα 10.106

Σωματίδιο απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων υπό την επίδραση δυναμικού $V(x) = -A|x|^n$. Για ποιες τιμές του n θα φτάσει το άπειρο σε πεπερασμένο χρόνο;

Πρόβλημα 10.107



(a)



(β)

(α) Μάζα m συνδέεται με δύο ελατήρια που έχουν ίσα μήκη ισορροπίας ίσα με το μηδέν. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι σταθεροποιημένα σε δύο σημεία (βλ. σχήμα). Οι σταθερές ελατηρίου είναι οι ίδιες. Η μάζα ηρεμεί στη θέση ισορροπίας της και έπειτα δέχεται ένα λάκτισμα σε τυχαία διεύθυνση. Περιγράψτε την προκύπτουσα κίνηση. (Αγνοήστε τη βαρύτητα.)

(β) Μάζα m συνδέεται με ένα αριθμό ελατηρίων που έχουν ίσα μήκη ισορροπίας. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι σταθεροποιημένα σε διάφορα σημεία στο χώρο, όπως φαίνεται στο σχήμα **;;**. Οι σταθερές ελατηρίου είναι οι ίδιες. Η μάζα ηρεμεί στη θέση ισορροπίας της και έπειτα δέχεται ένα λάκτισμα σε τυχαία διεύθυνση. Περιγράψτε την προκύπτουσα κίνηση. (Αγνοήστε τη βαρύτητα.)

Πρόβλημα 10.108

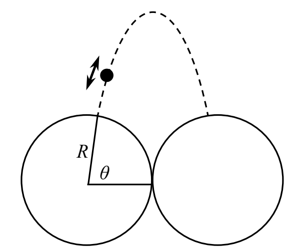
Μάζα m βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία. Σταθερή δύναμη F (κατευθυνόμενη προς τα δεξιά) δρα πάνω στη μάζα για μια απόσταση d. Η αύξηση σε κινητική ενέργεια είναι επομένως Fd.
Θεωρήστε την κατάσταση αυτή από την οπτική γωνία κάποιου που κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα V. Δείξτε σαφώς ότι αυτό το άτομο μετρά μια αύξηση σε κινητική ενέργεια ίση με δύναμη επί απόσταση.

Πρόβλημα 10.109

Ένα φαράσι κυλίεται καθοδικά σε ένα επίπεδο κεκλιμένο κατά γωνία θ. Στο επίπεδο βρίσκεται σκόνη ομογενώς κατανεμημένη, και το φαράσι μαζεύει τη σκόνη που βρίσκεται στο δρόμο της. Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, ποια είναι η επιτάχυνση του φαρασιού; (Υποθέστε ότι δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του φαρασιού και του επιπέδου.)

Πρόβλημα 10.110

Δύο κυκλικοί δακτύλιοι, που βρίσκονται σε επαφή, κάθονται σε κατακόρυφο επίπεδο (βλ. σχήμα). Ο καθένας έχει ακτίνα R. Μικρή μπάλα, μάζας m και αμελητέου μεγέθους, αναπηδά ελαστικά μεταξύ των δακτυλίων. (Υποθέστε ότι οι δακτύλιοι είναι σταθεροποιημένοι, έτσι ώστε να μένουν πάντα σε επαφή). Υποθέστε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε η κίνηση της μπάλας να βρίσκεται πάντα πάνω σε μια παραβολή. Υποθέστε ότι η παραβολή αυτή χτυπάει τους δακτυλίους σε γωνία θ από τον οριζόντιο άξονα.



(α) Έστω $\Delta P_x(\theta)$ το μέτρο της αλλαγής της οριζόντιας συνιστώσας της ορμής της μπάλας, σε κάθε αναπήδηση. Για ποια γωνία θ είναι μέγιστο το $\Delta P_x(\theta)$;

(β) Έστω S η ταχύτητα της μπάλας ακριβώς πριν ή μετά την αναπήδηση. Και έστω $\bar{F}_x(\theta)$ η μέση τιμή (μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα) του μέτρου της οριζόντιας δύναμης που απαιτείται για να κρατάει τους δακτυλίους σε επαφή μεταξύ τους (για παράδειγμα, η μέση τάση σε ένα σκοινί που κρατάει τους δακτυλίους μαζί). Θεωρήστε τα δύο όρια: (1) $\theta \approx \varepsilon$, και (2) $\theta \approx \pi/2 - \varepsilon$, όπου το ε είναι πολύ μικρό.

1. Βρείτε προσεγγιστικές σχέσεις για το S, για τα δύο αυτά όρια.

2. Βρείτε προσεγγιστικές σχέσεις για το $\bar{F}_x(\theta)$, για τα δύο αυτά όρια.

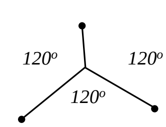
Ποια από τα δύο αυτά όρια απαιτεί μεγαλύτερο $\bar{F}_x(\theta)$;

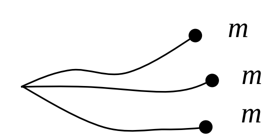
Πρόβλημα 10.111

Μάζα M κινείται με ταχύτητα v. Μια έκρηξη χωρίζει τη μάζα στα δύο, δίνοντας στο κάθε μισό ταχύτητα v στο πλαίσιο κέντρου μάζας. Υπολογίστε την αύξηση σε κινητική ενέργεια στο πλαίσιο του εργαστηρίου. (Υποθέστε ότι όλη η κίνηση είναι περιορισμένη σε μία διάσταση)

Πρόβλημα 10.112

Ο συντομότερος σχηματισμός σκοινιού που να ενώνει τρία δεδομένα σημεία φαίνεται στο σχήμα, όπου και οι τρεις γωνίες είναι 120^o. Επινοήστε μια πειραματική απόδειξη αυτού του γεγονότος, συνδέοντας τρεις ίσες μάζες στα τρία άκρα σκοινιών, και έπειτα συνδέοντας τα άλλα τρια άκρα μεταξύ τους (όπως φαίνεται στο σχήμα), και χρησιμοποιώντας ο,τιδήποτε άλλα στοιχεία μπορεί να χρειαστείτε.





Πρόβλημα 10.113

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένας αβαρής κουβάς περιέχει μάζα M άμμου. Συνδέεται σε τοίχο με αβαρές ελατήριο σταθερής τάσης T (δηλαδή, ανεξάρτητης από το μήκος). Το έδαφος δεν παρουσιάζει τριβή. Το αρχικό μήκος του ελατηρίου είναι L. Μετά από κάποιο χρόνο, έστω x η απόσταση από τον τοίχο, και έστω m η μάζα στον κουβά.

Ο κουβάς ελευθερώνεται. Κινούμενος προς τον τοίχο, ο κουβάς χάνει άμμο με ρυθμό ανάλογο της επιτάχυνσής του, δηλαδή $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = b\ddot{x}$ (σημείωστε ότι το $\ddot{x}$ είναι αρνητικό, οπότε και το $\mathrm{d}m$ είναι αρνητικό).

(α) Βρείτε τη μάζα συναρτήσει του χρόνου, $m(t)$.

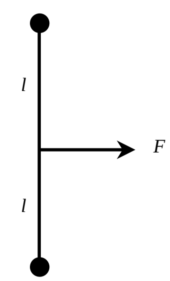
(β) Βρείτε τα $v(t)$ και $x(t)$ (για το χρόνο στον οποίο ο κουβάς περιέχει μη μηδενική ποσότητα άμμου).

(γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας του κουβά;

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου της ορμής του κουβά;

(ε) Για ποια τιμή του v αδειάζει ο κουβάς αμέσως μόλις χτυπήσει τον τοίχο;

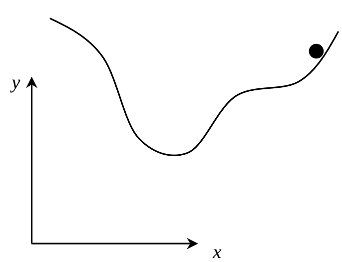
Πρόβλημα 10.114



(α) Σκοινί μήκους 2ℓ συνδέει δύο μπάλες του χόκευ που βρίσκονται πάνω σε πάγο μηδενικής τριβής. Εφαρμόζουμε μια σταθερή οριζόντια δύναμη F στο μέσο του σκοινιού, κάθετα σ' αυτό (βλ.σχήμα). Πόση κινητική ενέργεια χάνεται όταν οι μπάλες συγκρούονται, υποθέτοντας ότι κολλάνε μεταξύ τους;

(β) Η απάντηση που βρήκατε στο (α) πρέπει να είναι κομψή. Βρείτε την έξυπνη λύση (υποθέτοντας ότι λύσατε το πρόβλημα με τον «κανονικό» τρόπο) που κάνει διάφανο το γιατί η απάντηση είναι τόσο κομψή.

Πρόβλημα 10.115



Μια μπάλα υπό την επίδραση της βαρύτητας κυλίεται κατά μήκος επιφάνειας της οποίας το ύψος δίνεται από τη συνάρτηση $V(x)$ (βλ. σχήμα). Ποια είναι η οριζόντια επιτάχυνση της μπάλας, $\ddot{x}$;
Είναι η απάντησή σας η ίδια με τη $\ddot{x}$ για σωματίδιο που κινείται σε μια διάσταση στο δυναμικό $mgV(x)$; Αν όχι, μπορείτε να σκεφτείτε κάτι που να μπορείτε να κάνετε με την επιφάνεια για να κάνετε την απάντηση «ναι»;

Πρόβλημα 10.116

Ένα σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x) = -Cx^n \mathrm{e}^{-ax}$. Βρείτε τη συχνότητα μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Πρόβλημα 10.117

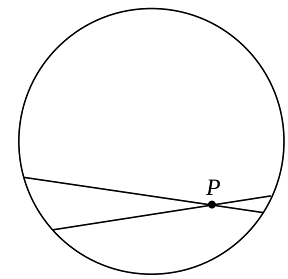
Ένα σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x) = A/x^2 - B/x$. Βρείτε τη συχνότητα μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Πρόβλημα 10.118

Ένα σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x) = (k/2)x^2 + mgx$ (δηλαδή, είναι μια μάζα που κρέμεται από νήμα). Βρείτε τη συχνότητα μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Πρόβλημα 10.119

Να δείξετε ότι η βαρυτική δύναμη μέσα σε σφαιρικό κέλυφος είναι μηδέν, δείχνοντας ότι τα κομμάτια της μάζας στα άκρα των κώνων του σχήματος δίνουν αλληλοεξουδετερωτικές δυνάμεις στο σημείο P.



Πρόβλημα 10.120

Βρείτε το λόγο της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στη γωνία ενός κύβου (ομογενούς πυκνότητας μάζας) προς αυτήν στο κέντρο του κύβου. (Υπόδειξη: Υπάρχει ένας κομψός τρόπος που δεν περιλαμβάνει πολύπλοκα ολοκληρώματα.)

Πρόβλημα 10.121

Μια χιονόμπαλα εκτοξεύεται πάνω σε ένα τοίχο. Που πηγαίνει η ορμή της; Που πηγαίνει η ενέργειά της;

Πρόβλημα 10.122

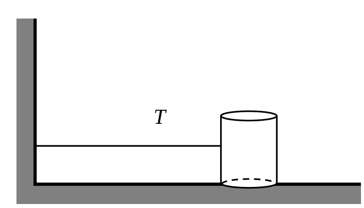
Για κάποιο περίεργο λόγο, αποφασίζετε να ρίξετε μπάλες του τένις σε ένα αυτοκίνητο (μάζας M), το οποίο μπορεί να κινηθεί ελεύθερα και χωρίς τριβή στο έδαφος. Πετάτε τις μπάλες με ταχύτητα v, και με ένα ρυθμό μάζας σ Kg/s (υποθέστε ότι ο ρυθμός είναι συνεχής, για απλότητα). Αν το αμάξι ξεκινάει από ηρεμία, βρείτε την ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου, υποθέτοντας ότι οι μπάλες αναπηδούν (ελαστικά) κατευθείαν προς τα πίσω, από το πίσω παράθυρο.

Πρόβλημα 10.123

Αλυσίδα μήκους L και πυκνότητας μάζας σ κρατιέται έτσι ώστε να κρεμιέται κατακόρυφα ακριβώς πάνω από μια ζυγαριά. Έπειτα αφήνεται. Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς, συναρτήσει του ύψους του άνω άκρου της αλυσίδας;

Πρόβλημα 10.124

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένας αβαρής κουβάς περιέχει μάζα M άμμου. Συνδέεται σε τοίχο με αβαρές ελατήριο σταθερής τάσης T (δηλαδή, ανεξάρτητα του μήκους). Το έδαφος δεν παρουσιάζει τριβή. Το αρχικό μήκος του ελατηρίου είναι L. Αργότερα, έστω x η απόσταση από τον τοίχο, και έστω m η μάζα στον κουβά. Ο κουβάς ελευθερώνεται. Κινούμενος προς τον τοίχο, ο κουβάς παρουσιάζει διαρροή άμμου με ρυθμό $\mathrm{d}m/\mathrm{d}x = M/L$ (έτσι ώστε ο ρυθμός να είναι σταθερός σε σχέση με την απόσταση, όχι το χρόνο. Σημειώστε ότι το $\mathrm{d}x$ είναι αρνητικό, οπότε το $\mathrm{d}m$ είναι επίσης αρνητικό).



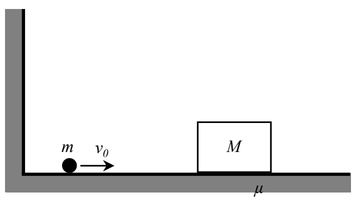
(α) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του κουβά (με την άμμο), συναρτήσει της απόστασης από τον τοίχο; Ποια είναι η μέγιστη τιμή της;

(β) Ποια είναι η ορμή του κουβά, συναρτήσει της απόστασης από τον τοίχο; Ποια είναι η μέγιστη τιμή της;

Πρόβλημα 10.125

Μια μπάλα του μπιλιάρδου συγκρούεται ελαστικά με μια πανομοιότυπη ακίνητη μπάλα. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί ως $m(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})/2$ για να δείξετε ότι η γωνία μεταξύ των τροχιών που προκύπτουν είναι 90^o.

Πρόβλημα 10.126



Μπάλα μάζας m και αρχικής ταχύτητας v_0 αναπηδά μεταξύ ενός σταθερού τοίχου και ενός κομματιού μάζας M (με $M >> m$). Το M βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία. Υποθέστε ότι η μπάλα αναπηδά ελαστικά και στιγμιαία. Ο συντελεστής της κινητικής τριβής μεταξύ του κομματιού και του εδάφους είναι μ. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ της μπάλας και του εδάφους.
Πόση είναι η ταχύτητα της μπάλας μετά την $n-$οστή αναπήδηση από το κομμάτι μάζας; Πόσο μακριά θα μετακινηθεί τελικά το κομμάτι; Πόσο χρόνο συνολικά ξοδεύει το κομμάτι κινούμενο;
(Θεωρήστε ότι $M >> m$, και υποθέστε ότι το μ είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το κομμάτι να έρχεται σε ηρεμία μέχρι να επέλθει η επόμενη αναπήδηση.)

Πρόβλημα 10.127

Φύλλο μάζας M κινείται με ταχύτητα V μέσα από μια περιοχή του Διαστήματος που περιέχει σωματίδια μάζας m και ταχύτητας v. Υπάρχουν n τέτοια σωματίδια ανά μονάδα όγκου. Το φύλλο κινείται στην κατεύθυνση της καθέτου στο επίπεδό του. Υποθέστε ότι $m << M$, και υποθέστε επίσης ότι τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

(α) Υποθέτοντας ότι $v << V$, πόση είναι η δύναμη έλξης ανά μονάδα εμβαδού στο φύλλο;

(β) Υποθέτοντας ότι $v >> V$, πόση είναι η δύναμη έλξης ανά μονάδα εμβαδού στο φύλλο;

(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι η μέση ταχύτητα ενός σωματιδίου στη διεύθυνση x είναι $v_x = v/\sqrt{3}$.)

Πρόβλημα 10.128

Κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R κινείται με ταχύτητα V μέσα από μια περιοχή στο διάστημα που περιλαμβάνει σωματίδια μάζας M που βρίσκονται σε ηρεμία. Υπάρχουν n από αυτά τα σωματίδια ανά μονάδα όγκου. Ο κύλινδρος κινείται σε μια κατεύθυνση κάθετη στον άξονά του. Υποθέστε ότι $m << M$, και υποθέστε ότι τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.
Πόση είναι η δύναμη έλξης ανά μονάδα μήκους στον κύλινδρο;

Πρόβλημα 10.129

Σφαίρα μάζας M και ακτίνας R κινείται με ταχύτητα V μέσα από μια περιοχή στο διάστημα που περιλαμβάνει σωματίδια μάζας M που βρίσκονται σε ηρεμία. Υπάρχουν n από αυτά τα σωματίδια ανά μονάδα όγκου. Η σφαίρα κινείται σε μια κατεύθυνση κάθετη στον άξονά της.

Υποθέστε ότι $m << M$, και υποθέστε ότι τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.
Πόση είναι η δύναμη έλξης ανά μονάδα μήκους στη σφαίρα;

Πρόβλημα 10.130

Σκοινί μήκους L και πυκνότητας μάζας σ κείται σε σωρό στο πάτωμα. Πιάνετε το ένα άκρο και τραβάτε οριζόντια με σταθερή δύναμη F. Ποια είναι η θέση του άκρου του σκοινιού, ως συνάρτηση του χρόνου (όσο ξετυλίγεται);

Πρόβλημα 10.131

(α) Σκοινί μήκους L κείται σε ευθεία γραμμή σε τραπέζι μηδενικής τριβής, εκτός από ένα πολύ μικρό κομμάτι του που κρέμεται κάτω, μέσα από μια τρύπα στο τραπέζι. Το σκοινί αφήνεται, και γλιστρά κάτω μέσα από την τρύπα. Πόση είναι η ταχύτητα του σκοινιού τη στιγμή που χάνει επαφή με το τραπέζι;

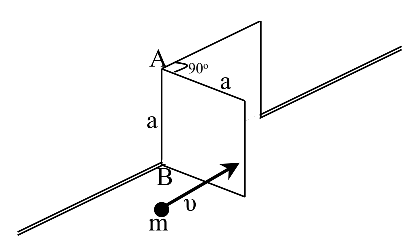
(β) Σκοινί μήκους L κείται σε σωρό πάνω σε ένα τραπέζι, εκτός από ένα πολύ μικρό κομμάτι του που κρέμεται κάτω και μέσα από μια τρύπα στο τραπέζι. Το σκοινί ελευθερώνεται, και γλιστρά μέσα από την τρύπα. Πόση είναι η ταχύτητα του σκοινιού τη στιγμή που χάνει επαφή με το τραπέζι; (Υποθέστε ότι το σκοινί έχει γράσσο, έτσι ώστε να μην έχει τριβή με τον εαυτό του.)

Πρόβλημα 10.132

Σκοινί μήκους L και πυκνότητας μάζας σ κείται σε σωρό στο πάτωμα. Πιάνετε το ένα άκρο του σκοινιού και το τραβάτε προς τα πάνω με δύναμη τέτοια ώστε το σκοινί να κινείται με σταθερή ταχύτητα v.
Ποιο είναι το συνολικό έργο που δαπανάται, μέχρι το σκοινί να μην ακουμπά το έδαφος; Μετατρέπεται ενέργεια σε θερμότητα, και αν ναι, πόση;

Πρόβλημα 10.133

Μια λεπτή τετράγωνη πόρτα με μάζα M και πλευράς a μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα AB που συμπίπτει με μια πλευρά της. Αρχικά η πόρτα είναι ανοιχτή και σχηματίζει γωνία 90^o με τον τοίχο. Μια σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα v σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της πόρτας. Η σφαίρα σφηνώνεται στην πόρτα σε απόσταση a από τον άξονα περιστροφής της.



(α) Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας του συστήματος πόρτας - σφαίρας ως προς τον άξονα AB.

(β) Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα από τη στιγμή που θα χτυπηθεί από τη σφαίρα;

Η ροπή αδρανείας της πόρτας ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδο της είναι: $I_0 = \frac{1}{6}Ma^2$.

Πρόβλημα 10.134

Οι συντεταγμένες μιας σημειακής μάζας m είναι

$$x(t) = 3\sin(3t), \quad y(t) = 4\sin(2t), \quad z(t) = 5\cos(2t)$$

(α) Να βρεθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος και της δύναμης που ασκείται πάνω στο σώμα.

(β) Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας και συγγραμμικό με το διάνυσμα της δύναμης.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

(δ) Να βρεθεί το διάνυσμα της στροφορμής του σώματος ως προς το σημείο $(0, 0, 0)$ και να αποδειχθεί ότι η τροχιά που διαγράφει το σώμα είναι επίπεδη.

(ε) Να βρεθεί η ισχύς που παράγεται από τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα.

Πρόβλημα 10.135

Να προσδιοριστεί η ροπή αδρανείας ορθού κυκλικού κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας αυτού και η μάζα του. Ο κύλινδρος έχει ύψος H, ακτίνα R και η πυκνότητά του μεταβάλλεται αναλόγως προς την απόσταση r από τον άξονα συμμετρίας αυτού και δίδεται από τη σχέση $\rho = \rho_0(1 + r/R)$.

Πρόβλημα 10.136

Ελατήριο σταθεράς k έχει σταθερό το ένα άκρο του και στο άλλο φέρει υλικό σημείο μάζας m. Το υλικό σημείο κινείται στον άξονα Ox υπό την επίδραση της δυνάμεως του ελατηρίου $F_1 = -kx$ και της δυνάμεως εξαναγκασμού $F_2 = F_0 \sin(2\omega_0 t)$, όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ είναι η φυσική κυκλική συχνότητα του συστήματος σώμα-ελατήριο, x είναι η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και F_0 σταθερά. Αν για $t = 0$ το υλικό σημείο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα v_0 και με φορά προς τα αρνητικά x, να ευρεθεί η απομάκρυνση $x(t),\ t \geq 0$.

Πρόβλημα 10.137

Σώμα $P(m)$ κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δυνάμεως $\boldsymbol{F} = -\frac{k}{r^2}\boldsymbol{e}_r$, όπου k θετική σταθερά και r η απόσταση αυτού από το ελκτικό κέντρο. Στη θέση $r = \alpha$ το σώμα έχει ταχύτητα η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσεως και έχει μέτρο $u = \sqrt{\dfrac{2k}{m\alpha}}$. Να προσδιοριστεί η μηχανική του ενέργεια και το είδος της τροχιάς του. Επίσης να ευρεθεί η θέση στην οποία το σώμα έχει ελάχιστη ταχύτητα και να προσδιοριστεί η τιμή της ελάχιστης ταχύτητας.

Πρόβλημα 10.138

Η δυναμική ενέργεια υλικού σημείου κινουμένου στον άξονα Ox δίδεται από τη σχέση $U = \frac{1}{2}(2x^2 - x^3)$, όπου x είναι η απόστασή του από την αρχή O. Να ευρεθεί η θέση και το είδος της ισορροπίας. Επίσης να ευρεθούν οι επιτρεπτές περιοχές της κινήσεως αν η μηχανική ενέργεια του υλικού σημείου ισούται με $E = 16/27$. Δίδεται ότι οι ρίζες της εξίσωσης $-\dfrac{1}{2}x^3 + x^2 - \dfrac{16}{27} = 0$ είναι $x_{1,2} = 4/3,\ x_3 = -2/3$.

Πρόβλημα 10.139

Οριζόντιος σωλήνας OA στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oz με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$. Μέσα στο σωλήνα ευρίσκεται ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ. Το ένα άκρο του ελατηρίου είναι σταθερό στο O. Στο άλλο άκρο είναι συνδεδεμένο υλικό σημείο P μάζας m, το οποίο είναι ελεύθερο να κινείται κατά μήκος του σωλήνα χωρίς τριβές. Να γραφούν οι εξισώσεις της κινήσεως ως προς το μη αδρανειακό σύστημα, το οποίο παρακολουθεί την περιστροφή του σωλήνα και να επιλυθούν αν $k > m\omega^2$. Δίδεται ότι για $t = 0$ το υλικό σημείο ακινητεί σε απόσταση ℓ από το σημείο τομής του σωλήνα με τον άξονα περιστροφής.

Πρόβλημα 10.140

Σώμα $P(m)$ γράφει κύκλο (O, α) υπό την επίδραση της κεντρικής δυνάμεως $\boldsymbol{F} = -\dfrac{m\mu}{r^3}\boldsymbol{r}$, όπου μ θετική σταθερά και $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα θέσεως αυτού.

(i) Να βρεθεί η μηχανική του ενέργεια και η στροφορμή του.

(ii) Αν, λόγω της εκρήξεως, το σώμα διασπασθεί σε δύο κομμάτια με μάζες m_1, m_2 και αν το ένα κομμάτι ακινητήσει μετά την έκρηξη, τι τροχιά θα γράψει το άλλο;

Πρόβλημα 10.141

Μέσα σε λείο σωλήνα είναι ελεύθερο να κινείται υλικό σημείο P μάζας m. Ο σωλήνας σχηματίζει σταθερή γωνία ϕ με τον κατακόρυφο άξονα και στρέφεται γύρω από αυτόν με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$. Να γραφούν οι εξισώσεις της κινήσεως ως προς το μη αδρανειακό σύστημα, το οποίο παρακολουθεί την κίνηση του υλικού σημείου και να επιλυθούν.

Πρόβλημα 10.142

Υλικό σημείο $P(m = 1)$ κινείται στον άξονα Ox υπό την επίδραση της δυνάμεως $F = 4x - x^2$. Αν για $t = 0$ ισχύει $x = 2,\ \dot{x} = 0$, να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου. Για ποιες τιμές της ενέργειας η κίνηση του υλικού σημείου είναι περατωμένη;

Πρόβλημα 10.143

Υλικό σημείο $P(m)$ κινείται στον άξονα Ox και έλκεται από το O με δύναμη $F(x) = -mk(x + \alpha^4/x^3)$, όπου k, α θετικές σταθερές. Αν τη στιγμή $t = 0$ ηρεμεί στη θέση $x = \alpha$ να βρεθεί μετά πόσο χρόνο θα φτάσει στο O.

Πρόβλημα 10.144

Υλικό σημείο P κινείται στον άξονα Ox με επιτάχυνση η οποία είναι ίση με $\mu/x^2 - \lambda/x^3$ όπου x είναι η απόσταση υλικού σημείου από την αρχή O και μ, λ σταθερές. Το P κατά την έναρξη της κινήσεως ηρεμεί σε απόσταση α από το O. Να αποδείξετε ότι το P ταλαντούται μεταξύ δύο θέσεων οι οποίες απέχουν μεταξύ τους κατά $2\alpha(\lambda - \mu\alpha)/(2\mu\alpha - \lambda)$. Να ευρεθεί η περίοδος της κινήσεως.

Πρόβλημα 10.145

Υλικό σημείο $P(m)$ ολισθαίνει κατά μήκος λείου ευθύγραμμου σωλήνα ΑΒ και έλκεται από σημείο Ο, το οποίο κείται εκτός της ευθείας AB και απέχει από αυτήν κατά b, με δύναμη ίση προς $mk/(OP)^2$, όπου k σταθερά. Να αποδειχθεί ότι αν το P μετακινηθεί ελάχιστα από τη θέση ισορροπίας του, θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση. Να υπολογιστεί η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων του P.

Πρόβλημα 10.146

Με δεδομένη την εξίσωση της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας υλικού σημείου

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{σταθ.}$$

να αποδειχθεί ότι το υλικό σημείο εκτελεί αρμονική ταλάντωση στον άξονα Ox.

Πρόβλημα 10.147

Ράβδος AB μήκους l εξαρτάται από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το A. Η ράβδος μπορεί να εκτελεί αιωρήσεις μικρού πλάτους γύρω από τον άξονα αυτόν. Η πυκνότητα της ράβδου δίδεται από τη σχέση $\rho = \rho_0 + \alpha x$, όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα στο A και x είναι η απόσταση του τυχόντος σημείου $P(x)$ της ράβδου από το A. Να υπολογισθεί η περίοδος των ταλαντώσεων.

Πρόβλημα 10.148

Σωματίδιο μάζας m εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις στον άξονα Ox με κυκλική συχνότητα ω και υφίσταται επιπλέον την επίδραση εξωτερικής δυνάμεως $F = at+bt^2$ στον άξονα αυτόν, όπου a, b σταθερές. Αν για $t = 0$ το σωματίδιο ακινητεί σε απόσταση d από το κέντρο της ταλαντώσεως, να ευρεθεί η εξίσωση της απομακρύνσεως αυτού συναρτήσει του χρόνου.

Πρόβλημα 10.149

Σε υλικό σημείο P μοναδιαίας μάζας δρα η δύναμη $\boldsymbol{F} = -\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$, όπου $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα θέσεως αυτού. Για $t = 0$ το υλικό σημείο έχει $r = 1$ και εγκάρσια συνιστώσα ταχύτητας μόνο, μέτρου nv_0, όπου v_0 η ταχύτητα με την οποία αν γινόταν η εκτόξευση, η τροχιά θα ήταν κυκλική. Αν $n^2 > 2$, να ευρεθεί το είδος της τροχιάς και η τελική γωνιακή εκτροπή του υλικού σημείου.

Πρόβλημα 10.150

Υλικό σημείο γράφει έλλειψη υπό την επίδραση ελκτικού κέντρου, ευρισκομένου εις μία εκ των εστιών της ελλείψεως με $F(r) = -k/r^2$. Να αποδειχθεί ότι η εκκεντρότητα της τροχιάς του δίδεται από τη σχέση

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

όπου E, L είναι η μηχανική ενέργεια και η στροφορμή του υλικού σημείου αντιστοίχως και k θετική σταθερά. Να αποδειχθεί επίσης ότι $\alpha = -k/2E$ προκειμένου περί ελλείψεως και $\alpha = k/2E$, προκειμένου περί υπερβολής, όπου α είναι το μήκος του μεγάλου ημιάξονα. Δίδεται $p = L^2/mk$.

Πρόβλημα 10.151

Δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά περί τη Γη σε ύψος H από την επιφάνεια αυτής. Η Γη θεωρείται σφαιρική ακτίνας R, ομογενής και ακίνητη. Σε κάποιο σημείο της τροχιάς η διεύθυνση της κινήσεως αλλάζει και στρέφεται προς τη Γη κατά γωνία ϕ χωρίς να μεταβληθεί το μέτρο της ταχύτητας. Να αποδειχθεί ότι ο δορυφόρος θα επιστρέψει στη Γη υπό την προϋπόθεση ότι $\sin\phi \geq \dfrac{H}{R+H}$.

Πρόβλημα 10.152

Δίδεται δοχείο με υγρό πυκνότητας ρ_0 στην επιφάνεια του οποίου επιπλέει σώμα Σ και το σύστημα ισορροπεί. Αν το δοχείο επιταχυνθεί προς τα άνω με επιτάχυνση α, θα αλλάξει η θέση του σώματος εν σχέση προς την επιφάνεια του υγρού;

Πρόβλημα 10.153

Να προσδιορισθεί το κέντρο βάρους δύο σφαιρών (O_1, R) και $(O_2, 2R)$, τα κέντρα των οποίων απέχουν κατά $5R$. Η μικρότερη έχει πυκνότητα $\rho_0 =$σταθ. και η άλλη $\rho = \rho_0(1+ar)$, όπου r είναι η απόσταση τυχόντος σημείου της σφαίρας από το κέντρο της και a σταθερά.

Πρόβλημα 10.154

(α) Ελατήριο μήκους ℓ και σταθεράς k κόπτεται σε N ίσα τμήματα, τα οποία συνδέονται εν παραλλήλω και αποτελούν ένα νέο ελατήριο. Να υπολογιστεί η σταθερά του νέου ελατηρίου.
(β) Διαθέτουμε δύο ελατήρια διαφορετικού μήκους, αλλά από το ίδιο υλικό, με την ίδια γεωμετρία και με την ίδια πυκνότητα σπειρών ανά μονάδα μήκους. Ποιο από τα δύο είναι σκληρότερο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 10.155

Τη στιγμή $t = 0$ μια δύναμη μέτρου $F = \alpha\sqrt{t}$ (όπου α γνωστή θετική σταθερά) αρχίζει να εφαρμόζεται υπό σταθερή γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο πάνω σε πλοιάριο μάζας m που ακινητεί σε λεία οριζόντια επιφάνεια λίμνης (οι τριβές να θεωρηθούν αμελητέες). Να υπολογιστούν:

(α) η ταχύτητα του πλοιαρίου τη στιγμή που εγκαταλείπει την οριζόντια επιφάνεια της λίμνης και

(β) η απόσταση που καλύπτει το πλοιάριο μέχρι εκείνη τη στιγμή.

Πρόβλημα 10.156

Πλοίο κινείται επιβραδυνόμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R έτσι ώστε κάθε στιγμή η επικαμπύλια και η κεντρομόλος επιτάχυνση να έχουν το ίδιο μέτρο. Για $t = 0$, η αρχική ταχύτητα του πλοίου είναι v_0. Να υπολογισθεί

(α) η ταχύτητα του πλοίου σα συνάρτηση του χρόνου και του διαστήματος που διήνυσε και

(β) η ολική επιτάχυνση του πλοίου σα συνάρτηση του χρόνου και του διαστήματος που διήνυσε.

Πρόβλημα 10.157

Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ δίνεται από τη σχέση

$\boldsymbol{F} = (y+2\alpha z)\hat{\boldsymbol{x}}+(z+2\alpha x)\hat{\boldsymbol{y}}+(x+2\alpha y)\hat{\boldsymbol{z}}$, όπου α είναι άγνωστη σταθερά

(α) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς α έτσι ώστε η δύναμη $\boldsymbol{F}$ να είναι διατηρητική.
(β) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια U του πεδίου, θεωρώντας ότι $U(0,1,2) = 3$ joule.

Πρόβλημα 10.158

Σώμα μάζας $m = 1$ Kg μπορεί να κινείται κατά μήκος του άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση $U(x) = x^2(4-x)$ (σε μονάδες S.I.).

(α) Να σχεδιαστεί η $U(x)$ και να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και το είδος της ισορροπίας στο καθένα.

(β) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα και να βρεθεί πού είναι μηδενική, και πού είναι ελκτική ή απωστική ως προς την αρχή O.

(γ) Το σώμα αφήνεται ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα στη θέση $x = 1\,\mathrm{m}$. Να περιγραφεί ποιοτικά η κίνηση που θα ακολουθήσει και να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα.

(δ) Με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί το σώμα από τη θέση $x = 0$ για να μπορέσει να απομακρυνθεί στο άπειρο;

Πρόβλημα 10.159

Ένα διαστημόπλοιο μάζας m, κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από ένα πλανήτη μάζας M. Χρησιμοποιώντας τους πυραύλους του, το διαστημόπλοιο μειώνει σε αμελητέο χρόνο την ταχύτητά του στο μισό. Η επιβράδυνση επιβάλλει στο διαστημόπλοιο να κινηθεί σε ελλειπτική τροχιά.

(α) Να δείξετε ότι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου μετά την επιβράδυνση είναι $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{MG}{r_0}}$.

(β) Στην ελλειπτική του τροχιά, ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση του διαστημοπλοίου από τον πλανήτη, συναρτήσει του r_0;

Πρόβλημα 10.160

(Σχετικότητα) Ένα σωματίδιο S, που έχει μάζα ηρεμίας M, είναι ακίνητο στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου. Το σωματίδιο διασπάται σε ένα σωματίδιο S' με μάζα ηρεμίας $M/2$ και σε ένα φωτόνιο. Να βρείτε:

(α) Την ταχύτητα V του παραγόμενου σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου.

(β) Την ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα αναφοράς του Εργαστηρίου, E_γ.

(β) Την ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα αναφοράς του παραγόμενου σωματιδίου, E'_γ.

Πρόβλημα 10.161

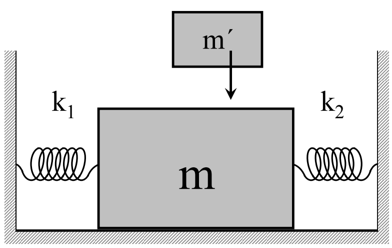
Σωματίδιο κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης

$$F(x) = -kx + \frac{k}{\alpha}x^2, \quad \text{όπου } \alpha, k \text{ είναι θετικές σταθερές}$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και να καθοριστούν οι θέσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας του σωματιδίου.

(β) Αν το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση $x = -\alpha$ χωρίς αρχική ταχύτητα, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία περνά από τη θέση όπου η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη.

Πρόβλημα 10.162

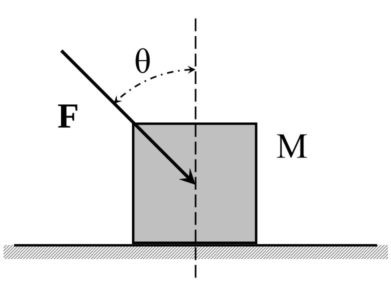


Μια μάζα m έχει συνδεθεί από τις δύο πλευρές της με ελατήρια σταθερών k_1 και k_2 αντίστοιχα, τα οποία στη θέση ισορροπίας έχουν το φυσικό τους μήκος. Η μάζα κινείται οριζόντια χωρίς τριβές.

(α) Να υπολογιστεί η συχνότητα ω της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει η μάζα.

(β) Αν το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης της μάζας m είναι A και τη στιγμή που αυτή περνάει από τη θέση ισορροπίας πέσει κατακόρυφα μάζα m' πάνω της και συσσωματωθεί σε αυτή, να υπολογιστεί η νέα συχνότητα ω' και το νέο πλάτος A' της αρμονικής ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.163



Στο σχήμα φαίνεται μια δύναμη F που δρα σε ένα σώμα με μάζα M. Το σώμα βρίσκεται πάνω σε μια μη λεία οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ.

(α) Υποθέτοντας ότι $F >> Mg$, βρείτε τη μέγιστη γωνία θ για την οποία η δύναμη F δε μπορεί να κάνει το σώμα να ολισθήσει, όσο μεγάλη κι αν είναι.

(β) Βρείτε το λόγο F/Mg, ως συνάρτηση των θ και μ, για τον οποίο το σώμα μόλις αρχίζει να ολισθαίνει. Δείξτε ότι, στο όριο $F >> Mg$, η απάντηση ανάγεται στο αποτέλεσμα της περίπτωσης (α).

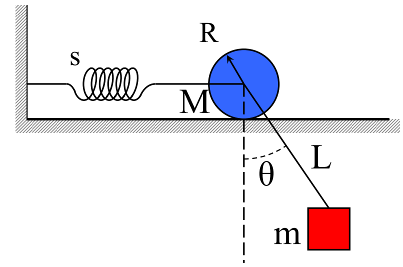
Πρόβλημα 10.164

Συμπαγής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R ευρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο επί του οποίου μπορεί να κυλάει χωρίς ολίσθηση και είναι συνδεδεμένος σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά s. Από τον κύλινδρο κρέμεται με αβαρές μη-εκτατό νήμα μήκους L, ένα σώμα μάζας m. Το σύστημα ευρίσκεται σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, με επιτάχυνση βαρύτητας g.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων, για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ισορροπίας.

(β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και υπολογίστε τις συχνότητές τους.

(γ) Υπολογίστε τις κανονικές συντεταγμένες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. [Ροπή αδράνειας κυλίνδρου περί τον άξονά του: $I = (MR^2)/2$]



Πρόβλημα 10.165

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ομογενούς κυλινδρικού σωλήνα μάζας M, που έχει εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2, ως προς τον άξονά του.

Πρόβλημα 10.166

Δύο σώματα μάζας m_1 και m_2 συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς s. Οι μάζες έχουν τη δυνατότητα να ταλαντώνονται κατά μήκος της ευθείας που περνάει από τα κέντρα τους, πλησιάζοντας και απομακρύνοντας μεταξύ τους. Δείξτε ότι η συχνότητα αυτής της ταλάντωσης είναι $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, όπου $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$, η ανηγμένη μάζα του συστήματος. (Υπόδειξη: οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται είναι οι δυνάμεις ελαστικότητας)

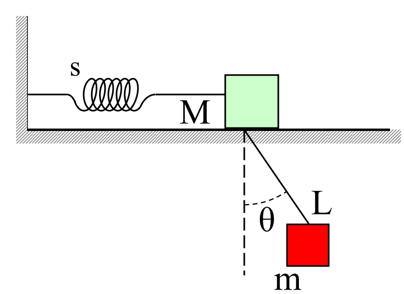
Πρόβλημα 10.167

Σώμα μάζας M ευρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο επί του οποίου μπορεί να κινείται χωρίς τριβή και είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά s. Από το σώμα κρέμεται, με αβαρές μη-εκτατό νήμα μήκους L, ένα σώμα μάζας m. Το σύστημα ευρίσκεται σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, με επιτάχυνση βαρύτητας g.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων, για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ισορροπίας.

(β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

(γ) Υπολογίστε τις κανονικές συντεταγμένες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.



Πρόβλημα 10.168

Στερεό σώμα μάζας M κινείται υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$. Τυχαίο (μαθηματικό) σημείο Σ (εντός ή εκτός του σώματος) έχει ταχύτητα v_Σ, ως προς το ίδιο αδρανειακό σύστημα.

(α) Να υπολογιστεί ο ρυθμός $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\Sigma/\mathrm{d}t$ με τον οποίο μεταβάλλεται η στροφορμή $\boldsymbol{L}_\Sigma$ του συστήματος περί το σημείο Σ, συναρτήσει των μεγεθών $\boldsymbol{N}_\Sigma^{\varepsilon\xi}$ (ροπή εξωτερικών δυνάμεων ως προς Σ), $\boldsymbol{v}_\Sigma$ (ταχύτητα του σημείου Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$), και $\boldsymbol{v}_{\mathrm{KM}}$ (ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος, ως προς το $Oxyz$).

(β) Υπό ποιες προϋποθέσεις (για την κίνηση του σημείου Σ), ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς Σ, ικανοποιεί τη σχέση $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\Sigma/\mathrm{d}t = \boldsymbol{N}_\Sigma^{\varepsilon\xi}$. Η στροφορμή είναι περί το Σ αλλά ως προς το αδρανειακό σύστημα που αναφέραμε, οπότε οι ταχύτητες αναφέρονται ως προς αυτό.

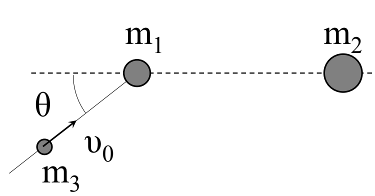
Πρόβλημα 10.169

Υποθέστε ότι η Γη είναι ομογενής σφαίρα ακτίνας $R = 6,4 \times 10^6$ m και περιστρέφεται με σταθερή περίοδο T περί τον άξονα «Νότιος-Βόρειος» πόλος.

(α) Αγνοώντας την κίνηση της Γης περί τον Ήλιο, να υπολογίσετε, συναρτήσει των R, T, g, και του γεωμετρικού πλάτους θ (θ = γωνία ανάμεσα στην ακτίνα της Γης στο σημείο μέτρησης και στην προβολή της επί τον ισημερινό), τη γωνία ϕ ανάμεσα στο νήμα της στάθμης και την τοπική κατακόρυφο.

(β) Χρησιμοποιώντας τιμές δεδομένων ή γνωστών μεγεθών, αναπτύξτε την τελική σχέση του ερωτήματος (α) σε προσέγγιση πρώτης τάξης και δείξτε ότι $\phi \approx \arctan\{(\tan\theta)(1+c)\} - \theta$, $(c = ?)$, και υπολογίστε τη γωνία ϕ για τις περιπτώσεις (β$_1$) $\theta = 0°$, (β$_2$) $\theta = 45°$ και (β$_3$) $\theta = 90°$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (β$_1$), (β$_2$), (β$_3$).

Πρόβλημα 10.170



Σύστημα αποτελείται από δύο σημειακές μάζες $m_1 = 2m_0$ και $m_2 = 3m_0$, οι οποίες αλληλεπιδρούν έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης να αποδίδεται από τη φαινομενολογική σχέση

$$U(r) = b/r^2 - 2c/r$$

όπου r η σχετική απόσταση των δύο μαζών και $b > 0$, $c > 0$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει απόσταση ευσταθούς ισορροπίας, r_0, ως προς μικρές μεταβολές της μεταξύ τους απόστασης και υπολογίστε την.

(β) Δείξτε ότι για μικρές μεταβολές της μεταξύ τους απόστασης από τη θέση ισορροπίας, το σύστημα εκτελεί ταλάντωση κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σώματα που είναι με καλή προσέγγιση αρμονική, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης, ω_0.

(γ) Ενώ το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, σημειακή μάζα $m_3 = m_0$ που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_0 = 0,01c/\sqrt{2mb}$, και γωνία θ ως προς το στιγμιαίο άξονα (x) που συνδέει τις μάζες (m_1, m_2) προσκρούει και ενσωματώνεται στη μάζα m_1. Να προσδιοριστεί η θέση $(x_{\mathrm{KM}}, y_{\mathrm{KM}})$ και η ταχύτητα $(\upsilon_{\mathrm{KMx}}, \upsilon_{\mathrm{KMy}})$ του κέντρου μάζας του συστήματος των τριών μαζών λίγο πριν την κρούση.

(δ) Ποια είναι η στροφορμή, L_{KM}, του συστήματος των τριών μαζών, ως προς το κέντρο μάζας τους, λίγο πριν την κρούση;

(ε) Εξηγήστε για ποιο λόγο μπορεί να θεωρηθεί το σύστημα των τριών μαζών κατά την κίνησή του μετά την κρούση, με καλή προσέγγιση, ως στερεό σώμα, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος.

(στ) Σε αυτή την περίπτωση να βρείτε ποια είναι η ροπή αδράνειας, I_{KM}, του συστήματος των τριών μαζών, αμέσως μετά την κρούση, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν οι τρεις μάζες μετά την κρούση τους.

(ζ) Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος, L'_{KM} των τριών μαζών, ως προς το κέντρο μάζας τους, ακριβώς μετά την κρούση;

(η) Κάνοντας χρήση της προσέγγισης των ερωτημάτων (ε) και (στ), να υπολογιστούν η συχνότητα περιστροφής (ω_1) του συστήματος, περί άξονα κάθετο στο αρχικό επίπεδο των τριών μαζών, που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους, και η συχνότητα (ω_2) και το πλάτος (α) της ταλάντωσης κατά μήκος του στιγμιαίου άξονα που συνδέει τις μάζες, κατά τη διάρκεια της κίνησής τους, μετά την κρούση.

(θ) Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος για τις περιπτώσεις $\theta = 0°$ και $\theta = 90°$.

Πρόβλημα 10.171

Αλυσίδα μήκους l και σταθερής γραμμικής πυκνότητας $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}x$ κρέμεται από την άκρη ενός λείου τραπεζιού κατά το μισό του μήκους της, μέσα σε πεδίο βαρύτητας έντασης g. Η αλυσίδα αφήνεται από αυτή την κατάσταση, τη χρονική στιγμή $t = 0$, με μηδενική αρχική ταχύτητα, έτσι ώστε το μήκος που κρέμεται να παρασύρει κρίκο-κρίκο και την υπόλοιπη αλυσίδα. Να υπολογισθεί το μήκος x που έχει εγκαταλείψει το τραπέζι, ως συνάρτηση του χρόνου t, για τις περιπτώσεις που η μισή αλυσίδα, που βρίσκεται αρχικά πάνω στο τραπέζι, είναι:

(α) εκτεταμένη σε μήκος $l/2$, κάθετα στην ακμή του τραπεζιού,

(β) συσσωρευμένη στην άκρη του τραπεζιού, αλλά έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η πτώση «κρίκο-κρίκο».

Πρόβλημα 10.172

Κώνος, με ακτίνα βάσης R και ύψος L, έχει συνολική μάζα M. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του κώνου περί έναν άξονα κάθετο στο ύψος του που διέρχεται από την κορυφή του, και να δείξετε ότι, στην περίπτωση $R << L$, αυτή η ροπή αδράνειας είναι ανεξάρτητη του R (σε πρώτη τάξη ως προς R/L).

Πρόβλημα 10.173

Σύστημα πολλών σωματιδίων με μάζες m_i $(i = 1, \ldots, N)$, μελετάται ως προς δύο συστήματα αναφοράς, $Oxyz$ και $O'x'y'z'$, εκ των οποίων το δεύτερο εκτελεί μεταφορική κίνηση ως προς το πρώτο. Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ των στροφορμών J και J' του συστήματος σωματιδίων m_i, περί τα O και O' αντίστοιχα, με τις ταχύτητες εκφραζόμενες στα αντίστοιχα συστήματα αναφοράς. Τι ισχύει για τη σχέση μεταξύ J και J', όταν το O' είναι το κέντρο μάζας του συστήματος σωματιδίων m_i;

Πρόβλημα 10.174

Υπόθεστε ότι από μια βρύση, που απέχει από το έδαφος απόσταση L, στάζουν σταγόνες νερού με σταθερό ρυθμό $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t = a$, όπου n ο αριθμός των σταγόνων. Αν θεωρήσετε ότι ο αριθμός των σταγόνων που βρίσκονται κάθε στιγμή στον αέρα είναι πολύ μεγάλος, έτσι ώστε η κατανομή τους να μπορεί να θεωρηθεί συνεχής, να υπολογίσετε την απόσταση, από το έδαφος, του κέντρου μάζας της στήλης των σταγόνων που πέφτουν.

Πρόβλημα 10.175

(α) Σωμάτια μαζών m_1 και m_2, με αρχικές θέσεις (τη χρονική στιγμή $t = 0$) $\boldsymbol{r}_{01}$ και $\boldsymbol{r}_{02}$, κινούνται με σταθερές ταχύτητες $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$ αντίστοιχα. Διατυπώστε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα τέσσερα ανωτέρω ανύσματα, ώστε τα σωμάτια να συγκρουσθούν και, σε αυτή την περίπτωση, υπολογίστε τη χρονική στιγμή που θα συμβεί αυτό.
(β) Τρεις σημειακές μάζες m_1, m_2, m_3 αλληλεπιδρούν μέσω βαρυτικών δυνάμεων.

(i) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.

(ii) Θεωρήστε ότι οι τρεις μάζες μπορούν να κινούνται επί του επιπέδου που ορίζουν έτσι ώστε οι αποστάσεις μεταξύ τους, ανά δύο, να είναι σταθερές και ίσες με D. Γράφοντας τις εξισώσεις κίνησης στο σύστημα κέντρου μάζας δείξτε ότι το σύστημα των τριών μαζών περιστρέφεται και υπολογίστε τη συχνότητα περιστροφής. Δίνεται η σταθερά παγκόσμιας έλξης G.

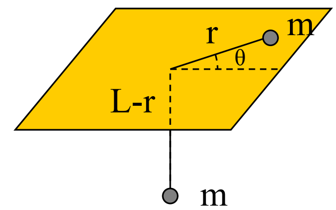
Πρόβλημα 10.176

(α) Δείξτε ότι για μια επιφανειακή κατανομή μάζας που εκτείνεται στο επίπεδο (x, y), ισχύει $I_x + I_y = I_z$, όπου I_x, I_y, I_z οι ροπές αδράνειας περί τους άξονες x, y, z.
(β) Δείξτε, με επιχειρήματα συμμετρίας, (χωρίς λεπτομερή υπολογισμό) ότι η ροπή αδράνειας μιας λεπτής μεταλλικής πλάκας σχήματος τετραγώνου, ως προς οποιοδήποτε άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο της πλάκας και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού του άξονα.
(γ) Η στροφορμή ενός σωματιδίου, ως προς ένα σημείο O, δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t^2$, όπου $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ σταθερά διανύσματα κάθετα μεταξύ

τους. Να υπολογισθεί, συναρτήσει των $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$, η ροπή $\boldsymbol{N}$ της δύναμης που ασκείται στο σώμα, ως προς το ίδιο σημείο Ο, τη χρονική στιγμή που τα δύο ανύσματα $\boldsymbol{J}$ και $\boldsymbol{N}$ σχηματίζουν γωνία $45°$.

Πρόβλημα 10.177

Δύο σωμάτια μάζας m είναι συνδεδεμένα με μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας και μήκους L. Το ένα σωμάτιο βρίσκεται σε οριζόντια λεία τράπεζα η οποία έχει στο κέντρο της μια οπή. Το νήμα διέρχεται από την οπή έτσι ώστε το δεύτερο σωμάτιο να κρέμεται κατακόρυφα κάτω από την οπή. Θεωρήστε ως αρχή του συστήματος αναφοράς την οπή και περιγράψτε τη θέση του σωματίου στο τραπέζι με επίπεδες πολικές συντεταγμένες (r, θ), όπως στο σχήμα.



(α) Εκφράστε τη στροφορμή του σωματιδίου, ως προς την αρχή, συναρτήσει των r και $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$.

(β) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή είναι σταθερή.

(γ) Εκφράστε το άθροισμα των ενεργειών των δύο μαζών συναρτήσει των r, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ και $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$.

(δ) Δείξτε ότι $\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = a - \dfrac{b}{r^2} - gr$, όπου a, b σταθερές και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

(ε) Αν αρχικώς, το σωμάτιο στο τράπεζι απέχει απόσταση $L/2$ από την αρχή και κινείται με ταχύτητα v_0, κάθετα στο νήμα, υπολογίστε μια σχέση για το $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)^2$ όταν $r = L$.

(στ) Από την τελευταία σχέση υπολογίστε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε το σωμάτιο που βρίσκεται κάτω από το τραπέζι να μη φθάσει ποτέ σε αυτό.

Πρόβλημα 10.178

Σταγόνα βροχής πέφτει κατακόρυφα μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Η αρχική της μάζα είναι αμελητέα και η ταχύτητα είναι μηδέν. Καθώς πέφτει μέσα σε σύννεφο, σταγονίδια κολλούν πάνω της και η μάζα της αυξάνεται γραμμικά με την απόσταση που διανύει. Τα σταγονίδια του συννέφου θεωρούνται ακίνητα (μέχρι τη στιγμή της συγκόλλησης στη σταγόνα). Δεν υπάρχουν άλλα φαινόμενα τριβής κατά την πτώση της σταγόνας.

(α) Βρείτε τη (διαφορική) εξίσωση της κίνησης της σταγόνας. Προσπαθήστε να είστε σαφείς στην εφαρμογή του νόμου της δυναμικής του Νεύτωνα διαλέγοντας κατάλληλα το σύστημα μάζας στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη.

(β) Δεχτείτε ότι η ταχύτητα της σταγόνας είναι ανάλογη του χρόνου από την εκκίνησή της και βρείτε την επιτάχυνσή της.

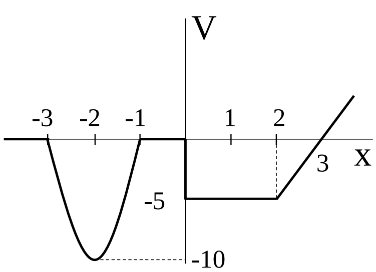
(γ) Λογαριάστε το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας επί της σταγόνας από την εκκίνησή της μέχρι τη στιγμή t. Λογαριάστε την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής της ενέργειας. Δικαιολογήστε την απώλεια ενέργειας αναφερόμενοι στον τρόπο αύξησης της μάζας της σταγόνας.

Πρόβλημα 10.179

Δύο σημειακές μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ συνδέονται με ομογενή ράβδο μάζας $m_3 = m/10$ και μήκους L. Το σύστημα ακινητεί πάνω σε οριζόντιο λείο τραπέζι, όταν τρίτη σημειακή μάζας $m_4 = m$ έρχεται με οριζόντια ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ κάθετη στη ράβδο και σφηνώνεται στη μάζα m_1. Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος μετά την κρούση, υπολογίζοντας την ταχύτητα του κέντρου μάζας και τη γωνιακή ταχύτητα. [Θεωρήστε ότι η κρούση-ενσωμάτωση των μαζών $m_1 - m_4$ γίνεται στιγμιαία].

Πρόβλημα 10.180

Σώμα μάζας m κινείται σε μια διάσταση με δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση (βλ. και σχήμα)



$$-\infty < x < -3, V = 0$$
$$-3 \leq x \leq -1, V = 10(x^2 + 4x + 3)$$
$$-1 < x < 0, V = 0$$
$$0 \leq x \leq 2, V = -5$$
$$2 < x < \infty V = 5(x - 3)$$

(α) Το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = -5$ και παρατηρείται στη θέση $x = -2, 5$. Βρείτε τα όρια της κίνησής του.

(β) Το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = 1$ και παρατηρείται στη θέση $x = 0$. Βρείτε τα όρια της κίνησής του.

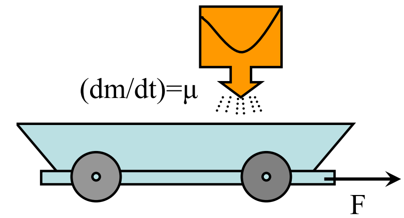
(γ) Αν το σώμα ισορροπεί στη θέση $x = -2$ και του δοθεί ελάχιστο ποσό ενέργειας, περιγράψτε σύντομα γιατί το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και βρείτε την περίοδό της.

(δ) Το σώμα έχει $E = -3$ και παρατηρείται στο $x = 1$, κινούμενο προς τα αριστερά. Μόλις το σώμα φτάσει στη θέση $x = 0$ χάνει το μισό της **κινητικής** ενέργειας. Υπολογίστε, **μετά** τις τρεις πρώτες «κρούσεις» στο $x = 0$, την **ολική** ενέργεια του σώματος.

(ε) Ποια θα είναι η τελική ολική ενέργεια του σώματος μετά από πολλές κρούσεις;

Πρόβλημα 10.181

Βαγονέτο μάζας m_0 αρχίζει, σε χρόνο $t = 0$, να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, κατά μήκος ευθείας υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F. Ταυτόχρονα, αρχίζει να προστίθεται στο βαγονέτο σιτάρι, με σταθερή παροχή $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \mu$, από ένα θεριστικό μηχάνημα, το οποίο στέκεται ακίνητο. Βρείτε τη χρονική εξέλιξη της ταχύτητας $v = v(t)$ και της επιτάχυνσης $a = a(t)$ του βαγονέτου, για όσο διάστημα η χοάνη φόρτωσης βρίσκεται πάνω από το βαγονέτο.



Πρόβλημα 10.182

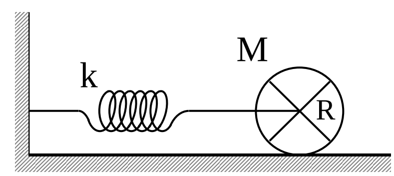
Τροχός συνολικής μάζας M και ακτίνας R αποτελείται από τέσσερις ακτίνες κάθετες μεταξύ τους και την, ισόπαχη προς τις ακτίνες, περιφέρεια. Ο τροχός βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο επί του οποίου μπορεί να κυλάει **χωρίς ολίσθηση** και είναι συνδεδεμένος σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά k.

(α) Υπολογίστε τη συνολική ροπή αδράνειας του τροχού.

(β) Δείξτε ότι αν ο τροχός απομακρυνθεί λίγο από την κατάσταση ισορροπίας θα αρχίσει να ταλαντώνεται αρμονικά.

(γ) Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης.

(δ) Δείξτε ότι αν η αρχική απομάκρυνση υπερβεί μια μέγιστη τιμή, τότε ο τροχός κατά την ταλάντωσή του θα υφίσταται και ολίσθηση.



[Ροπή αδράνειας ομοιογενούς ράβδου μάζας m και μήκους L, ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το άκρο της: $I = (mL^2)/3$. *Σημείωση: Κατά τη διάρκεια της κύλισης, η στατική τριβή δεν έχει αναγκαστικά τη μέγιστη τιμή της,* $T = nF_{\kappa\alpha\theta}$.]

Πρόβλημα 10.183

Δύο ίδια διαστημόπλοια Α και Β κινούνται αντιμέτωπα, κατά μήκος του άξονα x, με ίσες και αντίθετες ταχύτητες $v = c/4$, ως προς αδρανειακό εργαστηριακό παρατηρητή Π. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ως προς τον παρατηρητή Π, τα πλησιέστερα άκρα των δύο διαστημοπλοίων βρίσκονται, ως προς τον Π, στα σημεία $x_{A,0} = 0$ και $x_{B,0} = L$, αντίστοιχα, και από το μέτωπο του διαστημοπλοίου A εκτοξεύεται, προς το B πύραυλος με σχετική, *ως προς το* A, ταχύτητα $v = c/2$, (Γεγονός E_0). Η εκτόξευση του πυραύλου συνοδεύεται από εκπομπή φωτός. Θεωρούμε Γεγονός E_1 την άφιξη αυτού του φωτός στο διαστημόπλοιο Β.

(α) Υπολογίστε τη θέση x και το χρόνο t των δύο παραπάνω γεγονότων (E_0 και E_1) για το σύστημα του παρατηρητή Π, καθώς και για το σύστημα καθενός από τα διαστημόπλοια, υποθέτοντας ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ως προς Π, τα τρία συστήματα αναφοράς (Π,Α,Β) έχουν μηδενικό χρόνο και οι αρχές τους συμπίπτουν.

(β) Αν κατά τη στιγμή που το διαστημόπλοιο Β αντιλαμβάνεται το φως εκτοξεύει δικό του πύραυλο με ταχύτητα και πάλι $c/2$ ως *προς το* B, υπολογίστε την ταχύτητα κάθε πυραύλου ως προς τον παρατηρητή Π (σημειώνοντας και το σχετικό πρόσημο).

(γ) Τέλος, θεωρούμε γεγονός E_3 τη σύγκρουση των δύο πυραύλων. Υπολογίστε τη θέση και το χρόνο t αυτού του γεγονότος για το σύστημα του παρατηρητή Π, καθώς και για το σύστημα καθενός από τα διαστημόπλοια.

Πρόβλημα 10.184

Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σώματος με μάζα 100 Kg είναι $\boldsymbol{r}(t) = 16t\hat{\boldsymbol{x}} + 25t^2\hat{\boldsymbol{y}} + 33\hat{\boldsymbol{z}}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθούν:

(α) η ταχύτητα του σώματος και η επιτάχυνσή του

(β) η ορμή του και η δύναμη που ασκείται στο σώμα

(γ) η στροφορμή του και η ροπή της δύναμης ως προς την αρχή των αξόνων.

Πρόβλημα 10.185

Έστω ότι το διάνυσμα θέσης ενός κινητού περιγράφεται από τη συνάρτηση $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ και ότι s είναι το μήκος της τροχιάς, όπως το μετράμε με αφετηρία κάποιο σημείο αναφοράς της τροχιάς. Ορίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{T}}$, $\hat{\boldsymbol{N}}$, το μεν $\hat{\boldsymbol{T}}$ εφαπτομενικό στην τροχιά, κατά τη φορά της κίνησης, το δε $\hat{\boldsymbol{N}}$ κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{T}}$ κατά τη φορά του $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}/\mathrm{d}T$ (ή του $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}/\mathrm{d}s$). Δείξτε ότι τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης γράφονται ως εξής

$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{T}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{T}} + \frac{v^2}{\rho^2}\hat{\boldsymbol{N}}$$

όπου $1/\rho = k = \left|\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}/\mathrm{d}s\right|$ η τοπική καμπυλότητα της τροχιάς και ρ η τοπική ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς. Οι δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης είναι η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση, αντίστοιχα.

Πρόβλημα 10.186

Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου T, από τη σχέση

$$x(t) = 2 + 3t + 4\mathrm{e}^{-5t} \qquad \text{(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s)}$$

Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

Πρόβλημα 10.187

Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t από τις σχέσεις

$$x(t) = 3\sin(5t), \qquad y(t) = 4\cos(5t) \qquad \text{(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s)}$$

Να βρεθούν

(α) οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου

(β) τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου

(γ) η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Πρόβλημα 10.188

Αν $\boldsymbol{r}(t) = (3+t)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos 2t\hat{\boldsymbol{y}} + 2\mathrm{e}^{-2t}\hat{\boldsymbol{z}}$, να βρεθούν τα

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad \text{και} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\boldsymbol{r}}$$

καθώς και οι αρχικές τιμές για $t = 0$, $\boldsymbol{r}(0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ και $\ddot{\boldsymbol{r}}(0)$ των τριών διανυσμάτων.

Πρόβλημα 10.189

Να βρεθούν οι παράγωγοι του διανύσματος $\boldsymbol{r}(t) = (x_0\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}}) + v_0 t\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}gt^2\hat{\boldsymbol{z}}$ ως προς t, αν όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Επίσης να βρεθούν οι τιμές τους για $t = 0$.

Πρόβλημα 10.190

Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$ κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1 &= (3t + 2t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (4 + 4t^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (5 + 2t)\hat{\boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{r}_2 &= (20 - t - t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (1 + 4t)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

αντίστοιχα, όπου t ο χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).

(α) Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και να βρείτε πότε θα συμβεί αυτό

(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα;

(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι;

(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου.

Πρόβλημα 10.191

Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος

$$x = 3\alpha\sin(\omega t), \quad y = 4\alpha\sin(\omega t), \quad z = 5\alpha\cos(\omega t)$$

όπου t ο χρόνος και ω και α είναι θετικές σταθερές. Να αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ είναι συνεπίπεδα. Συνθήκη: $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = 0$

Πρόβλημα 10.192

Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a\cos(\omega t), \qquad y = a\sin(\omega t), \qquad z = bt^2$$

όπου t ο χρόνος, και a, b και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$, η ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ και η επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου

(β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{c} = z\hat{z} = bt^2\hat{z}$, και $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\boldsymbol{R}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα των z είναι σταθερή

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξετε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μια κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο Κ και μια σταθερή πάνω στην κατεύθυνση z

(δ) Υπολογίστε το στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$, και να δείξετε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση z.

Πρόβλημα 10.193

Δίνεται ότι

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

για κάθε x. Να υπολογιστεί η τιμή του $\mathrm{e}^{0,1}$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Πόσο είναι το σφάλμα στο $\mathrm{e}^{0,1}$ αν υποθέσουμε ότι είναι $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$;

Πρόβλημα 10.194

Να βρεθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες η ροπή της δύναμης $\boldsymbol{F} = F_x\hat{\boldsymbol{x}} + F_y\hat{\boldsymbol{y}} + F_z\hat{\boldsymbol{z}}$ ως προς το σημείο $(0,0,0)$, $\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$.

Πρόβλημα 10.195

Να βρεθεί η μαγνητική δύναμη $\boldsymbol{F}_\mu$ που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο Q που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}}$. Να βρεθεί επίσης το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{F}_\mu$.

Πρόβλημα 10.196

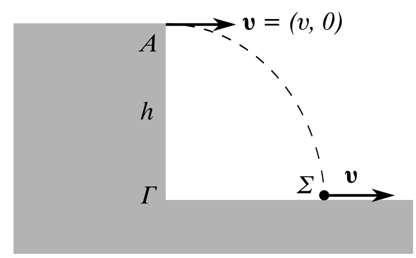
Η ροπή μιας δύναμης ως προς το σημείο Ο ορίζεται ως $\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$, όπου $\boldsymbol{r}$ είναι το διάνυσμα από το Ο στο σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη. Να δειχθεί ότι η ροπή δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων $\boldsymbol{F}$ και $-\boldsymbol{F}$ που ασκούνται στα σημεία $\boldsymbol{r}_1$ και $\boldsymbol{r}_2$ αντίστοιχα (ζεύγος δυνάμεων), είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

Πρόβλημα 10.197

Η στροφορμή ως προς σημείο $(0,0,0)$ μιας μάζας m που βρίσκεται στο σημείο $\boldsymbol{r}$ και κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$, ορίζεται ως $\boldsymbol{L} \equiv m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$. Έστω ότι η μάζα υφίσταται μια κεντρική δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\boldsymbol{F} = f(r)\hat{r}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο $(0,0,0)$ και $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{r}(t)$. Δείξτε ότι η στροφορμή της μάζας διατηρείται σταθερή.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το χρόνο είναι $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = 0$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήστε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο C. Kittle κ.ά, Μηχανική, σελ. 197-8.

Πρόβλημα 10.198



Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια, με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = (v_0, 0)$, με σκοπό να πετύχει το στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{V} = (v_1, 0)$, οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα $(t = 0)$ από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα, που θεωρούμε ότι επενεργεί μόνο στη σφαίρα, είναι ανάλογη με την ταχύτητα, $-k\boldsymbol{v}$ ($k > 0$)

(α) Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης για τη σφαίρα

(β) Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου

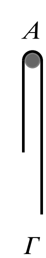
(γ) Βρείτε τα $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας (θεωρώντας το σημείο Α ως αρχή των αξόνων)

(δ) Γράψτε τις σχέσεις που υπακούουν τα $x(t)$ και $y(t)$, υποθέτοντας ότι η σφαίρα συναντά τον στόχο κάποια χρονική στιγμή t_0

(ε) Στην περίπτωση που ισχύει το (δ), δείξτε, απαλείφοντας όρους με εκθετικά, ότι η σφαίρα πετυχαίνει τον στόχο σε χρόνο

$$t_0 = \frac{kh}{mg\left(1 - v_1/v_0\right)}$$

Πρόβλημα 10.199



Λεπτό ομογενές σχοινί μάζας M και μήκους L τοποθετείται γύρω από ένα λείο ξυλόκαρφο πολύ μικρής ακτίνας (βλ. σχήμα). Όταν ξεκινά η κίνηση το (ΑΓ)$= b$ ($b > L/2$). Βρείτε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σχοινιού όταν το (ΑΓ)$= 2L/3$.

Πρόβλημα 10.200

Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy . Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(0,0)$ και έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$, η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-\mu k v_y \hat{y}$, ανάλογη της συνιστώσας v_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής.

(α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου;

(β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy;

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά;

Πρόβλημα 10.201

Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από το σημείο $(0, 0)$ με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x, ο οποίος είναι οριζόντιος. Ο άξονας y είναι κατακόρυφος. Η σφαίρα κινείται στο επίπεδο xy. Το σημείο βολής βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Κατά την κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση $-b\boldsymbol{v}$ από την ατμόσφαιρα, όπου $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά.

(α) Βρείτε τις συναρτήσεις $v_x(t)$ και $v_y(t)$ κατά την κίνηση της σφαίρας

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας

(γ) Γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του χρόνου τ όταν η σφαίρα προσκρούει στο έδαφος, χωρίς να επιχειρήσετε να τη λύσετε

(δ) Δείξτε ότι για $\tau \gg m/b$ ο χρόνος αυτός είναι $\tau \approx \dfrac{hb}{mg} + \dfrac{v_0}{g}\sin\theta$.

Πρόβλημα 10.202

Μοτοσικλέτα μάζας m κινούμενη στην ύπαιθρο με ταχύτητα v_0 πέφτει πάνω σε σωρό με άχυρο, πάχους d και το διαπερνά. Αν η δύναμη τριβής μέσα στο σωρό είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας ($-kv^2$) (και θεωρήσουμε ότι η μηχανή έσβησε μόλις μπήκε στα άχυρα), να υπολογισθούν:

(α) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση του χρόνου,

(β) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση της απόστασης x που διανύει μέσα στο άχυρο και (γ) ο χρόνος που χρειάζεται η μοτοσυκλέτα να περάσει από το σωρό (Ευτυχώς, ο μοτοσυκλετιστής πέρασε σώος και αβλαβής).

Πρόβλημα 10.203

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{y}$ ($V > 0$) κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y = 0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-\mu k\boldsymbol{v}$, όπου $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.

(α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος

(β) Δείξτε ότι τα v και y ικανοποιούν τη σχέση

$$y = \frac{V - v}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{1 + kV/g}{1 + kv/g}\right)$$

(γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φτάσει το σώμα.

Πρόβλημα 10.204

Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σώματος είναι $\boldsymbol{r} = bt\hat{x} - ct^2\hat{y}$, όπου t είναι ο χρόνος και b, c θετικές σταθερές. Να βρεθούν:

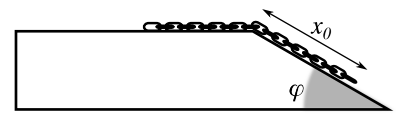
(α) η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου

(β) η ταχύτητα του σωματιδίου $\boldsymbol{v}$ και η επιτάχυνσή του $\boldsymbol{\gamma}$, καθώς και τα μέτρα τους

(γ) η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{\gamma}$, ως συνάρτηση του χρόνου

(δ) Το μήκος της διαδρομής που διανύει το σωματίδιο στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t = 0$ και $t = b/2c$.

Πρόβλημα 10.205



Ομογενής αλυσίδα συνολικού μήκους L και μάζας M είναι τοποθετημένη έτσι ώστε τη χρονική στιγμή $t = 0$ τμήμα της μήκους x_0 να βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ. Αν δεν υπάρχουν τριβές, βρείτε την ταχύτητα την οποία έχει αποκτήσει η αλυσίδα όταν βρίσκεται πια εξ ολοκλήρου στο κεκλιμένο επίπεδο.

Πρόβλημα 10.206

Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y = 0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-v\boldsymbol{v}$, όπου $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά.

(α) να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, v, ως συνάρτηση του χρόνου

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα τείνει σε μια οριακή τιμή και βρείτε την τιμή αυτή

(γ) να βρεθεί η θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου

(δ) αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $v(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t.

Δίνεται το ανάπτυγμα: $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

Πρόβλημα 10.207

Σώμα μάζας m κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δύναμης που του προσδίδει δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη συνάρτηση $U(x) = 2x(x-2)$ $0 < x < 2$ και $U(x) = 0$, $x > 2$.

(α) Σχεδιάστε πρόχειρα τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας

(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και διευκρινίστε το είδος της

(γ) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα

(δ) Ποια ταχύτητα πρέπει να έχει το σώμα στη θέση $x = 1$ για να φτάσει στο $x = 2$ με μηδενική ταχύτητα

(ε) Αν το σώμα έχει ολική ενέργεια $E_{\text{ολ}} = 2$ βρείτε τα όρια της κίνησής του

(στ) Το ίδιο για την περίπτωση $E_{\text{ολ}} = -1$

(ζ) Αποδείξτε ότι αν το σώμα μετατοπιστεί λίγο από τη θέση ισορροπίας θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από αυτήν και υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.208

Οι παρατηρητές O και O' βρίσκονται σε σχετική μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $v = 0.6c$. Θεωρούμε ότι όταν οι δυο παρατηρητές συμπίπτουν έχουν $t = t' = 0$. Όταν έχουν περάσει 5 έτη, σύμφωνα με τον O, ο O εκπέμπει ένα φωτεινό σήμα. Αυτό το θεωρούμε ως Γεγονός 1.

(α) Γράψτε τη θέση και το χρόνο αυτού του γεγονότος για τον O και για τον O'. Θεωρούμε Γεγονός 2 τη λήψη του φωτεινού σήματος από τον O'.

(β) Γράψτε τη θέση και το χρόνο αυτού του γεγονότος για τον O και τον O'.

Πρόβλημα 10.209

Δύο διαστημόπλοια Α και Β κινούνται αντιμέτωπα, κατά μήκος του άξονα x, με ίσες και αντίθετες ταχύτητες $v = c/4$, ως προς αδρανειακό εργαστηριακό παρατηρητή Π. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ως προς τον παρατηρητή Π, τα πλησιέστερα άκρα των δύο διαστημοπλοίων βρίσκονται, ως προς τον Π, στα σημεία $x_A = 0$ και $x_B = L_0$, αντίστοιχα, και από το μέτωπο του διαστημόπλοιου Α εκτοξεύεται, προς το Β, πύραυλος με σχετική, ως προς το Α, ταχύτητα $u = c/2$. Η εκτόξευση συνοδεύεται από εκπομπή φωτός, η οποία γίνεται αισθητή από το διαστημόπλοιο Β προκαλώντας ακαριαία αντίστοιχη εκτόξευση πυραύλου, προς το Α, με αποτέλεσμα την αλληλεξουδετέρωση των δύο πυραύλων. Να υπολογιστούν:

(α) το χρονικό διάστημα ως προς τον Π, που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο εκτοξεύσεις

(β) Το σημείο και η χρονική στιγμή αλληλεξουδετέρωσης των δύο πυραύλων, ως προς τον Π

(γ) Η απόσταση των δύο διαστημοπλοίων, ως προς τον Π, κατά τη στιγμή της αλληλεξουδετέρωσης των πυραύλων,

(δ) Η απόσταση των δύο διαστημοπλοίων, κατά τη στιγμή της αλληλεξουδετέρωσης των πυραύλων, ως προς καθένα από αυτά.

Πρόβλημα 10.210

Ένα διαστημόπλοιο εκτοξεύει πύραυλο που κατευθύνεται προς τη Γη με ταχύτητα $0,84c$ ως προς το διαστημόπλοιο. Παρατηρητής στη Γη διαπιστώνει ότι ο πύραυλος πλησιάζει με ταχύτητα $0,36c$.

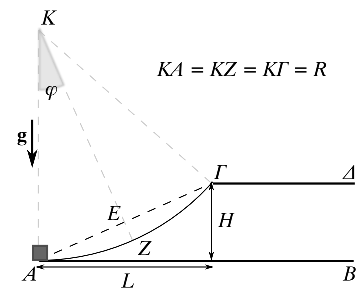
(α) Με πόση ταχύτητα κινείται το διαστημόπλοιο ως προς τη Γη; Πλησιάζει ή απομακρύνεται από αυτήν;

(β) Αν το μήκος ηρεμίας του πυραύλου είναι, ποιο είναι το μήκος του όπως το μετρά ο αστροναύτης που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο και ποιο όπως το μετρά ο παρατηρητής στη Γη;

(γ) Αν το διαστημόπλοιο εκπέμπει φωτεινά σήματα με συχνότητα 104 Hz, με ποια συχνότητα θα τα ανιχνεύσει ο παρατηρητής στη Γη;

Πρόβλημα 10.211

Προκειμένου να ανεβάσουμε σώμα μάζας m, από το οριζόντιο επίπεδο ΑΒ στο οριζόντιο επίπεδο ΓΔ, (τα οποία απέχουν κατακόρυφη απόσταση H και οριζόντια απόσταση L), μπορούμε να το σπρώξουμε, είτε κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου ΑΕΓ, είτε κατά μήκος κυκλικού τόξου ΑΖΓ, το οποίο γράφεται με κέντρο K, (που προκύπτει από την τομή της ΚΑ ΑΒ με την ΚΕ η οποία είναι μεσοκάθετος στο ΑΓ), και ακτίνα $R = (L^2 + H^2)/2H$. Και οι δύο διαδρομές έχουν τον ίδιο συντελεστή κινητικής τριβής μ.



(α) Να υπολογίσετε το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη που εφαρμόζουμε στο σώμα κατά τη διαδρομή ΑΕΓ

(β) Να υπολογίσετε το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη που εφαρμόζουμε στο σώμα κατά τη διαδρομή ΑΖΓ

(γ) Να εκφράσετε τα συνολικά έργα των ερωτημάτων (α) και (β) συναρτήσει των m, g, μ, H και L, και να τα συγκρίνετε

(δ) Είναι η τριβή διατηρητική δύναμη; Εξηγήστε.

Πρόβλημα 10.212

Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r) = D\left(-\frac{b}{r} + \frac{b^2}{r^2}\right)$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και D και b είναι θετικές σταθερές. Το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r = 0$.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$

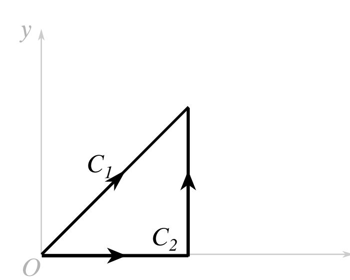
(β) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε πού είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική

(γ) Το ελεύθερο άτομο κρατείται στη θέση $\rho = 3b/2$ και αφήνεται να κινηθεί με μηδενική αρχική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Να περιγράψετε την κίνηση που θα ακολουθήσει.

(δ) Αν τα δύο σώματα απομακρυνθούν σε απόσταση x το ένα από το άλλο και αφεθούν ελεύθερα με μηδενικές ταχύτητες, για ποιες τιμές του x θα διασπασθεί το μόριο;

Πρόβλημα 10.213

Θεωρήστε τις δυνάμεις $\boldsymbol{F}_1 = (x, y, 0)$ και $\boldsymbol{F}_2 = (y, -x, 0)$ και



(α) υπολογίστε, για κάθε μία, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, από το σημείο $(0, 0, 0)$ στο σημείο $(1, 1, 0)$, κατά μήκος των δύο διαφορετικών διαδρομών C_1 και C_2

(β) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α), ποια δύναμη είναι διατηρητική και ποια είναι μη-διατηρητική;

(γ) Για ποιο από τα δύο συμπεράσματα του ερωτήματος (β), η απόδειξη, μέσω των αποτελεσμάτων του (α), είναι επαρκής (πλήρης) και για ποιο όχι;

(δ) Για το δεύτερο συμπέρασμα του ερωτήματος (γ), ποια είναι η πλήρης απόδειξη;

Πρόβλημα 10.214

. Σωματίδιο μάζας m υφίσταται ταυτόχρονα την επίδραση δύο κεντρικών δυναμικών, $U_1 = a/r^2$ και $U_2 = br$, όπου a, b θετικές σταθερές.

(α) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει απόσταση ευσταθούς ισορροπίας r_0 και υπολογίστε την τιμή της

(γ) Υπολογίστε την συχνότητα ταλάντωσης για μικρές ακτινικές διαταραχές γύρω από τη θέση ισορροπίας

(δ) Αν οι a, b είναι ελεγχόμενες, πώς μπορούμε να διπλασιάσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης, γύρω από την ίδια απόσταση ευσταθούς ισορροπίας;

Πρόβλημα 10.215

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον ημιάξονα Ox και έλκεται από το O με δύναμη $F = -k/x^3$, $k > 0$. Αν τη στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = a$ με ταχύτητα $v = 0$, να αποδειχτεί ότι θα φτάσει στο σημείο $x = 0$ μετά από χρόνο $\tau = a^2(m/k)^{1/2}$.

Πρόβλημα 10.216

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x) = -2ax^2 + bx^4$, όπου τα a και b είναι θετικές σταθερές.

(α) Να σχεδιαστούν οι $V(x)$ και $F(x)$. Να προσδιοριστούν τα μέγιστα, τα ελάχιστα και οι δυνατές κινήσεις, ανάλογα με την τιμή της ενέργειας E

(β) Να υπολογιστούν οι συχνότητες των μικρών ταλαντώσεων περί τα ευσταθή σημεία ισορροπίας.

Πρόβλημα 10.217

Ένας δορυφόρος έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα v_0 σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από τη Γη. Η γη θεωρείται σφαιρική και έχει μάζα M. Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης ακτινικά με ταχύτητα v_0, συγκρούεται με το δορυφόρο και ενσωματώνεται σε αυτόν δημιουργώντας ένα σώμα μάζας $2m$.

(α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή Λ των δυο σωμάτων ως προς το κέντρο της Γης παραμένει σταθερή και βρείτε την τιμή της

(β) Βρείτε την ολική ενέργεια $E_{ολ}$ που θα έχει το σώμα που σχηματίζεται μετά τη σύγκρουση

(γ) Αν η $E_{ολ}$ είναι αρνητική, το σώμα θα κινηθεί σε κλειστή τροχιά, που είναι κύκλος ή έλλειψη. Δείξτε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η τροχιά του σώματος θα είναι ελλειπτική

(δ) Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής, βρείτε την ελάχιστη r_1 και τη μέγιστη r_2, απόσταση του σώματος από τη Γη, καθώς αυτό κινείται στην ελλειπτική του τροχιά. Εκφράστε τα αποτελέσματα συναρτήσει της ακτίνας r_0.

Πρόβλημα 10.218

Ένα βαγόνι μάζας M_1 γεμάτο με νερό μάζας M_2 κινείται με ταχύτητα v_0. Θεωρήστε ότι ανοίγει μια τρύπα από όπου χύνεται το νερό με σταθερό ρυθμό $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \lambda$ και σταθερή ταχύτητα v_1 ως προς το βαγόνι. Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης και να βρείτε την ταχύτητα του βαγονιού ως συνάρτηση του χρόνου, στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) όταν η τρύπα είναι από κάτω και το νερό φεύγει κατακόρυφα και

(β) όταν η τρύπα είναι από πίσω και το νερό φεύγει οριζόντια.

Πρόβλημα 10.219

Μια μπάλα μπιλιάρδου έχει μάζα M και ακτίνα R. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ μπάλας και τσόχας είναι n. Η στέκα κτυπά τη μπάλα ώστε το Κ.Μ. της να αποκτήσει ταχύτητα v_0 (η διεύθυνση της δύναμης που προκαλεί την κίνηση περνά από το Κ.Μ της μπάλας). Τριβή κύλισης δεν υπάρχει. Να βρεθούν

(α) η γωνιακή και η γραμμική επιτάχυνση της μπάλας αμέσως μετά το κτύπημα και

(β) ο χρόνος και το διάστημα μέχρι η μπάλα να σταματήσει να ολισθαίνει, δηλαδή να αποκτήσει καθαρή κύλιση (ροπή αδρανείας σφαίρας ως προς το κέντρο της $I = (2/5)MR^2$.

Πρόβλημα 10.220

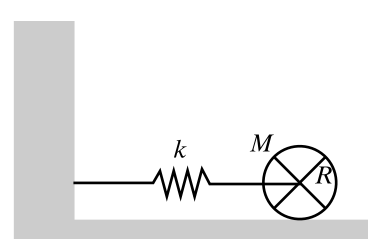
Δίνεται κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας M ομοιόμορφα κατανεμημένης. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 περί άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα του δίσκου αρχίζει να αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο με ρυθμό $a = \mathrm{d}M/\mathrm{d}t$, π.χ. λόγω βροχής που πέφτει ομοιόμορφα και κάθετα στο επίπεδο του δίσκου με αμελητέα ταχύτητα. Να διατυπωθεί και να λυθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου και να βρεθεί έτσι η γωνιακή του ταχύτητα, $\omega(t)$.

Πρόβλημα 10.221

Ενας ομογενής κύβος με μάζα M και ακμή a ολισθαίνει σε οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβή με ταχύτητα v_0. Κατά μήκος της ακμής του τραπεζιού υπάρχει μια ανωμαλία όπου τελικά προσκρούει ο κύβος με μια από τις ακμές του. Να βρεθεί η ελάχιστη v_0 που χρειάζεται για να πέσει ο κύβος από το τραπέζι.

Πρόβλημα 10.222

Τροχός συνολικής μάζας M και ακτίνας R αποτελείται από τέσσερις ακτίνες κάθετες μεταξύ τους και την, ισόπαχη προς τις ακτίνες, περιφέρεια. Ο κύλινδρος βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο επί του οποίου μπορεί να κυλάει χωρίς ολίσθηση και είναι συνδεδεμένος σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά k.



(α) Υπολογίστε τη συνολική ροπή αδράνειας του τροχού

(β) Δείξτε ότι αν ο τροχός απομακρυνθεί λίγο από την κατάσταση ισορροπίας θα αρχίσει να ταλαντώνεται αρμονικά (γ) Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης

(δ) Δείξτε ότι αν η αρχική απομάκρυνση υπερβεί μία μέγιστη τιμή, τότε ο τροχός κατά την ταλάντωσή του θα υφίσταται και ολίσθηση. [Ροπή αδράνειας ομοιογενούς ράβδου μάζας m και μήκους L, ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το άκρο της : $I = (mL^2)/3$] [ΠΡΟΣΟΧΗ: Κατά τη διάρκεια της κύλισης, η στατική τριβή δεν έχει αναγκαστικά τη μέγιστη τιμή της, $T = nF_{\text{καθ}}$].

Πρόβλημα 10.223

Η μάζα ενός γαλαξία μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κατανεμημένη σε ένα επίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε η επιφανειακή πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα επιφάνειας) να είναι ίση με $\sigma = k\mathrm{e}^{-r^2/a^2}$, όπου k και a θετικές σταθερές και r η απόσταση από το κέντρο του γαλαξία.

(α) Βρείτε τη μάζα του γαλαξία ως συνάρτηση των k και a

(β) Βρείτε τη ροπή αδράνειας του γαλαξία ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που περνά από το κέντρο του ($\int_0^\infty x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1$)

(γ) Βρείτε τη ροπή αδρανείας ως προς άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του (εκφράστε τα (β) και (γ) συναρτήσει των a και M).

Πρόβλημα 10.224

Λεπτή ράβδος μήκους l μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο, ο οποίος περνά από το ένα της άκρο O. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) που δίνεται από τη σχέση

$$\lambda(x) = \frac{2m}{3l}\left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

όπου x είναι η απόσταση από το άκρο O.

(α) Δείξτε ότι η συνολική μάζα της ράβδου είναι m, το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο σημείο $x_c = (5/9)l$ και η ροπή αδρανείας της ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I_{\mathrm{O}} = (7/18)ml^2$

(β) Η ράβδος εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης της ράβδου συναρτήσει της γωνίας απόκλισης θ της ράβδου από την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το άκρο της O. Δείξτε ότι για μικρές τιμές της γωνίας θ, η ταλάντωση είναι απλή αρμονική και βρείτε τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.225

Θεωρήστε μια οπή που διασχίζει τη γη και περνάει απ' το κέντρο της. Αν η περιστροφή της γης και οι τριβές αγνοηθούν, να δείξετε ότι η κίνηση ενός σώματος κατά μήκος της οπής είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης αυτής. Να σχολιάσετε τη σχέση μεταξύ αυτής της περιόδου και της περιόδου περιστροφής ενός δορυφόρου πολύ κοντά στην επιφάνεια της γης. Εάν θεωρήσετε τώρα και τη συνεισφορά της περιστροφής της γης, να αποδείξετε ότι η κίνηση είναι και πάλι αρμονική αλλά με λίγο διαφορετική την περίοδο ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.226

Έστω ότι διαστημόπλοιο Β, μήκους ηρεμίας L, περνάει μπροστά από παρατηρητή Α. Τη στιγμή που περνάει η «πλώρη», ο Α και ο Β συντονίζουν τα ρολόγια και τις συντεταγμένες τους, δηλαδή $t_1^{\mathrm{A}} = t_1^{\mathrm{B}} = 0$, $x_1^{\mathrm{A}} = x_1^{\mathrm{B}} = 0$. Όταν περάσει η «πρύμνη», το ρολόι του Α δείχνει $t_2^{\mathrm{A}} = T$.
(α) Να βρεθεί η ταχύτητα $v = \beta c$ του διαστημοπλοίου ως συνάρτηση των παραμέτρων L, T, και c, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός.
(β) Τι θα δείχνει το ρολόι του Β, δηλαδή ποια είναι η τιμή του t_2^{B};
(γ) Ποιο είναι το μήκος του διαστημοπλοίου για τον παρατηρητή Α;

Πρόβλημα 10.227

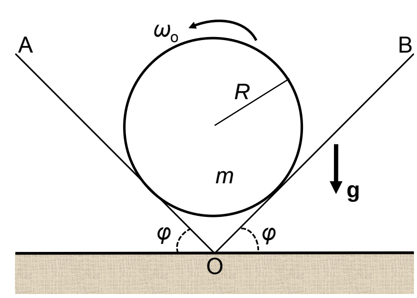
Ένα σώμα με μάζα m κινείται σε μια διάσταση (στον άξονα x) υπό την επίδραση μιας δύναμης

$$F(x) = -kx + k\frac{x^2}{a}, \quad \text{όπου} \quad k, a \quad \text{θετικές σταθερές.}$$

(α) Ποια είναι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $V(x)$ του σώματος; (Θεωρήστε $V(0) = 0$.)
(β) Να βρεθούν τα σημεία που το σώμα ισορροπεί, το είδος της ισορροπίας και να σχεδιαστεί πρόχειρα η $V(x)$.
(γ) Αν το σώμα ξεκινήσει από τη θέση $x = -a$ με μηδενική αρχική ταχύτητα, υπολογίστε με πόση ταχύτητα θα περάσει από τη θέση που η δυναμική ενέργεια $V(x)$ είναι μέγιστη για $x \geq 0$.
(δ) Αν το σώμα αρχικά βρεθεί στη θέση $x = 0$ με μηδενική αρχική ταχύτητα και μετατοπιστεί κατά μια μικρή απόσταση να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.228

Σε κοίλο κύλινδρο με λεπτά τοιχώματα, μάζας m και ακτίνας R δίνουμε αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_{o} και τον τοποθετούμε στη γωνία $\mathrm{A\hat{O}B}$. Ξέρουμε ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ κάθε επιφάνειας της γωνίας και του κυλίνδρου είναι μ και ότι $\phi = \pi/4$. Θεωρήστε ότι κατά τη διάρκεια της περιστροφής του ο κύλινδρος εφάπτεται συνεχώς και στις δυο επιφάνειες της γωνίας μετά την τοποθέτησή του πάνω στη γωνία, δηλαδή το κέντρο μάζας του παραμένει σταθερό.



(α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις τριβής (ως συνάρτηση των μεγεθών μ, m, g) στα σημεία επαφής του κυλίνδρου με τη γωνία. (g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας).

(β) Υπολογίστε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει ο κύλινδρος.

(γ) Υπολογίστε τη γωνία περιστροφής του κυλίνδρου μέχρι να σταματήσει. Σε πόσες περιστροφές αντιστοιχεί η γωνία αυτή;

Πρόβλημα 10.229

Υποθέστε ότι το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου που οφείλεται σε ένα υλικό σημείο (σωμάτιο) μάζας M σε απόσταση από το σωμάτιο r δίνεται από τη σχέση

$$\Phi(r) = -K\frac{M}{r^{1+a}}$$

Για ένα λεπτό σφαιρικό φλοιό με ομοιόμορφη κατανομή μάζας και ακτίνας R, βρείτε το δυναμικό για $r \leq R$ και $r > R$. Χωρίς κατ' ανάγκη να κάνετε πολύπλοκους υπολογισμούς, να δείξετε ότι το βαρυτικό πεδίο g δεν είναι μηδέν στο εσωτερικό του φλοιού αλλά μόνο αν $a = 0$. Αυτά ισχύουν και για το ηλεκτροστατικό πεδίο.

Πρόβλημα 10.230

Σημειακή μάζα m κινείται στο επίπεδο xy. Η δυναμική της ενέργεια είναι $U(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$, όπου α και β θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί η δύναμη $\boldsymbol{F}(x, y)$ που ασκείται πάνω στη μάζα m.

(β) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται από τα α και β για να είναι η δύναμη κεντρική με κέντρο το σημείο $(0, 0)$.

(γ) Αν το σώμα κρατηθεί ακίνητο στη θέση $y = 0$, $x = x_0$ και αφεθεί ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t = 0$, να βρεθεί η θέση $\boldsymbol{r}(t)$ του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου, η ταχύτητά του $\boldsymbol{v}(t)$, η κινητική του ενέργεια K και η ολική του ενέργεια E.

Πρόβλημα 10.231

Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από την αρχή των αξόνων O έτσι ώστε να κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο xy. Η σφαίρα έχει αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα x. Κατά την κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση από την ατμόσφαιρα ίση με $-b\boldsymbol{v}$, όπου $\boldsymbol{v}$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά. Κατά την κίνηση της σφαίρας,

(α) Βρείτε τις συνιστώσες $v_x(t)$ και $v_y(t)$ της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας συναρτήσει του χρόνου.

Πρόβλημα 10.232

Ένα σώμα με μάζα $m = 0,5$ Kg κινείται κατά τον άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια είναι $U(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3$, $(-\infty < x < +\infty)$ σε J όταν το x είναι σε m.

(α) Υπολογίστε τη δύναμη $F(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα. Με αναφορά στο σημείο O, πού είναι ελκτική και πού απωστική η δύναμη αυτή;

(β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(x)$ και βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος. Τι είδους ισορροπία έχουμε στο κάθε σημείο ισορροπίας;

(γ) Το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 2$ m με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v} = -2\hat{\boldsymbol{x}}$ m/s. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνησή του. Βρείτε την ταχύτητά του στα σημεία ισορροπίας.

Πρόβλημα 10.233

Μια λεπτή μη ομογενής ράβδος μήκους L έχει γραμμική πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα μήκους) $\lambda(x) = ax$, όπου a μια θετική σταθερά και x η απόσταση από το ένα άκρο της ράβδου, το O.

(α) Δείξτε ότι η ολική μάζα της ράβδου είναι ίση με $M = \frac{1}{2}aL^2$. Επίσης ότι το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται σε απόσταση $x_{\text{KM}} = \frac{2}{3}L$ από το σημείο O.

(β) Δείξετε ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν στο άκρο της O είναι $I_0 = \frac{1}{2}ML^2$.

(γ) Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης της ράβδου για περιστροφική κίνηση γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο σε αυτήν στο άκρο της O, συναρτήσει της γωνίας περιστροφής θ που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με την κατακόρυφη.

(δ) Βρείτε τη γωνιακή συχνότητα ω για ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω απο οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο στο άκρο της O.

Πρόβλημα 10.234

Δύο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι

$$\boldsymbol{r}_1(t) = (3t^2 + 2t - 15)\hat{\boldsymbol{x}} + (2t + 12)\hat{\boldsymbol{y}}$$

και

$$\boldsymbol{r}_2(t) = (45 + 20t - 3t^2)\hat{\boldsymbol{x}} + (3t + 7)\hat{\boldsymbol{y}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουστούν και να βρείτε πότε θα γίνει αυτό.

(β) Διατηρείται η ορμή του συστήματος;

(γ) Αμέσως μετά την κρούση τα σωματίδια φεύγουν με ταχύτητες $\boldsymbol{v}'_1$ και $\boldsymbol{v}'_2$. Αν $\boldsymbol{v}'_1 = 10\hat{\boldsymbol{x}}$, να βρείτε την ταχύτητα του δεύτερου σωματιδίου $\boldsymbol{v}'_2$, καθώς και την κατοπινή θέση του κάθε σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

Πρόβλημα 10.235

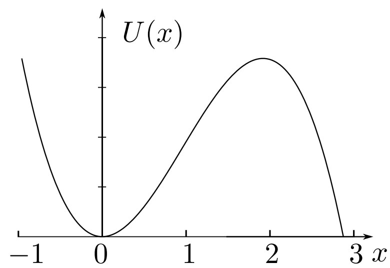
Ένα σώμα με μάζα m εκτελεί ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση. Η δύναμη αντίστασης είναι $\boldsymbol{F} = -bv^{3/2}\boldsymbol{x}$, όπου b θετική σταθερά και v το μέτρο της ταχύτητας. Αν για $t = 0$, $v(t = 0) = v_0$,

(α) να βρεθούν η ταχύτητα και η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

(β) Πόσος χρόνος απαιτείται για να αποκτήσει το σώμα το ένα τέταρτο της αρχικής του ταχύτητας; Πόση απόσταση θα έχει διανύσει;

(γ) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει. Πόσος είναι ο ολικός χρόνος που θα διαρκέσει η κίνηση;

Δίνεται $\int \mathrm{d}t/(\alpha + \beta t)^2 = -1/[\beta(\alpha + \beta t)] + c$



Πρόβλημα 10.236

Ένα σώμα με μάζα $m = 1$ Kg κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δυναμικής ενέργειας $U(x) = [Ax^2 - Bx^3]$, η οποία δίνεται στο σχήμα. A και B είναι σταθερές με τιμές $A = 3$ kg/s^2 και $B = 1$ kg/(ms^2).

(α) Να βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα καθώς και τα σημεία ισορροπίας του. Να κάνετε μια γραφική παράσταση της δύναμης.

(β) Το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 1$ m με αρχική ταχύτητα $v = -1\hat{\boldsymbol{x}}$ m/s. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος. Να βρείτε το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος και τη θέση στην οποία ισχύει αυτό.

Πρόβλημα 10.237

Ένα άδειο βαρέλι με ολική μάζα M και ακτίνα R κυλά προς τα κάτω, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο που βρίσκεται σε γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Το βαρέλι αποτελείται από έναν κυλινδρικό φλοιό με μάζα M_1 και ακτίνα R και από δύο κυκλικά καπάκια, το καθένα από τα οποία έχει μάζα m και ακτίνα R. Να δείξετε ότι για να κυλίσει το βαρέλι προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει ισχύει $\mu \geq \tan\theta/[1 + M/(M_1 + m)]$. Η ροπή αδρανείας λεπτού κυκλικού δίσκου με μάζα m και ακτίνα r ως προς άξονα κάθετο στο δίσκο που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι $1/2mr^2$.

Πρόβλημα 10.238

Σωμάτιο μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x σε περιοχή με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = A(x^2 - x_0^2)^2$, όπου α θετική σταθερά.

(α) Προσδιορίστε τις διαστάσεις της σταθεράς A, τον αριθμό και το είδος των σημείων ισορροπίας του σωματιδίου, κατά μήκος του άξονα x και σχεδιάστε κατ' εκτίμηση τη μορφή της δυναμικής ενέργειας ως συνάρτηση του x.

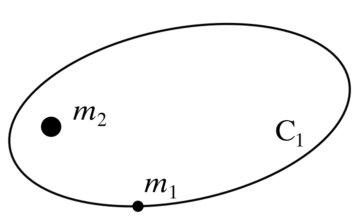
(β) Αν τοποθετήσουμε το σωμάτιο στο σημείο $x = x_0$ και του προσδώσουμε κινητική ενέργεια K, δείξτε ότι το σωμάτιο, ανεξάρτητα από την τιμή της K, θα εκτελέσει γενικά περιοδική κίνηση, και υπολογίστε τη γενική σχέση που δίνει την περίοδο της κίνησης.

(γ) Προσδιορίστε το είδος της περιοδικής κίνησης και τις βασικές σταθερές της (όρια της περιοχής κίνησης και περίοδο) όταν η κινητική του ενέργεια είναι $K = K_0 \ll Ax_0^4$.

(δ) Δείξτε ότι, αν τοποθετήσουμε το σωμάτιο στην περιοχή του σημείου $x = x_0\sqrt{2}$, με μηδενική κινητική ενέργεια, το σωμάτιο κινείται είτε με μια συγκεκριμένη περίοδο T_1 είτε με περίοδο $T_2 = 2T_1$ ανάλογα με το αν ξεκινά ακριβώς πριν ή ακριβώς μετά από $x = x_0\sqrt{2}$.

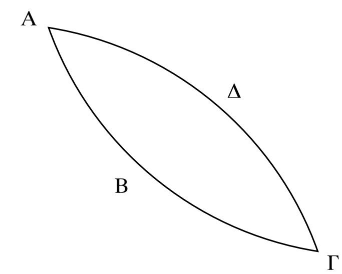
Πρόβλημα 10.239

(α) Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματίων συνολικής μάζας M κινείται με ταχύτητα V ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς K. Αν E είναι η κινητική ενέργεια των σωματίων ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια ως προς K.



(β) Τα σωμάτια m_1, m_2 αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και C_1 είναι η καμπύλη που διαγράφει το m_1 στο σύστημα κέντρου μάζας. Αν οι θέσεις των δύο σωματίων, όπως φαίνονται στο σχήμα, αποτελούν στιγμιότυπο της κίνησης και $m_2 = 2m_1$ να σχεδιαστεί η καμπύλη C_2 που διαγράφει το m_2 στο ίδιο σύστημα (Περιγράψτε με λίγα λόγια τον αλγόριθμο κατασκευής της C_2).

Πρόβλημα 10.240



Οι καμπύλες ΑΒΓ και ΑΔΓ στο σχήμα είναι τόξα κύκλων ίδιας ακτίνας. Υποθέστε ότι ένα πολύ μικρό σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική ταχύτητα στο σημείο Α ώστε να κινηθεί τη μία φορά κατά μήκος του ΑΒΓ και την άλλη κατά μήκος του ΑΔΓ. Πότε έχει μεγαλύτερη ταχύτητα στο Γ και γιατί; Και στις δύο περιπτώσεις υπαρχει ο ίδιος συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Πρόβλημα 10.241

Σταγόνα βροχής πέφτει κατακόρυφα μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Η αρχική της μάζα είναι αμελητέα και η ταχύτητα είναι μηδέν. Καθώς πέφτει μεσα σε σύννεφο, σταγονίδια κολλούν πάνω της και η μάζα της αυξάνεται γραμμικά με την απόσταση που διανύει. Τα σταγονίδια του σύννεφου θεωρούνται ακίνητα (μέχρι τη στιγμή της συγκόλλησης στη σταγόνα). Δεν υπάρχουν άλλα φαινόμενα τριβής κατά την πτώση της σταγόνας.

(α) Βρείτε τη (διαφορική) εξίσωση της κίνησης της σταγόνας. Προσπαθήστε να είστε σαφείς στην εφαρμογή του νόμου της δυναμικής του Νεύτωνα διαλέγοντας κατάλληλα το σύστημα μάζας στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη.

(β) Δεχτείτε ότι η ταχύτητα της σταγόνας είναι ανάλογη του χρόνου από την εκκίνησή της και βρείτε την επιτάχυνσή της.

(γ) Λογαριάστε το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας επί της σταγόνας από την εκκίνησή της μέχρι τη στιγμή t. Λογαριάστε την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής της ενέργειας. Δικαιολογήστε την απώλεια ενέργειας αναφερόμενοι στον τρόπο αύξησης της μάζας της σταγόνας.

Πρόβλημα 10.242

Δύο σημειακές μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ συνδέονται με ομογενή ράβδο μάζας $m_3 = m/10$ και μήκους L. Το σύστημα ακινητεί πάνω σε οριζόντιο λείο τραπέζι, όταν τρίτη σημειακή μάζα $m_4 = m$ έρχεται με οριζόντια ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ κάθετη στη ράβδο και σφηνώνεται στη μάζα m_1. Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος μετά την κρούση, υπολογίζοντας την ταχύτητα του κέντρου μάζας και τη γωνιακή ταχύτητα.

[Θεωρήστε ότι η κρούση-ενσωμάτωση των μαζών $m_1 - m_4$ γίνεται στιγμιαία].

Πρόβλημα 10.243

(α) Σωμάτια μαζών m_1 και m_2 με αρχικές θέσεις (τη χρονική στιγμή $t = 0$) bmr_{01} και $\boldsymbol{r}_{02}$ κινούνται με σταθερές ταχύτητες $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$, αντίστοιχα. Διατυπώστε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα τέσσερα ανωτέρω ανύσματα, ώστε τα σωμάτια να συγκρουσθούν και, σε αυτή την περίπτωση, υπολογίστε τη χρονική στιγμή που θα συμβεί αυτό.
(β) Τρεις σημειακές μάζες m_1, m_2, m_3 αλληλεπιδρούν μέσω βαρυτικών δυνάμεων

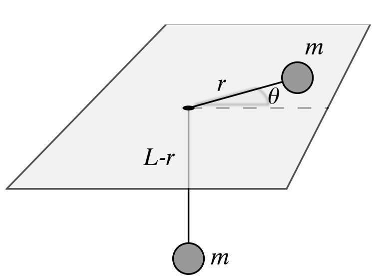
(i) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης

(ii) Θεωρήστε ότι οι τρεις μάζες μπορούν να κινούνται επί του επιπέδου που ορίζουν, έτσι ώστε οι αποστάσεις μεταξύ τους, ανά δύο, να είναι σταθερές και ίσες με D. Γράφοντας τις εξισώσεις κίνησης στο σύστημα κέντρου μάζας, δείξτε ότι το σύστημα των τριών μαζών περιστρέφεται και υπολογίστε τη συχνότητα περιστροφής. Δίνεται η σταθερά παγκόσμιας έλξης G.

Πρόβλημα 10.244

(α) Δείξτε ότι για μια επιφανειακή κατανομή μάζας που εκτείνεται στο επίπεδο (x, y), ισχύει $I_x + I_y = I_z$ (θεώρημα καθέτων αξόνων), όπου I_x, I_y, I_z οι ροπές αδράνειας περί τους άξονες x, y, z.
(β) Δείξτε, με επιχειρήματα συμμετρίας, (χωρίς λεπτομερή υπολογισμό) ότι η ροπή αδρανείας μιας λεπτής μεταλλικής πλάκας σχήματος τετραγώνου, ως προς οποιοδήποτε άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο της πλάκας και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού του άξονα.
(γ) Η στροφορμή ενός σωματιδίου, ως προς ένα σημείο Ο, δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t^2$, όπου $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ σταθερά διανύσματα κάθετα μεταξύ τους. Να υπολογισθεί, συναρτήσει των $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$, η ροπή $\boldsymbol{N}$ της δύναμης που ασκείται στο σώμα, ως προς το ίδιο σημείο Ο, τη χρονική στιγμή που τα δύο ανύσματα $\boldsymbol{L}$ και $\boldsymbol{N}$ σχηματίζουν γωνία $45°$.

Πρόβλημα 10.245



Δύο σωμάτια μάζας m είναι συνδεδεμένα με μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας και μήκους L. Το ένα σωμάτιο βρίσκεται σε οριζόντιο λείο τραπέζι, το οποίο έχει στο κέντρο του μια οπή. Το νήμα διέρχεται από την οπή έτσι ώστε το δεύτερο σωμάτιο να κρέμεται κατακόρυφα κάτω από την οπή. Θεωρήστε ως αρχή του συστήματος αναφοράς την οπή και περιγράψτε τη θέση του σωματίου στο τραπέζι με επίπεδες πολικές συντεταγμένες (r, θ), όπως στο διπλανό σχήμα.

(α) Εκφράστε τη στροφορμή του σωματιδίου ως προς την αρχή, συναρτήσει των r και $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$.

(β) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή είναι σταθερή.

(γ) Εκφράστε το άθροισμα των ενεργειών των δύο μαζών συναρτήσει των r, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ και $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$.

(δ) Δείξτε ότι $\left(\frac{r}{t}\right)^2 = a - \frac{b}{r^2} - gr$, όπου a, b σταθερές και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

(ε) Αν αρχικώς, το σωμάτιο στο τραπέζι απέχει απόσταση $L/2$ από την αρχή και κινείται με ταχύτητα v_0, κάθετα στο νήμα, υπολογίστε μια σχέση για το $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)^2$ όταν $r = L$.

(στ) Από την τελευταία σχέση υπολογίστε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε το σωμάτιο που βρίσκεται κάτω απο το τραπέζι να μη φτάσει πότε σε αυτό.

Πρόβλημα 10.246

Μια σιδηροδρομική μηχανή με μάζα m κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{u}_0$ κατά μήκος οριζόντιας διαδρομής. Εάν οι δυνάμεις τριβής είναι της μορφής $a + bu^2$, με a και b θετικές σταθερές και $\boldsymbol{u}$ στιγμιαία ταχύτητα, πόσο χρόνο χρειάζεται, από τη στιγμή που θα σβήσει ο κινητήρας, για να σταματήσει; Δίνεται

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right) \text{ για } 4ac - b^2 > 0$$

Πρόβλημα 10.247

Το δυναμικό Lennard-Jones χαρακτηρίζει τα διατομικά μόρια και είναι της μορφής

$$U(\boldsymbol{r}) = -\frac{b}{r^6} + \frac{a}{r^{12}}$$

όπου $a, b > 0$ και r η απόσταση των κέντρων των ατόμων.

(α) Υπολογίστε τη δύναμη μεταξύ των ατόμων. Εξετάστε αν η δύναμη αυτή είναι κεντρική, διατηρητική, ελκτική ή απωστική.

(β) Σε ποια απόσταση τα άτομα βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας και τι είδος ισορροπίας είναι αυτή;

(γ) Πόση ενέργεια χρειάζεται για να διασπαστεί το μόριο;

Πρόβλημα 10.248

Τα διανύσματα θέσης δύο σωματιδίων με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$ στο εργαστηριακό σύστημα είναι:

$$\boldsymbol{r}_1(t) = ut\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{r}_2(t) = -ut(\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}),$$

όπου $m = 0.5$ Kg, $u = 1$ m/s και $\theta = 60°$.

(α) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{R}_{\text{KM}}$ και την ταχύτητα $\boldsymbol{V}_{\text{KM}}$ του κέντρου μάζας του συστήματος αυτού.

(β) Να υπολογίσετε την ολική (κινητική) ενέργεια του συστήματος των μαζών ως προς το εργαστηριακό σύστημα και το σύστημα κέντρου μάζας.

(γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια του κέντρου μάζας. Πώς συνδέονται τα αποτελέσματα του (β) με τα αποτελέσματα του (γ);

Πρόβλημα 10.249

Η εξίσωση κίνησης για μάζα m, η οποία αφήνεται από την επιφάνεια της γης να κινηθεί σε σήραγγα που διέρχεται από το κέντρο της γης είναι:

$$\ddot{r} + a^2 r = 0 \quad \text{με } a^2 = G\frac{m_E}{r_E^3}$$

(α) Να βρείτε μια λύση της εξίσωσης αυτής.
(β) Σύμφωνα με τη λύση που βρήκατε, ποια είναι η χρονική διάρκεια της ελεύθερης πτώσης μέσω της γης;

Πρόβλημα 10.250

Μοτοσικλέτα μάζας m κινούμενη στην ύπαιθρο με ταχύτητα v_0 πέφτει πάνω σε σωρό με άχυρο, πάχους d και το διαπερνά. Αν η δύναμη τριβής μέσα στο σωρό είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $(-kv^2)$ (και θεωρήσουμε ότι η μηχανή έσβησε μόλις μπήκε στα άχυρα), να υπολογισθούν:

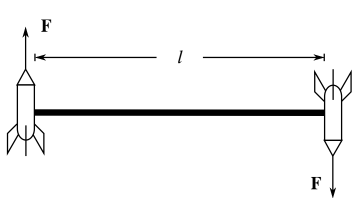
(α) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση του χρόνου

(β) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση της απόστασης x που διανύει μέσα στο άχυρο και

(γ) ο χρόνος που χρειάζεται η μοτοσικλέτα να περάσει από το σωρό.

(Ευτυχώς, ο μοτοσικλετιστής πέρασε σώος και αβλαβής).

Πρόβλημα 10.251



Θεωρήστε ότι στο διάστημα, μακριά από κάθε βαρυτική επίδραση, ηρεμεί ένα σύστημα από δύο ρουκέτες με μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$, συνδεδεμένες με μια αβαρή ράβδο μήκους l. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι ρουκέτες μπαίνουν σε λειτουργία και δημιουργούν η κάθε μια δύναμη ώθησης $\boldsymbol{F}$, κάθετη στη ράβδο και σε αντίθετες κατευθύνσεις για χρονικό διάστημα T.

(α) Βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας (ΚΜ) του συστήματος καθώς και τη ροπή αδράνειας ως προς το ΚΜ,

(β) βρείτε την ταχύτητα του ΚΜ,

(γ) περιγράψτε την κίνηση που θα εκτελέσει το σύστημα και

(δ) υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τη χρονική στιγμή T.

Πρόβλημα 10.252

Σώμα μάζας m κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δύναμης που του προσδίδει δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη συνάρτηση $U(x) = 2x(x-2)$, $-\infty \le x \le 2$ και $U(x) = 0$, $x > 2$.

(α) Σχεδιάστε πρόχειρα τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας,

(β) βρείτε τα σημεία ισορροπίας και διευκρινήστε το είδος της.

(γ) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.

(δ) Ποια ταχύτητα πρέπει να έχει το σώμα στη θέση $x = 1$ για να φτάσει στο $x = 2$ με μηδενική ταχύτητα;

(ε) Αν το σώμα έχει ολική ενέργεια $E_{\text{ολ}} = 2$, βρείτε τα όρια της κίνησής του.

(στ) Το ίδιο για την περίπτωση $E_{\text{ολ}} = 1$

(ζ) Αποδείξτε ότι αν το σώμα μετατοπιστεί λίγο από τη θέση ισορροπίας θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από αυτήν και υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.253

Οι παρατηρητές O και O' βρίσκονται σε σχετική μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $v = 0.6c$. Θεωρούμε ότι όταν οι δύο παρατηρητές συμπίπτουν έχουν $t = t' = 0$. Όταν έχουν περάσει 5 έτη, *σύμφωνα με τον O*, ο O εκπέμπει ένα φωτεινό σήμα. Αυτό το θεωρούμε ως *Γεγονός 1*.

(α) Γράψτε τη θέση και το χρόνο αυτού του γεγονότος για τον O και για τον O$'$. Θεωρούμε *γεγονός 2* τη λήψη του φωτεινού σήματος από τον O$'$.

(β) Γράψτε τη θέση και το χρόνο αυτού του γεγονότος για τον O και τον O$'$.

Πρόβλημα 10.254

Σώμα μάζας $m = 1$ μπορεί να κινείται κατά μήκος του άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια δίνεται (σε μονάδες S.I) από τις σχέσεις:

$$U(x) = x^2(1 - x^2) \text{ για } -1 \leq x \leq 1$$
$$U(x) = 0 \text{ για } x < 1 \quad \text{και} \quad x > 1$$

α) Σχεδιάστε πρόχειρα τη συνάρτηση $U(x)$.

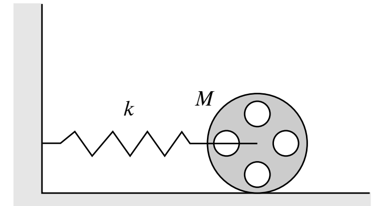
(β) Βρείτε τη δύναμη $F(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα. Πού βρίσκονται τα σημεία ισορροπίας του σώματος και τί είδους ισορροπία έχουμε στο καθένα;

(γ) Πόση κινητική ενέργεια πρέπει να δοθεί στο σώμα στο σημείο $x = -1/2$ για να μπορέσει να διαφύγει στο άπειρο;

(δ) Δείξτε ότι αν το σώμα μετατοπιστεί κατά μια πολύ μικρή απόσταση από το σημείο $x = 0$ και αφεθεί ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και βρείτε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.255

Κύλινδρος ακτίνας R φέρει τέσσερις διαμήκεις κυλινδρικές τρύπες ακτίνας $R/4$, παράλληλα στον άξονά του και έχει μάζα M. Τα κέντρα των τρυπών απέχουν αποστάσεις $R/2$ από τον άξονα του κυλίνδρου και είναι διατεταγμένα σταυροειδώς συμμετρικά, όπως στο σχήμα. Ο κύλινδρος βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο επί του οποίου μπορεί να κυλάει χωρίς ολίσθηση και είναι συνδεδεμένος σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά k.



(α) Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου (που φέρει τις κυλινδρικές τρύπες)

(β) Δείξτε ότι αν ο κύλινδρος απομακρυνθεί λίγο από την κατάσταση ισορροπίας, θα αρχίσει να ταλαντώνεται αρμονικά (γ) Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης (ροπή αδρανείας συμπαγούς κυλίνδρου περί τον άξονά του: $I = (MR^2)/2$)

(δ) Πόση είναι η μέγιστη αρχική απομάκρυνση, πέραν της οποίας ο κύλινδρος αρχίζει να ολισθαίνει;

Πρόβλημα 10.256

Δύο σωματίδια A και B δημιουργούνται σε έναν επιταχυντή υψηλών ενεργειών και κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Η ταχύτητα του σωματιδίου A, μετρούμενη στο σύστημα εργαστηρίου, είναι $0.8c$, ενώ η ταχύτητα του σωματιδίου B ως προς το A είναι $0.9c$.

(α) Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου B ως προς το σύστημα εργαστηρίου;

(β) Αν το σωματίδιο B έχει χρόνο (ημι)ζωής, στο δικό του σύστημα αναφοράς, ίσο με 10 ns, πόσο διάστημα θα διανύσει στο εργαστήριο πριν εξαφανιστεί;

Πρόβλημα 10.257

Τη στιγμή $t = 0$ μια δύναμη μέτρου $F = a\sqrt{t}$ (όπου a γνωστή θετική σταθερά) αρχίζει να εφαρμόζεται υπό σταθερή γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο πάνω σε πλοιάριο μάζας m που ακινητεί σε λεία οριζόντια επιφάνεια λίμνης (οι τριβές να θεωρηθούν αμελητέες). Να υπολογιστούν:

(α) η ταχύτητα του πλοιαρίου τη στιγμή που εγκαταλείπει την οριζόντια επιφάνεια της λίμνης και

(β) η απόσταση που καλύπτει το πλοιάριο μέχρι εκείνη τη στιγμή.

Πρόβλημα 10.258

Πλοίο κινείται επιβραδυνόμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, έτσι ώστε κάθε στιγμή η επικαμπύλια και η κεντρομόλος επιτάχυνση να έχουν το ίδιο μέτρο. Για $t = 0$, η αρχική ταχύτητα του πλοίου είναι u_0. Να υπολογισθεί:

(α) η ταχύτητα του πλοίου ως συνάρτηση του χρόνου και του διαστήματος που διήνυσε και

(β) η ολική επιτάχυνση του πλοίου ως συνάρτηση του χρόνου και του διαστήματος που διήνυσε.

Πρόβλημα 10.259

Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{F} = (y + 2az)\hat{\boldsymbol{x}} + (2ax + z)\hat{\boldsymbol{y}} + (x + 2ay)\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \text{όπου } a \text{ άγνωστη σταθερά.}$$

(α) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς a, έτσι ώστε η δύναμη $\boldsymbol{F}$ να είναι διατηρητική.

(β) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια U του πεδίου, θεωρώντας ότι $U(0, 1, 2) = 3\,\mathrm{J}$.

Πρόβλημα 10.260

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια μιας λίμνης (πολύ μεγάλου βάθους) και στη συνέχεια βυθίζεται κατακόρυφα προς τον πυθμένα της λίμνης. Στο σώμα ασκείται το βάρος του $\boldsymbol{B} = mg\hat{\boldsymbol{z}}$, η άνωση $\boldsymbol{A} = -A\hat{\boldsymbol{z}}$ και μια δύναμη αντίστασης $\boldsymbol{F} = -\gamma\boldsymbol{u}$, όπου γ είναι μια σταθερά και $\boldsymbol{u}$ η ταχύτητα του σώματος. Υποθέτουμε ότι $A < mg$.

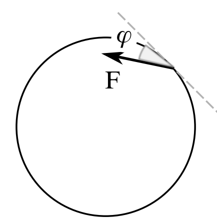
(α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου t

(β) Να βρείτε τη θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου t

(γ) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος και το έργο του βάρους B, στο όριο όπου $\mathrm{e}^{-\gamma t/m} \ll 1$ και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα σχετικά με την αρχή διατήρησης της ολικής ενέργειας.

Πρόβλημα 10.261

Η κινητική ενέργεια σωματιδίου μάζας m, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιάς ακτίνας R (εκτελώντας κυκλικά επιταχυνόμενη κίνηση) δίνεται από τη σχέση: $K = ks^3$, όπου s είναι η διαδρομή που διανύει το σώμα και k γνωστή θετική σταθερά. Να προσδιορισθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα ως συνάρτηση του διαστήματος s, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (μέτρο της F και υπολογισμός της γωνίας ϕ).



Πρόβλημα 10.262

Κυκλικός δακτύλιος μάζας m και ακτίνας R έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q σταθερά προσδεμένο πάνω του. Ο δακτύλιος μπορεί να κινείται ελεύθερα γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, σε κάθε σημείο του δακτυλίου υπαρχει ηλεκτρικό πεδίο μέτρου E_0 εφαπτομενικό του δακτυλίου. Το μέτρο του πεδίου αυτού μειώνεται με το χρόνο $E(t) = E_0 \exp(-kt)$, παραμένοντας εφαπτομενικό.

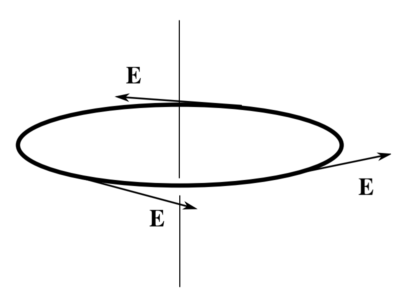
(α) Βρείτε τη στοιχειώδη δύναμη (ως συνάρτηση του χρόνου) που ασκείται στο στοιχειώδες φορτίο, σε τυχαίο σημείο του δατκυλίου, από το πεδίο.

(β) Βρείτε τη στοιχειώδη ροπή, ως προς τον άξονα, που ασκείται στο στοιχειώδες φορτίο (ως συνάρτηση του χρόνου)

(γ) Βρείτε τη συνολική ροπή που ασκείται στο δακτύλιο (ως συνάρτηση του χρόνου).

(δ) Βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση που θα αναπτύξει ο δακτύλιος (ως συνάρτηση του χρόνου) και

(ε) Βρείτε την τελική (ύστερα από μεγάλο χρονικό διάστημα) γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο δακτύλιος.



Πρόβλημα 10.263

Σωματίδιο μάζας $m = 1$ Kg έχει δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη συνάρτηση $V(x) = -2x^3 + x^2 + x$ (μονοδιάστατο πρόβλημα).

(α) Σχεδιάστε την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας (β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος, χαρακτηρίζοντας το είδος της ισορροπίας

(γ) Βρείτε τη δύναμη ως συνάρτηση του x.

(δ) Αν το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = 0$, δίχως κινητική ενέργεια, πόση ενέργεια πρέπει να του προσδώσουμε για να φύγει στο άπειρο και

(ε) Μικρή μετατόπιση του σώματος γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας σε τι κίνηση αντιστοιχεί; Προσδιορίστε το χαρακτηριστικό μέγεθός της.

Πρόβλημα 10.264

Η (μέση) διάρκεια ζωής ενός σωματιδίου, όντας ακίνητο, είναι 6 min. Αν το σωματίδιο αυτό δημιουργείται στον Ήλιο, ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει, κατευθυνόμενο προς τη Γη, για να τη φτάσει πριν διασπαστεί. Η απόσταση Ήλιου-Γης είναι $c \cdot 8$ min (όπου c η ταχύτητα του φωτός). Διαστημόπλοιο με κατεύθυνση από τη Γη στον Ήλιο και με ταχύτητα $c/3$ προσπερνά το σωματίδιο. Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς το διαστημόπλοιο;

Πρόβλημα 10.265

(α) Οι τρεις νόμοι του Νεύτωνα ορίζουν θεμελιώδεις έννοιες και φυσικές ποσότητες, όπως τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τη μάζα και τη δύναμη, με το χώρο και το χρόνο δεδομένο. Ποια από αυτά ορίζει ο κάθε νόμος χωριστά; Δικαιολογήστε σύντομα την απάντησή σας.
(β) Σε ποιες περιπτώσεις κίνησης έχουμε «ελεύθερη πτώση»; Δώστε δύο τουλάχιστον παραδείγματα.
(γ) Ποια είναι η φυσική έννοια της καμπυλότητας και της ακτίνας καμπυλότητας μιας τροχιάς; Εκτός της ποιοτικής απάντησης θα θεωρηθεί δεκτή και αυτή με τους μαθηματικούς ορισμούς.

Πρόβλημα 10.266

Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου έχει την ακόλουθη εξάρτηση από το χρόνο: $\boldsymbol{r} = at^2\hat{\boldsymbol{x}} + bt^3\hat{\boldsymbol{y}}$, όπου a και b σταθερές. Να βρεθούν:

(α) η εξίσωση της τροχιάς $y = f(x)$

(β) η ταχύτητα $\boldsymbol{v}$, η επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$ καθώς και η δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο σωματίδιο (ως διανύσματα) καθώς και το μέτρο της δύναμης.

Πρόβλημα 10.267

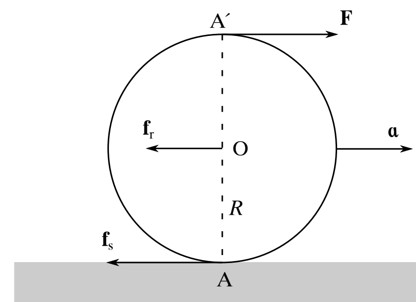
Ένα σωματίδιο μάζας m βρίσκεται σε ένα μονοδιάστατο πεδίο του οποίου η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση, $U(x) = k_1x^2 - k_2x$, όπου x η απόσταση και k_1, k_2 θετικές σταθερές.

(α) Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να πληρούν μεταξύ τους οι σταθερές k_1 και k_2 έτσι ώστε η ισορροπία να είναι ευσταθής.

(β) Για την περίπτωση που $k_1/k_2 = 3/2$, να σχεδιάσετε ποιοτικά την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας, να βρείτε τη δύναμη του πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης, το σημείο ισορροπίας του σωματιδίου και το είδος της ισορροπίας αυτής (ευσταθής ή ασταθης) με βάση την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Πρόβλημα 10.268

Στο ανώτατο σημείο (A$'$) του τροχού μάζας m ενός οχήματος με συνολική μάζα M, αρχικά σε ηρεμία, ασκούμε συνεχώς μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $\boldsymbol{F}$. Ο τροχός θεωρούμε ότι θα κυλήσει λόγω της δύναμης αυτής και ότι εκτός της στατικής τριβής $\boldsymbol{f}_s$, ασκείται στον άξονα του τροχού μια σταθερή δύναμη αντίστασης $\boldsymbol{f}_r$ (π.χ. λόγω τριβών κατά την κύλιση) όπως στο σχήμα.



(α) Να βρείτε το μέτρο της μεταφορικής και γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού.

(β) Ποια είναι η ελάχιστη F για να υπάρξει κίνηση και ποια θα ήταν αυτή αν η $\boldsymbol{F}$ ασκούταν στο O;

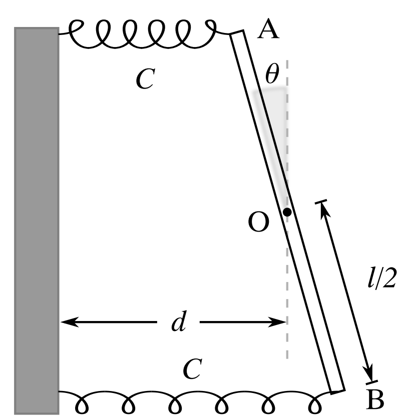
Θεωρήστε τον τροχό ως συμπαγή ομογενή κύλινδρο ακτίνας R και αμελήστε κάθε άλλη δύναμη τριβής του οχήματος. Επίσης, σημειώστε ότι η στατική τριβή δεν είναι η μέγιστη και επομένως αποτελεί άγνωστη (αλλά όχι ζητούμενη) μεταβλητή των εξισώσεων κίνησης του προβλήματος.

Πρόβλημα 10.269

Ένα διαστημόπλοιο μάζας m_0 κινείται με ταχύτητα v_0 όταν συναντά ένα ακίνητο νέφος αστρικής σκόνης πυκνότητας ρ. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης (ταχύτητα και θέση) του διαστημοπλοίου όσο κινείται μέσα στο νέφος, υποθέτοντας ότι η αστρική σκόνη προσκολλάται στη μετωπική επιφάνεια A του διαστημοπλοίου και ότι η επιφάνεια αυτή παραμένει συνεχώς σταθερή.

Πρόβλημα 10.270

Η γραμμική πυκνότητα μάζας ($\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}x$) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος ℓ αυξάνεται από την τιμή λ_0 στο ένα άκρο της (A) σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της (B) σύμφωνα με τη σχέση $\lambda(x) = \lambda_0(1 + x^2/\ell^2)$. Δύο όμοια ελατήρια σε οριζόντια διεύθυνση, με σταθερά ελατηρίου C, και φυσικού μήκους d, είναι συνδεδεμένα στα άκρα της ράβδου και σε σταθερό στήριγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της, O, και είναι κάθετος σε αυτήν καθώς και στα ελατήρια.



(α) Υπολογίστε το κέντρο μάζας της ράβδου.
(β) Υπολογίστε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο της.
(γ) Υπολογίστε τις δυνάμεις και τις ροπές ως προς το κέντρο O που ασκούνται στη ράβδο όταν μετατοπιστεί κατά μια μικρή γωνία θ.
(δ) Αν η ράβδος μετατοπιστεί κατά μια μικρή γωνία θ από την κατακόρυφο και

αφεθεί ελεύθερη, να δείξετε ότι εκτελεί απλή αρμονική κίνηση και να βρείτε την περίοδο της κίνησης.

Πρόβλημα 10.271

Δίνεται το μονοδιάστατο δυναμικό που περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$U(x) = k(x^2 - 1)^2$$

όπου k μια σταθερά.

(α) Να σχεδιάσετε προσεγγιστικά το δυναμικό.

(β) Να υπολογίσετε τη δύναμη σα συνάρτηση της θέσης που εξασκείται σε ένα σώμα μάζας m και οφείλεται σ' αυτό το δυναμικό, να σχεδιάσετε προσεγγιστικά τη μορφή της και να βρείτε τα σημεία ισορροπίας προσδιορίζοντας το είδος τους.

(γ) Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = 0$ και κάποια χρονική στιγμή προσδίδεται στο σώμα κινητική ενέργεια $E_k = 8k$. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.

(δ) Να δείξετε ότι για μικρές μετατοπίσεις από θέση ευσταθούς ισορροπίας το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Ποια είναι η περίοδος της ταλάντωσης;

Πρόβλημα 10.272

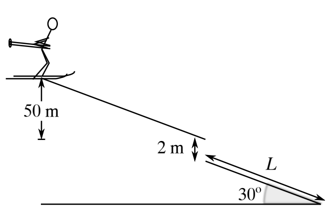
Δύο πρωτόνια έχουν ταχύτητα $0,95c$ το καθένα (όπου c η ταχύτητα του φωτός) και κινούνται έτσι ώστε το ένα να πλησιάζει το άλλο.

(α) Πόση είναι η ορμή του κάθε πρωτονίου στο σύστημα του εργαστηρίου και πόση η συνολική ορμή των δύο πρωτονίων;

(β) Πόση είναι η ορμή του ενός πρωτονίου όταν μετριέται από το σύστημα του άλλου;

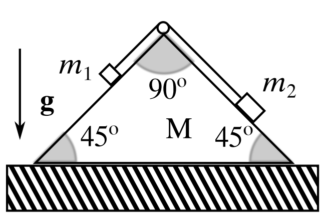
(γ) Τα πρωτόνια ταξιδεύουν μέσα στο σωλήνα ενός γραμμικού επιταχυντή που έχει μήκος 3 Km. Τι μήκος βλέπει το κάθε πρωτόνιο στο σύστημά του;

Πρόβλημα 10.273



Ένας σκιέρ ξεκινάει από ακινησία και κατεβαίνει μια πλαγιά που σχηματίζει γωνία $30°$ με το οριζόντιο επίπεδο. Όταν κατεβαίνει σε ύψος κατά 50 m, συναντά ένα μικρό χάσμα ύψους 2 m και κάνει άλμα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Σε ποια απόσταση L κατά μήκος της πλαγιάς θα συναντήσει πάλι το χιόνι;

Πρόβλημα 10.274



Δύο σημειακές μάζες m_1, m_2 είναι συνδεδεμένες με αβαρές νήμα μέσω αβαρούς τροχαλίας και βρίσκονται πάνω σε σφήνα μάζας M, που μπορεί να κινηθεί ελεύθερα πάνω σε οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο όλο σύστημα που είναι αρχικά ακίνητο δεν ασκούνται τριβές, αφήνεται δε να κινηθεί υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου. Για την περίπτωση $m_1 = m_2/2 = M/3$, υπολογίστε πόσο θα κινηθεί η σφήνα οριζόντια καθώς και την ταχύτητά της, αν τα δύο σώματα κινηθούν (σχετικά ως προς την πλάγια επιφάνεια της σφήνας) κατά L.

Πρόβλημα 10.275

(α) Βρείτε τη δύναμη, $\boldsymbol{F}$, που προσδιορίζεται από το διατηρητικό (συντηρητικό) δυναμικό πεδίο:

$$U(x, y, z) = k\left(y \sin z + x^2 \mathrm{e}^{-2y}\right)$$

όπου k είναι μια σταθερά.
(β) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στην περιοχή του δυναμικού πεδίου που ορίστηκε στο ερώτημα (α). Στο σωματίδιο ασκείται μια ακόμη δύναμη $\boldsymbol{f} = a\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}$, (όπου a είναι μια θετική σταθερά, $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου και $\boldsymbol{\Omega}$ μια σταθερά διανυσματική ποσότητα). Τη χρονική στιγμή t_a το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $\boldsymbol{r}_A = \hat{\boldsymbol{y}}$ και τη χρονική στιγμή t_B στο σημείο $\boldsymbol{r}_B = 2\hat{\boldsymbol{x}} + (7/5)\hat{\boldsymbol{z}}$. Υπολογίστε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου από το σημείο Α στο σημείο Β.

Πρόβλημα 10.276

Σώμα κινείται σε κύκλο ακτίνας R και η κινητική του ενέργεια είναι συνάρτηση του μήκους τόξου s που διαγράφει, $E_k = as^k$, $k \in \mathbb{R}$, όπου το a είναι μια θετική σταθερά. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα σαν συνάρτηση του s.

Πρόβλημα 10.277

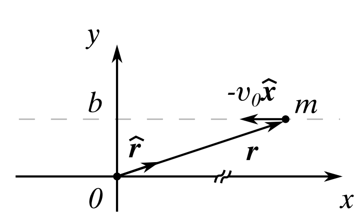
Παρατηρητής που βρίσκεται στον Ισημερινό εκτοξεύει κατακόρυφα προς τα πάνω (άξονας z, τον άξονα x θεωρήστε τον προς την ανατολή) αντικείμενο με αρχική ταχύτητα v_0. Θεωρώντας δεδομένη, σταθερή και ανεξάρτητη του ύψους την ενεργό επιτάχυνση της βαρύτητας $\boldsymbol{g}_{\text{εν}}$ στον τόπο, να γράψετε τις πλήρεις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σώματος κατά τους άξονες x, y, z για το μη αδρανειακό παρατηρητή που εκτόξευσε το σώμα.
Υπολογίστε τη θέση του σώματος στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του. Για τον υπολογισμό, θερήστε ότι το $|g_{\text{εν}}|$ είναι κατά πολύ μεγαλύτερο οποιουδήποτε όρου $|2\omega v_i|$ ($i = x, y, z$).
Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Πρόβλημα 10.278

Ιδανική αλυσίδα απείρου μήκους και γραμμικής πυκνότητας λ βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και στην αρχή του άξονα x (παράλληλος με το επίπεδο) όπου μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τίθεται σε κίνηση κάτω από τη δράση σταθερής δύναμης F που δρα στο άκρο της και προς τη θετική διεύθυνση του άξονα x. Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία θα κινείται η αλυσίδα.

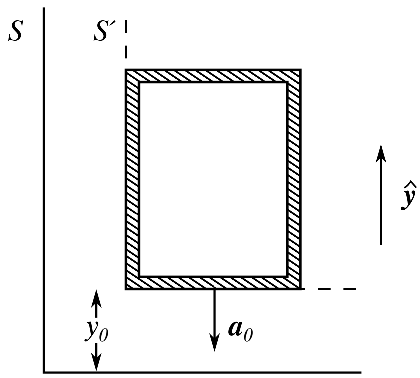
Πρόβλημα 10.279

Σώμα μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής και διατηρητικής δύναμης $\boldsymbol{F} = -(k/r^2)\hat{\boldsymbol{r}}$, όπου r η απόσταση του σώματος από το κέντρο Ο της δύναμης και αρχής των αξόνων και k θετική σταθερά. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται πολύ μακριά από το



O, στη θέση $(+\infty, b)$ (ώστε η δυναμική του ενέργεια να είναι μηδενική). Η ταχύτητά του στη θέση αυτή είναι $v_0\hat{\boldsymbol{x}}$, όπου $\hat{\boldsymbol{x}}$ το μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση του άξονα x στο σύστημα Oxy. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση $r_{\mu\iota\nu}$ από το σημείο O, στην οποία θα πλησιάσει το σωματίδιο.

Πρόβλημα 10.280



Ένα ασανσέρ κατεβαίνει με επιτάχυνση $\boldsymbol{a}_0 = -2\hat{\boldsymbol{y}}$ m/s^2 ως προς το έδαφος. Κάποια στιγμή, όταν $t = 0$, ένα σώμα εκτοξεύεται από το δάπεδο κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $5\hat{\boldsymbol{y}}$ m/s. Τη στιγμή εκείνη ($t = 0$) το δάπεδο βρίσκεται σε ύψος y_0 και η ταχύτητα του ασανσέρ είναι $-2\hat{\boldsymbol{y}}$ m/s. Η απόσταση από το δάπεδο έως την οροφή του ασανσέρ είναι 2 m.

(α) Να διατυπώσετε την εξίσωση κίνησης του σώματος στο σύστημα αναφοράς του ασανσέρ (S'). Σε ποιο ύψος από το δάπεδο θα φτάσει το σώμα και πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να καταλήξει στο δάπεδο;

(β) Να διατυπώσετε την εξίσωση κίνησης του σώματος για παρατηρητή ακίνητο στο έδαφος (S).

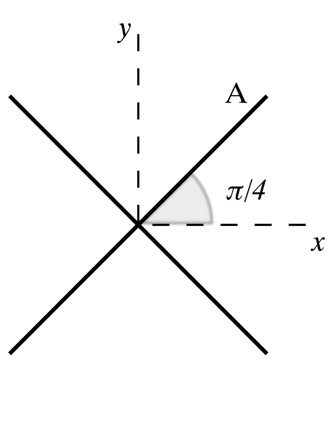
Πρόβλημα 10.281

Σε αγώνες καταδύσεων ένας αθλητής με μάζα m βουτάει στο νερό κατακόρυφα από βάθρο ύψους L με μηδενική αρχική ταχύτητα.

(α) Να βρείτε την ταχύτητα v_1 με την οποία θα φτάσει στην επιφάνεια του νερού.

(β) Θεωρήστε ότι η άνωση του νερού εξουδετερώνει το βάρος του αθλητή και ότι η μόνη δύναμη που ασκείται επάνω του είναι η δύναμη αντίστασης του νερού με μέτρο $F = -av^{5/2}$, όπου a είναι μια θετική σταθερά. Να βρείτε την ταχύτητα του αθλητή ως συνάρτηση του χρόνου μέσα στο νερό.

Πρόβλημα 10.282



Τέσσερις λεπτές ευθύγραμμες ράβδοι σχηματίζουν το $\times$ που δείχνει το σχήμα στο επίπεδο (x, y). Οι διαδοχικές γωνίες είναι $90°$. Η κάθε ράβδος έχει μήκος L και ομοιόμορφα κατανεμημένη μάζα M. Να βρείτε τη ροπή αδρανείας του σχηματισμού των ράβδων ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι

(α) κάθετος στο επίπεδο (x, y): $I_{z(K,M)}$ και

(β) στην κατεύθυνση του y: $I_{y(K,M)}$.

Να βρείτε τη ροπή αδράνειας του σχηματισμού των ράβδων ως προς άξονα που είναι

(γ) παράλληλος στον άξονα z και περνά από το σημείο A: $I_{z(A)}$ και

(δ) παράλληλος στον άξονα y και περνά από το σημείο A: $I_{y(A)}$.

Πρόβλημα 10.283

Δύο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \left(8 - 2t - 2t^2\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(t^2 - 2t\right)\hat{\boldsymbol{y}} + (2t+3)\hat{\boldsymbol{z}},$$
$$\boldsymbol{r}_2(t) = \left(2t^2 + 2t - 16\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(4 - t^2\right)\hat{\boldsymbol{y}} + (5t-3)\hat{\boldsymbol{z}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουστούν. Να βρείτε τη θέση και τη χρονική στιγμή της κρούσης.

(β) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ) Η κρούση των δύο μαζών είναι πλαστική. Σε ποια θέση θα βρίσκονται τα δύο (κολλημένα) σώματα 1 s μετά την κρούση;

Πρόβλημα 10.284

Ας παραδεχθούμε ότι ο νόμος του Νεύτωνα για την βαρύτητα δεν είναι απόλυτα ακριβής αλλά χρειάζεται μια μικρή διόρθωση στις πολύ μικρές επιταχύνσεις. Έτσι, ας γράψουμε την σχέση δύναμης επιτάχυνσης υπό την επίδραση βαρυτικού πεδίου ως

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = m\gamma f(\gamma/\gamma_0)$$

όπου $\gamma_0 = 1,2 \times 10^{-10}$ m/s^2 κάποια σταθερά πολύ μικρή ποσότητα και

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

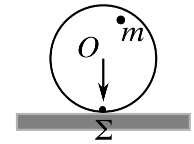
Με βάση αυτή τη νέα μορφή του νόμου του Νεύτωνα,

(α) υπολογίστε την ταχύτητα ενός αστεριού που βρίσκεται πολύ μακριά από το κέντρο έλξης ενός γαλαξία, ώστε να έχει πολύ μικρή επιτάχυνση

(β) συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με εκείνα που προκύπτουν από το νόμο του Νεύτωνα.

Πρόβλημα 10.285

Σώμα μάζας m εισέρχεται στο εσωτερικό κατακόρυφης κυκλικής στεφάνης ακτίνας R από το κατώτερο σημείο Σ με ταχύτητα v_0. Αν κινείται χωρίς τριβές, να υπολογίσετε σε ποια γωνία το σώμα εγκαταλείπει την στεφάνη αν, αφού διαγράψει τροχιά, περάσει από το κέντρο της στεφάνης Ο.



Πρόβλημα 10.286

Μια μπάλα μπιλιάρδου έχει μάζα M, ακτίνα R και βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο τραπέζι. Ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ μπάλας και τραπεζιού είναι μ. Μια στέκα μπιλιάρδου κτυπάει τη μπάλα έτσι ώστε το κέντρο μάζας της αποκτά αρχική οριζόντια ταχύτητα v_0. Η διεύθυνση της δύναμης που δημιουργεί την κίνηση της μπάλας περνάει από το κέντρο μάζας της. Θεωρώντας ότι δεν έχουμε τριβή κύλισης βρείτε:

(α) τη γωνιακή και τη γραμμική επιτάχυνση της μπάλας αμέσως μετά το κτύπημα

(β) το χρόνο και το διάστημα μέχρι η μπάλα να πάψει να ολισθαίνει και αποκτήσει καθαρή κύλιση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας $I_{\text{KM}} = 2MR^2/5$.

Πρόβλημα 10.287

Μια μηχανή επιταχύνει μάζα m κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής παράγοντας σταθερή ισχύ P. Αν η μάζα αρχίζει την κίνησή της από την ηρεμία, βρείτε τη διανυόμενη απόσταση σε χρόνο t.

Πρόβλημα 10.288

Η δυναμική ενέργεια σώματος μάζας $m = 1\,\text{Kg}$ που κινείται πάνω στον άξονα x δίνεται από τη συνάρτηση $V(x) = A\mathrm{e}^{-x/l}\cos(x/l)$, όπου $l = 1\,\text{m}$ και $A = 1\,\text{J}$.

(α) Βρείτε τη δύναμη $F(x)$ που δέχεται το σώμα σε τυχαία θέση x. Βρείτε επίσης τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας του σώματος.

(β) Σχεδιάστε προσεγγιστικά τη συνάρτηση $V(x)$ στο διάστημα από το $x_0 = 0$ έως το $x_\infty = +\infty$. Δείξτε πάνω στο σχήμα τουλάχιστον μία περιοχή για την οποία η δύναμη είναι ελκτική και μία περιοχή για την οποία η δύναμη είναι απωστική σε σχέση με το σημείο $x_0 = 0$.

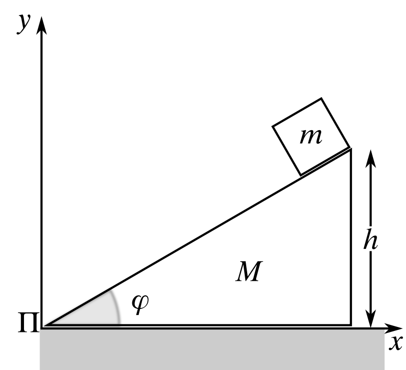
Πρόβλημα 10.289

(α) Σωματίδιο έχει ίδιο χρόνο ζωής $\tau = 3\,\text{s}$ (ο χρόνος που μεσολαβεί από την παραγωγή του σωματιδίου έως τη διάσπασή του σε σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το σωματίδιο είναι ακίνητο). Δύο παρατηρητές Π_1 και Π_2 κινούνται με ταχύτητες v_1 και v_2 αντίστοιχα κατά τη θετική φορά του άξονα x. Ο Π_1 μετράει χρόνο ζωής $\tau_1 = 5\,\text{s}$ για το σωματίδιο, ενώ ο Π_2 βρίσκει χρόνο ζωής $\tau_2 = 6\,\text{s}$. Ποια είναι η σχετική ταχύτητα του Π_2 ως προς τον Π_1;

(β) Έστω ότι το σωματίδιο έχει μάζα ηρεμίας M_0 και ότι ο Π_2 το βλέπει να διασπάται σε δύο φωτόνια που φεύγουν προς αντίθετες κατευθύνσεις του άξονα x. Βρείτε τις συχνότητες των δύο φωτονίων όπως τις μετράει ο παρατηρητής Π_2 ως συνάρτηση του M_0, της σταθεράς του Planck h, της ταχύτητας του φωτός c και οποιουδήποτε μεγέθους θεωρείτε απαραίτητο από το ερώτημα (α).

Πρόβλημα 10.290

Σώμα μάζας m συγκρατείται (όπως φαίνεται στο σχήμα) αρχικά ακίνητο σε ύψος h στην κορυφή μιας ομογενούς τριγωνικής σφήνας μάζας $M = 3\,\mathrm{m}$ (θεωρήστε ότι το μέγεθος του σώματος είναι αμελητέο σε σχέση με αυτό της σφήνας και ότι η σφήνα και το σώμα δεν εκτείνονται κατά τον άξονα$-z$). Η σφήνα συγκρατείται επίσης αρχικά ακίνητη σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ οι τριβές σε όλες τις επιφάνειες του σχήματος είναι μηδενικές. Η επιφάνεια της σφήνας, πάνω στην οποία βρίσκεται το σώμα, σχηματίζει γωνία ϕ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Στο κάτω άκρο της σφήνας βρίσκεται ακίνητος παρατηρητής Π, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή $t = t_0$ η μάζα m και η σφήνα αφήνονται ελεύθερες.



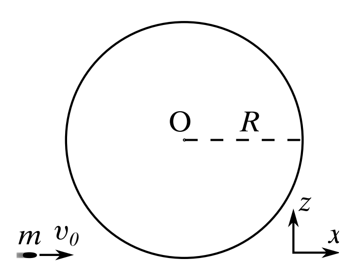
(α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση της σφήνας ως προς τον Π για το χρονικό διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$ κατά το οποίο το σώμα m παραμένει πάνω της.

(β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του κέντρου μάζας, να βρεθούν οι x–y συντεταγμένες ως προς τον Π του κέντρου μάζας της σφήνας τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

(γ) Να βρεθούν x–y συντεταγμένες του κέντρου μάζας του συστήματος (σφήνα και μάζα m) ως προς τον Π τη χρονική στιγμή $t = t_0$ και τη χρονική στιγμή $t = t_1$.

Πρόβλημα 10.291

Το επίπεδο ομογενούς κυκλικού δίσκου ακτίνας R και μάζας M είναι παράλληλο προς το κατακόρυφο επίπεδο x–z (όπως φαίνεται στο σχήμα, ο άξονας x είναι οριζόντιος και ο άξονας των z κατακόρυφος). Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης και μπορεί να περιστραφεί γύρω από ακίνητο οριζόντιο άξονα yy' που είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου και περνάει από το κέντρο του Ο. Η ροπή αδράνειας του δίσκου γύρω από αυτόν τον άξονα είναι $I_\Delta = MR^2/2$. Βλήμα μάζας m κινείται στον άξονα x με ταχύτητα v_0 ως προς ακίνητο παρατηρητή και καρφώνεται τη χρονική στιγμή t_0 στο κατώτερο σημείο του δίσκου. Οι διαστάσεις του βλήματος είναι πολύ μικρότερες από αυτές του δίσκου.



(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση (μαζί με τις αρχικές συνθήκες) που περιγράφει τη θέση του βλήματος σε χρονική στιγμή $t > t_0$ μέσω κατάλληλης γωνίας.

(β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος $h_{\max}$ στο οποίο θα φτάσει το βλήμα αν θεωρήσουμε ότι το κατώτερο άκρο του δίσκου είναι σε μηδενικό ύψος;

(γ) Ας υποθέσουμε ότι τα δεδομένα του προβλήματος είναι τέτοια ώστε το $h_{\max}$ να είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα R του δίσκου. Δείξτε τότε ότι το βλήμα θα εκτελέσει κατά προσέγγιση έναν τύπο αρμονικής ταλάντωσης μετά τη χρονική στιγμή t_0 και βρείτε την περίοδο αυτής της ταλάντωσης.

Πρόβλημα 10.292

Σημειακή μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα x σε περιοχή που χαρακτηρίζεται από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας
$U(x) = -(U_0/a^4)(x^2 - a^2)^2$, όπου (U_0, a) θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και χαρακτηρίστε τα ως προς το είδος ισορροπίας.

(β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $U(x)$.

(γ) Για απομακρύνσεις μικρού πλάτους ($\Delta x \ll a$) από σημείο ευσταθούς ισορροπίας, δείξτε ότι η μάζα θα εκτελέσει κατά προσέγγιση αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε τη συχνότητα ταλάντωσης ω.

(δ) Ποια είναι η κατεύθυνση και το μέτρο της ελάχιστης ταχύτητας που πρέπει να έχει η μάζα στο σημείο $x = \sqrt{2}a/2$ για να μπορέσει να βρεθεί στο $x = -\infty$;

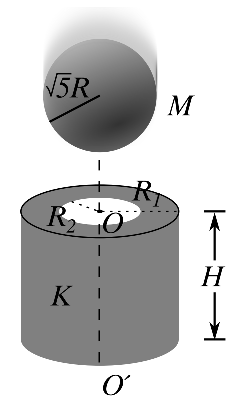
Πρόβλημα 10.293

(α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ παρατηρητής Π_1 αδρανειακού συστήματος Π βρίσκεται στην ίδια θέση με αδρανειακό παρατηρητή Π'. Ο Π_1 βλέπει τον Π' και ένα επίπεδο αντικείμενο που εκτείνεται στο επίπεδο (x, y) να κινούνται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{x}}c/2$. Με τη βοήθεια συγχρονισμένων παρατηρητών του συστήματος Π γίνεται τη στιγμή $t = 0$ ταυτόχρονη καταγραφή των ορίων του αντικειμένου και διαπιστώνεται ότι ικανοποιούν την εξίσωση περιφέρειας κύκλου ακτίνας R με κέντρο τον Π_1. Βρείτε την αλγεβρική εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες της περιφέρειας του αντικειμένου ως προς τον Π'. Περιγράψτε το σχήμα στο οποίο αντιστοιχεί αυτή η εξίσωση.

(β) Από μια πυρηνική αντίδραση εκπέμπονται δύο ταυτόσημα σωματίδια Α και Β, σε αντίθετες κατευθύνσεις και με ταχύτητες $0,8c$ και $0,6c$, αντίστοιχα, ως προς αδρανειακό παρατηρητή Π. Παρατηρητής $\Pi_{\rm A}$ ως προς τον οποίο το σωματίδιο Α είναι ακίνητο, μετράει χρόνο ζωής $\tau = 2\,\mathrm{sec}$ για το Α. Τον ίδιο χρόνο ζωής μετράει για το Β παρατηρητής $\Pi_{\rm B}$ που βλέπει το Β να ηρεμεί. Πόσος είναι ο χρόνος ζωής του καθενός σωματιδίου ως προς τον Π; Πόσος είναι ο χρόνος ζωής του σωματιδίου Α όπως καταγράφεται από τον $\Pi_{\rm B}$;

Πρόβλημα 10.294

Κυλινδρικό κέλυφος Κ έχει μάζα M, ύψος H, εξωτερική ακτίνα $R_1 = 3R$ και εσωτερική ακτίνα $R_2 = R$. Έστω αδρανειακό σύστημα $Oxyz$ του οποίου ο άξονας Oz συμπίπτει με τον σταθερό άξονα συμμετρίας $O'O$ του Κ.



(α) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του Κ ως προς τον $O'O$.

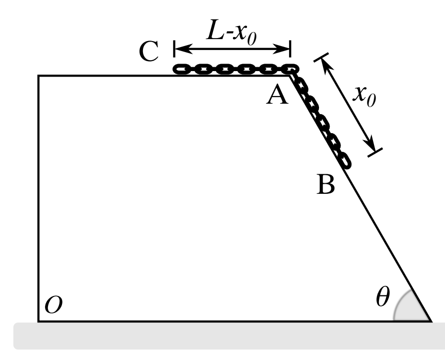
(β) Τη στιγμή $t_0 = 0$ δίνουμε στο κέλυφος Κ γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 \hat{\boldsymbol{z}}$ γύρω από τον $O'O$. Κατόπιν, τη στιγμή $t > 0$ αφήνουμε συμπαγή σφαίρα Σ να πέσει από αμελητέο ύψος πάνω στο Κ έτσι ώστε ο $O'O$ να περνάει από το κέντρο της Σ. Η σφαίρα έχει μάζα M και ακτίνα $\sqrt{5}R$. Να υπολογιστεί η κοινή τελική γωνιακή ταχύτητα ω όταν πλέον το σύστημα Κ–Σ (λόγω τριβών μεταξύ των Κ και Σ) περιστρέφεται ως στερεό σώμα.

(γ) Να υπολογιστεί η αρχική κινητική ενέργεια του Κ και η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος Κ–Σ. Να σχολιαστεί η σχέση των δύο ενεργειών.

(δ) Αφού το σύστημα Κ–Σ αποκτήσει την κοινή γωνιακή ταχύτητα ω, άνθρωπος μάζας $m \ll M$ αρχίζει να κινείται στην πάνω επίπεδη επιφάνεια του Κ και σε ακτίνα $2R$ από τον άξονα $O'O$ έτσι ώστε να ηρεμεί σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα $Oxyz$. Βρείτε τις ψευδοδυνάμεις που αισθάνεται ο άνθρωπος σύμφωνα με παρατηρητή που περιστρέφεται μαζί με το σύστημα Κ–Σ.

Πρόβλημα 10.295

Ομογενής μη-εκτατή αλυσίδα μήκους L και μάζας M βρίσκεται πάνω σε όχημα O. Τη στιγμή $t_0 = 0$ η αλυσίδα είναι ακίνητη και αναπτυγμένη σε ένα συνδυασμό οριζόντιου και κεκλιμένου επιπέδου, όπως στο σχήμα, με αντίστοιχα μήκη $L - x_0 = L/2$ και $x_0 = L/2$. Το οριζόντιο και κεκλιμένο επίπεδο του οχήματος συναντιούνται σε γραμμή που περνάει από το σημείο Α του Ο. Το σύστημα είναι μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας g και η αλυσίδα παραμένεια συνέχεια σε επαφή σε όλο το μήκος της με τις επιφάνειες του Ο. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ της αλυσίδας και του οχήματος.



(α) Βρείτε την ταχύτητα της αλυσίδας τη χρονική στιγμή t_1 που το άκρο της C περνάει από το σημείο Α του Ο, εάν το όχημα ηρεμεί καθόλη τη διάρκεια κίνησης της αλυσίδας.

(β) Έστω τώρα ότι τη στιγμή $t_0 = 0$ το όχημα Ο (μαζί με τον οδηγό–παρατηρητή Π) αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a_0 = (g \sin\theta)/2$ προς τα δεξιά (δηλαδή προς την κατεύθυνση που δείχνει το κεκλιμένο επίπεδο). Εκείνη τη στιγμή η αλυσίδα είναι ανεπτυγμένη όπως στο σχήμα ($x_0 = L/2$). Βρείτε την ταχύτητα της αλυσίδας ως προς το Π τη χρονική στιγμή t_2 που το άκρο της C περνάει από το σημείο Α.

(γ) Για την περίπτωση του επιταχυνόμενου Ο του ερωτήματος (β), βρείτε με ποια επιτάχυνση a_0 θα έπρεπε να κινείται το όχημα ούως ώστε η αλυσίδα να παραμείνει ακίνητη ως προς τον Π και για χρονικές στιγμές $t > t_0$.

Πρόβλημα 10.296

Μια σφαίρα με μάζα M κινείται οριζοντίως με ταχύτητα v_0 και προσκρούει τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε ένα σακί με άμμο, πάχους d, το οποίο και διαπερνά. Η δύναμη τριβής μέσα στην άμμο είναι ανάλογη της ταχύτητας, $F = -kv$, όπου k είναι μια θετική σταθερά και το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η τριβή αντιτίθεται στην κίνηση. Η δύναμη της βαρύτητας μπορεί να αγνοηθεί. Να υπολογίσετε:

(α) την ταχύτητα της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου, $v(t)$,

(β) την ταχύτητα της σφαίρας, $v(x)$, ως συνάρτηση της απόστασης x που έχει διανύσει μέσα στην άμμο, καθώς και την ταχύτητά της κατά την έξοδο από το σακί,

(γ) την απόσταση $x(t)$ που διανύει η σφαίρα μέσα στην άμμο ως συνάρτηση του χρόνου t,

(δ) το χρόνο που απαιτείται για να περάσει η σφαίρα μέσα από το σακί.

Πρόβλημα 10.297

Ομογενής λεπτός επίπεδος κυκλικός δίσκος έχει μάζα m και ακτίνα R και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου σε περιμετρικό σημείο Α. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I = (1/2)mR^2$.

(α) Ο δίσκος εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας του, στην οποία η ευθεία ΑΟ είναι κατακόρυφη, έτσι ώστε στη νέα του θέση η ΑΟ να σχηματίζει γωνία $\theta_0 = 60^\circ$ με την προς τα κάτω κατακόρυφο, και από αυτή τη θέση αφήνεται να περιστραφεί ελεύθερα περί τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Α. Να βρεθεί η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου $\omega_{\max}$ στην κίνηση που θα επακολουθήσει.

(β) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου ως συνάρτηση της γωνιακής απόκλισης θ. Να βρεθεί η γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων αν η αρχική γωνία απόκλισης ήταν πολύ μικρή.

Πρόβλημα 10.298

(α) Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης της παγκόσμιας έλξης που του ασκεί άλλο σώμα μάζας M, το οποίο βρίσκεται ακίνητο στην αρχή Ο. Να αποδειχθεί ότι η στροφορμή του κινούμενου σώματος ως προς το σημείο Ο είναι σταθερή και ότι η τροχιά του είναι επίπεδη.
(β) Ένας σφαιρικός πλανήτης έχει μάζα M και ακτίνα R, δεν περιστρέφεται και δεν έχει ατμόσφαιρα. Από ένα σημείο του πλανήτη εκτοξεύεται ένα βλήμα, με αρχική ταχύτητα v_0 σε οριζόντια διεύθυνση (δηλ. εφαπτομενικά ως προς την επιφάνεια του πλανήτη). Το βλήμα φθάνει σε μέγιστη απόσταση R_1 από το κέντρο του πλανήτη, όπου και έχει ταχύτητα v_1. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \frac{1}{\sqrt{1 + R/R_1}}$$

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της v_0 για την οποία το βλήμα απομακρύνεται σε άπειρη απόσταση από τον πλανήτη (ταχύτητα διαφυγής);

Πρόβλημα 10.299

Ένα φωτόνιο με ενέργεια E_γ με ακίνητο σωματίδιο του οποίου η μάζα ηρεμίας είναι M. Μετά τη σύγκρουση δημιουργείται ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_0 το οποίο παραμένι ακίνητο, και ένα άλλο σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_1 το οποίο κινείται με ταχύτητα v_1.

(α) Να δείξετε ότι είναι $\dfrac{v_1}{c} = \dfrac{E_\gamma}{Mc^2 - m_0c^2 + E_\gamma}$

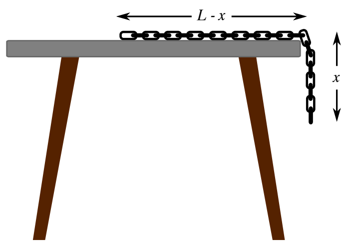
(β) Να δείξετε οτι είναι $m_1 = \sqrt{(M - m_0)(M - m_0 + 2E_\gamma/c^2)}$.

(γ) Να εξηγήσετε με λόγια τι συμβαίνει στις ειδικές περιπτώσεις: (i) όταν είναι $m_0 = 0$ και (ii) όταν είναι $m_0 = M$

Πρόβλημα 10.300

Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται αρχικά με ταχύτητα v (η οποία είναι άγνωστη) και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με σώμα μάζας m_2 $(m_2 > m_1)$ το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Η κινητική ενέργεια του πρώτου σώματος (μάζας m_1) μετά την κρούση είναι μικρότερη από την αρχική του κινητική ενέργεια κατά μια ποσότητα K_0.
Να βρείτε την αρχική ταχύτητα v του πρώτου σώματος m_1 καθώς και τις τελικές ταχύτητες των δυο σωμάτων. Να εκφράσετε τα αποτελέσματά σας ως συνάρτηση των γνωστών μεγεθών $m_1,\ m_2$ και K_0.

Πρόβλημα 10.301



Ένα σχονί μήκους L είναι τεντωμένο στην επιφάνεια ενός τραπεζιού.
(α) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σχοινιού και τραπεζιού είναι μ_s, τι μήκος του σχοινιού x πρέπει να κρέμεται από την άκρη του τραπεζιού ώστε αυτό να αρχίσει να ολισθαίνει;
(β) Υπολογίστε την ταχύτητα του σχοινιού καθώς το συνολικό του μήκος εγκαταλείπει το τραπέζι δεδομένου ότι ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι μ_k.

Πρόβλημα 10.302

(α) Μια δύναμη έχει τη μορφή $\mathbf{F} = -F_0 v^2 \hat{\mathbf{x}}$, ($F_0 > 0$, οπου v ειναι το μέτρο της ταχυτητας) δρα σε σωματίδιο μάζας m, το οποίο βρίσκεται στη θέση $x(0) = 0$ με ταχύτητα $v(0) = v_0 > 0$.
Να βρείτε την ταχύτητα $v(x)$ ως συνάρτηση της θέσης x. Θεωρήστε την κίνηση του σωματιδίου σε μια διάσταση.

(β) Ένα σωματίδιο κινειίται στο επιίπεδο $x - y$. Οι συντεταγμένες του, ως συνάρτηση του χρόνου είναι

$$x(t) = R(\omega t - \sin(\omega t)), \qquad y(t) = R(1 - \cos(\omega t))$$

όπου R και ω είναι σταθερές ποσότητες.
(i) Βρείτε τις συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σωματιδίου.
(ii) Σε ποιές χρονικές στιγμές το σωματίδιο είναι σε ακινησία;
(iii) Εξαρτάται το μέτρο της επιτάχυνσης από το χρόνο;

Πρόβλημα 10.303

(α) Σώμα περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση που δίνεται από την σχέση $\alpha = 4\lambda t - 3\mu t^2$ όπου λ, μ, σταθερές και t ο χρόνος. Αν η αρχική γωνιακή ταχύτητα ήταν ω_0, γράψτε τις σχέσεις που δίνουν τη γωνιακή ταχύτητα ω και τη γωνία ϕ ως συνάρτήση του χρόνου.

(β) Τροχός κυλίεται προς τα κάτω, σε λείο κεκλιμένο επίπεδο ύψους H. Υπολογίστε την γραμμική του ταχύτητα όταν φθάσει στην βάση του επιπέδου. Να κάνετε την υπόθεση ότι όλη η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

Πρόβλημα 10.304

Ένα μικρό σώμα κινείται έτσι ώστε το διάνυσμα θέσης ως συνάρτηση του χρόνου να είναι

$$\mathbf{r}(t) = k\cos(bt^2)\hat{\mathbf{x}} + k\sin(bt^2)\hat{\mathbf{y}}$$

όπου b και k είναι θετικές σταθερές. Να βρεθούν (α) η εξίσωση της τροχιάς (β) το μέτρο της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου, (γ) το μέτρο της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου και (δ) η επιτρόχια και κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης.

11 Χρήσιμες Σχέσεις

11.1 Ολοκληρώματα

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x, \qquad \int x\ln x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}, \qquad \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x-1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \quad \text{ή} \quad -\mathrm{arccot}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{ή} \quad \tanh^{-1}x \quad (x^2<1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{ή} \quad \coth^{-1}x \quad (x^2>1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{ή} \quad -\arccos x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln x + \sqrt{1+x^2} \quad \text{ή} \quad \sinh^{-1}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln x + \sqrt{x^2-1} \quad \text{ή} \quad \cosh^{-1}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\right) \tag{11.1}$$

11.2 Καρτεσιανές Συντεταγμένες (x, y, z)

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

όπου έχουμε ορίσει το διάνυσμα $\boldsymbol{A}=A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}}$ και μια βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

11.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες (r,θ,ϕ)

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta A_\phi\Big)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}\Big(rA_\phi\Big)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

όπου έχουμε ορίσει το διάνυσμα $\boldsymbol{A}=A_r\hat{\boldsymbol{r}}+A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

11.4 Κυλινδρικές Συντεταγμένες (ρ,ϕ,z)

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho A_\phi\Big)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

όπου έχουμε ορίσει το διάνυσμα $\boldsymbol{A}=A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

11.5 Διανυσματικές Σχέσεις

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\tag{11.2}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}), \qquad (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\Phi+\Psi) = \boldsymbol{\nabla}\Phi+\boldsymbol{\nabla}\Psi, \qquad \boldsymbol{\nabla}(\Phi\Psi) = \Phi\boldsymbol{\nabla}\Psi+\Psi\boldsymbol{\nabla}\Phi, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi+\Phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times(\Phi\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}), \qquad \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\Phi = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0$$

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$ Θεώρημα Απόκλισης ή Gauss-Ostrogradsky ή τύπος του Green

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$ Θεώρημα Στροβιλισμού ή Kelvin-Stokes

11.6 Τριγωνομετρικές Σχέσεις

$$\mathrm{e}^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}, \qquad \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos(2\theta) = \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{2}{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sec\theta = \sec\theta\tan\theta, \qquad \int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln\left[\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right]-\ln\left[\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right]+c$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{2i}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\csc\theta = -\csc\theta\cot\theta, \qquad \int\csc\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]-\ln\left[\cos\frac{\theta}{2}\right]+c$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta, \qquad \tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh^2 x-\sinh^2 x = 1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x$$

11.7 Σειρές Taylor

$$f(x_0+\varepsilon)=f(x_0)+f'(x_0)\varepsilon+\frac{f''(x_0)}{2!}\varepsilon^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}\varepsilon^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots$$

$$(1+x)^n=1+nx+\begin{pmatrix} n\\ 2\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix} n\\ 3\end{pmatrix}x^3+\cdots$$

11.8 Όγκος σφαίρας σε n-διαστάσεις

Υποθέτουμε ότι $V_n(r)$ είναι ο όγκος μιας σφαίρας σε n-διαστάσεις, όπου r είναι η ακτίνα της σφαίρας. Θα συσχετίσουμε τη σχέση του όγκου στις n-διαστάσεις με αυτόν στις $n-1$ διαστάσεις. Ας υποθέσουμε ότι z είναι μια συντεταγμένη σ' αυτόν τον άξονα που περνά από την κέντρο της σφαίρας. Αν A είναι μια σταθερά που ικανοποιεί τη σχέση $A<z$, η τομή της υπερ-επιφάνειας $z=A$ και της σφαίρας στις n-διαστάσεις θα είναι μια σφαίρα σε $(n-1)$ διαστάσεις ακτίνας $\sqrt{r^2-A^2}$. Επομένως θα έχουμε:

$$V_n(r)=\int_{-r}^{+r}V_{n-1}(\sqrt{r^2-z^2})\mathrm{d}z$$

ή

$$V_n(r)=2\int_{0}^{+r}V_{n-1}(\sqrt{r^2-z^2})\mathrm{d}z \tag{11.1}$$

διότι $\sqrt{r^2-z^2}$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς το z.
Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$V_n(r)=c_nr^n \tag{11.2}$$

όπου c_n μια σταθερά ανεξαρτήτου του r. Για $n = 1$ με τη βοήθεια της σχέσης (11.8) θα έχουμε

$$V_1(r) = 2\int_0^r \mathrm{d}z = 2r \tag{11.3}$$

όπου $V_0\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right) = 1$. Επομένως ο όγκος μιας σφαίρας μιας διάστασης ακτίνας r είναι $2r$, δηλαδή θα ισχύει $c_1 = 2$. Στην περίπτωση που $n = 2$, η σχέση (11.8) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$V_2(r) = 2\int_0^r V_1\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right)\mathrm{d}z = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - z^2}\mathrm{d}z$$

όπου η σχέση (11.8) έχει χρησιμοποιηθεί. Παρατηρήστε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται ως ακολούθως

$$V_2(r) = 4r^2\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\mathrm{d}u = r^2\pi \tag{11.4}$$

που συμφωνεί με τον όγκο σφαίρας σε 2-διαστάσεις ακτίνας r. Άρα θα έχουμε $c_2 = \pi$.
Το ολοκλήρωμα της σχέσης (11.8) έχει υπολογιστεί από τη γνωστή σχέση

$$\int_0^1 (1 - u^2)^{n/2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(n/2)!}{[(n+1)/2]!}$$

όπου $x! = \Gamma(x+1)$ είναι η συνάρτηση gamma με όρισμα $(x+1)$. Η συνάρτηση gamma $\Gamma(x)$ ορίζεται ως εξής

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}(x) > 0$$

Ο περιορισμός στο όρισμα x είναι απαραίτητος για να αποφύγουμε αοριστίες στο ολοκλήρωμα. Επιπλέον το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να αναπτυχθεί (με την αντικατάσταση του $t \to t^2$) ως εξής

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}t^{2x-1}\mathrm{d}t$$

Αν $x = 1/2$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

θα έχουμε $\Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}$.
Μετά αυτή τη σύντομη αναφορά στη συνάρτηση gamma ερχόμαστε πίσω στην απόδειξη της μαθηματικής απαγωγής της σχέσης $V_n(r) = c_n r^n$. Υποθέτουμε ότι η σχέση (11.8) είναι αληθινή για μια σφαίρα ακτίνας r σε n-διαστάσεις. Επομένως με τη βοήθεια της σχέσης (11.8) ο όγκος μιας σφαίρας σε $(n+1)$-διαστάσεις ακτίνας r θα είναι

$$V_{n+1}(r) = 2\int_0^r V_n(\sqrt{r^2 - z^2})\mathrm{d}z$$

ή

$$V_{n+1}(r) = 2c_n\int_0^r (r^2 - z^2)^{n/2}\mathrm{d}z = [2c_n\int_0^1 (1 - u^2)^{n/2}\mathrm{d}u]r^{n+1}$$

ή

$$V_{n+1}(r) = c_{n+1} r^{n+1}$$

όπου η σταθερά c_{n+1} δίνεται από την επαναλαμβανόμενη σχέση

$$c_{n+1} = 2c_n \int_0^1 (1-u^2)^{n/2} \mathrm{d}u = c_n \sqrt{\pi} \frac{(n/2)!}{[(n+1)/2]!} \tag{11.5}$$

και επομένως η σχέση (11.8) είναι αληθή $\forall n$, όπου $n \in N$. Η σχέση (11.8) για $n > 1$ θα δώσει

$$\begin{aligned}
c_2 &= c_1 \sqrt{\pi} \frac{(1/2)!}{(2/2)!} \\
c_3 &= c_2 \sqrt{\pi} \frac{(2/2)!}{(3/2)!} \\
&\vdots \\
c_n &= c_{n-1} \sqrt{\pi} \frac{[(n-1)/2]!}{(n/2)!}
\end{aligned}$$

και αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις παραπάνω σχέσεις, θα έχουμε

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

Άρα ο όγκος σφαίρας ακτίνας r σε n-διαστάσεις θα είναι

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} r^n$$

Επομένως, η επιφάνεια μιας τέτοιας σφαίρας θα είναι

$$S_n(r) = \frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}r} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} r^{n-1}$$

11.9 Πολικό/Κυλινδρικό/Σφαιρικό σύστημα

Να βρείτε τη θέση, $\boldsymbol{r}$, ταχύτητα, $\boldsymbol{v}$, και επιτάχυνση, $\boldsymbol{a}$, ενός σωματιδίου που κινείται σε
(α) πολικό σύστημα συντεταγμένων, (r, θ),
(β) κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, (ρ, ϕ, z), και
(γ) σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, (r, ϕ, θ),

Λύση:

(α) Όπως μπορείτε να δείτε από το σχήμα 11.1, οι καρτεσιανές συντεταγμένες, (x, y), ενός σωματιδίου δίνονται σε πολικές συντεταγμένες ως εξής

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

και τα μοναδιαία διανύσματα των πολικών συντεταγμένων, $(\hat{e}_t, \hat{\theta})$, εκφράζονται ως

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$

Επομένως η θέση, $\boldsymbol{r}$, του σωματιδίου είναι $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Η ταχύτητα, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, είναι

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r$$

όμως $\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \dot{\theta}\cos\theta\hat{\boldsymbol{y}} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, επομένως η ταχύτητα γράφεται ξανά ως

$$\boldsymbol{v} = v_r\hat{\boldsymbol{e}}_r + v_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

όπου v_r και v_θ είναι η ακτινική και η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα, ή

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

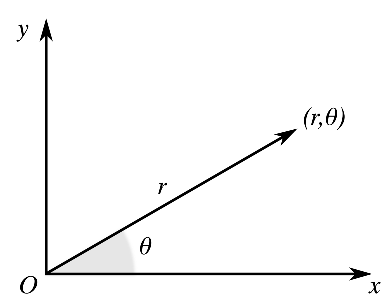
Η επιτάχυνση, $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$, εκφράζεται ως

$$\boldsymbol{v} = a_r\hat{\boldsymbol{e}}_r + a_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

όπου r και a_θ είναι η ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης, ή

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_r + (r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

εφόσον μπορείτε να επαληθεύεστε ότι $\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_r$.



Σχήμα 11.1: *Σύστημα πολικών συντεταγμένων*

(β) Για το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, (ρ, ϕ, z), όπως μπορείτε να δείτε από το σχήμα 11.2 έχουμε

$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\sin\phi$$
$$z = z$$

Τα μοναδιαία διανύσματα, $(\hat{\boldsymbol{e}}_\rho, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \hat{\boldsymbol{e}}_z)$ είναι

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}\\ \hat{\boldsymbol{e}}_z &= \hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

Μπορείτε να αποδείξετε ότι

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\rho &= \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\\ \dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\phi &= -\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho\\ \dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_z &= 0\end{aligned}$$

Το διάνυσμα θέσης, $\boldsymbol{r}$, δίνεται από τη σχέση

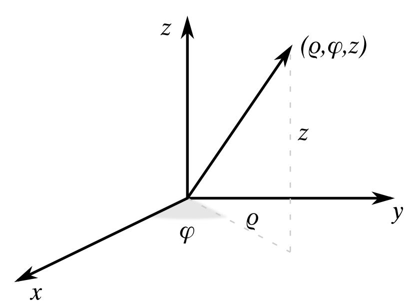
$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

και η ταχύτητα, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, είναι

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \dot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

και η επιτάχυνση $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$ γράφεται

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\phi)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$



Σχήμα 11.2: *Σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων*

(γ) Για το σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (r, ϕ, θ), όπως φαίνεται στο σχήμα 11.3 έχουμε

$$\begin{aligned}x &= r\sin\theta\cos\phi\\ y &= r\sin\theta\sin\phi\\ z &= r\cos\theta\end{aligned}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα, $(\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta)$, είναι

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_r &= \cos\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}\\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}\\ \hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}$$

Μπορείτε να αποδείξετε ότι

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_r + \dot{\phi}\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$
$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\phi = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_r - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

Το διάνυσμα θέσης, $\boldsymbol{r}$, είναι

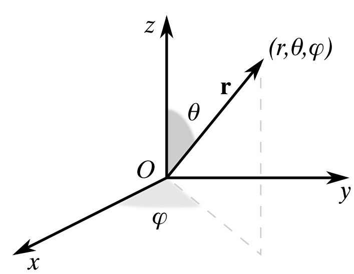
$$\boldsymbol{r} = \rho\hat{\boldsymbol{e}}_r,$$

και η ταχύτητα, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, είναι

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

και η επιτάχυνση $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} =&(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ (2r\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\end{aligned}$$



Σχήμα 11.3: *Σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων*

11.10 Ρίζες τριωνύμου, κυβικής, και τετάρτου βαθμού εξισώσεων

(α) *Τριώνυμο*: Οι δύο ρίζες ενός τριωνύμου είναι

$$ax^2 + bx + c = 0$$

όπου $a,\ b,\ c$ είναι πραγματικές παράμετροι, θα είναι

$$x = \frac{-b \pm \Delta^{1/2}}{2a}, \quad \text{όπου } \Delta = b^2 - 4ac$$

Αν $\Delta > 0$, οι ρίζες είναι πραγματικές και άνισες, αν $\Delta = 0$ είναι πραγματικές και ίσες, και αν $\Delta < 0$ οι ρίζες είναι μιγαδικές και άνισες.
(β) *Κυβική εξίσωση*: Η κυβική εξίσωση, $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ (με $p,\ q,\ r$ πραγματικούς συντελεστές) μπορεί να μετασχηματιστεί στη μορφή

$$x^3 + ax + b = 0, \quad \text{στην περίπτωση που} \quad y = x - \frac{p}{3}$$

όπου $a = (3q - p^2)/3$ και $b = (2p^3 - 9pq + 27r)/27$. Αν ορίσουμε τις ποσότητες

$$A = \left[-\frac{b}{2} + \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3}$$

$$B = \left[+\frac{b}{2} + \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3}$$

τότε οι τρεις ρίζες θα είναι

$$A + B$$
$$-\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$$
$$-\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$$

Αν $b^2/4 + a^3/27 > 0$, υπάρχουν μια πραγματική και δύο μιγαδικές ρίζες,
αν $b^2/4 + a^3/27 = 0$, υπάρχουν τρεις πραγματικές ρίζες με τουλάχιστο δύο άνισες ρίζες,
και αν $b^2/4 + a^3/27 < 0$, υπάρχουν τρεις άνισες πραγματικές ρίζες.
(γ) *Εξίσωση τετάρτου βαθμού*: Η εξίσωση $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια κυβική εξίσωση

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0$$

Υποθέτουμε ότι y_0 είναι μια ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, και $R = \sqrt{a^2/4 - b + y_0}$. Ορίζουμε τις παραμέτρους

$$D = \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^3}{4R} \right)^{1/2}$$

$$E = \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b - \frac{4ab - 8c - a^3}{4R} \right)^{1/2}$$

σε περίπτωση που $R \neq 0$, και:

$$D = \left(\frac{3a^2}{4} - 2b + 2\sqrt{y_0^2 - 4d} \right)^{1/2}$$

$$E = \left(\frac{3a^2}{4} - 2b - 2\sqrt{y_0^2 - 4d} \right)^{1/2}$$

όταν $R = 0$. Οι τέσσερις ρίζες θα είναι

$$x = -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} \pm \frac{D}{2}$$
$$x = -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} \pm \frac{E}{2}$$

11.11 Μερική παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to f(x, y, z)$, όπου A είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in A \subset \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε την παρακάτω πραγματική συνάρτηση $g(x)$, που ορίζεται ως $g : x \to g(x) = f(x, y_0, z_0)$. Αν η συνάρτηση $g(x)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο x_0, τότε η παράγωγός της ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x_0, y_0, z_0) και θα τη συμβολίζουμε ως

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \quad \text{ή} \quad f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

και είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή η πρώτη μερική παράγωγος (ή παράγωγος πρώτης τάξης) της f ως προς x στο σημείο x_0, y_0, z_0 ορίζεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

Με όμοιο τρόπο ορίζουμε τις παραγώγους πρώτης τάξης ως προς y και z ως ακολούθως

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y},$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$$

Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $(x, y, z) \in A$ υπάρχει η μερική παράγωγος της $f(x, y, z)$ ως προς x και y και z, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από την παρακάτω αντιστοιχία

$$(x, y, z) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$$

ονομάζεται μερική παράγωγος ως προς x πρώτης τάξης. Με όμοιο τρόπο έχουμε μερικές παραγώγους ως προς y και z, δηλαδή

$$(x, y, z) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \qquad (x, y, z) \to \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$$

Συνεπώς, για να προσδιορίσουμε την πρώτη μερική παράγωγο της $f(x, y, z)$ ως προς x, απλά θα παραγωγίσουμε τη συνάρτηση θεωρώντας την ανεξάρτητη μεταβλητή x ενώ θα κρατάμε το y και z ως σταθερές ποσότητες.

Παράδειγμα

Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τιμή $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Η μερική παράγωγος της $f(x, y, z)$ ως προς x είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}_{2x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Με όμοιο τρόπο οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Παράδειγμα

Έστω μια διδιάστατη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τιμή

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{για } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Λύση:

Η μερική παράγωγος ως προς x θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y - y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \text{για } (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$$

Για $(x,y) = (0,0)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

Με όμοιο τρόπο

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

11.11.1 Παράγωγοι ανώτερων τάξεων

Υποθέτουμε ότι ορίζονται οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ στο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^3$. Αν η $\partial f/\partial x$ δέχεται τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

τότε οι παράγωγοι αυτές ονομάζονται παράγωγοι δευτέρας τάξης της $f(x,y,z)$ ως προς x,y,z και θα συμβολίζονται ως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

Ανάλογα θα έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Υπάρχει το θεώρημα του Schwartz, το οποίο αναφέρει:

Αν η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to f(x,y)$, όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, δέχεται παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης συνεχείς στο A, τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \forall (x,y) \in A$$

11.11.2 Σύνθετη συνάρτηση

Έχουμε αναλύσει την περίπτωση της σύνθετης συνάρτησης μίας διάστασης $f = f\big(g(x)\big)$, όπου η παράγωγος της f ως προς x είναι

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

Αν τώρα η g είναι συνάρτηση δύο διαστάσεων, δηλαδή $f = f\big(g(x,y)\big)$ τότε οι μερικές παράγωγοι θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial y} \tag{11.7}$$

Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Έστω $g(x,y) = y/x$, τότε $f(x,y) = \arctan\big(g(x)\big)$. Επομένως, με τη βοήθεια των σχέσεων (11.11.2) έπεται

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}\big(\arctan(g)\big)}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{1+g^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}\big(\arctan(g)\big)}{\mathrm{d}g}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

αφού

$$\big(\arctan(g)\big)' = \frac{1}{1+g^2}$$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{\big(x^2+y^2\big)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{\big(x^2+y^2\big)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{\big(x^2+y^2\big)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{\big(x^2+y^2\big)^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει το θεώρημα του Schwartz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

11.11.3 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω μια πραγματική συνάρτηση στις δύο διαστάσεις $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$, όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι η f δέχεται πρώτης τάξης μερικές παραγώγους συνεχείς στο A. Έστω επιπλέον δύο συναρτήσεις $x, y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \to x(t)$ και $t \to y(t)$ δύο συνεχείς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο I: $\big(x(t), y(t)\big) \in A\ \forall t \in I$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση

$$F : t \to F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$$

του $I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο I και η παράγωγός της δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης του συμβολισμού, θα γράφουμε

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{11.8}$$

Αυτός ο τύπος, (11.11.3), ονομάζεται ολική παράγωγος της $F(t)$ ως προς t. Μπορούμε να επεκτείνουμε την έκφραση της (11.11.3) σε περισσότερες διαστάσεις. Για παράδειγμα αν έχουμε τη συνάρτηση

$$F(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t)\right)$$

όπου $x_i(t) \forall i = 1, 2, \ldots, n$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις της μεταβλητής t, τότε η ολική παράγωγος θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

Παράδειγμα

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x, y) = x + y$ με $x(t) = \sin t$ και $y(t) = t^3$. Τότε η ολική παράγωγος της $F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$ θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \cdot \cos t + 1 \cdot (3t^2) = \cos t + 3t^2$$

αφού

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t^2$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της x στη συνάρτηση $F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$, όπου για παράδειγμα η μεταβλητή $t = x$, τότε η ολική παράγωγος (11.11.3) θα λάβει τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{11.9}$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F = f(x, y) = e^{x/y}$ με $y = \ln x$ θα μας δώσει ως ολική παράγωγο

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y}e^{x/y} - \frac{x}{y^2}e^{x/y}\frac{1}{x} = \frac{y-1}{y^2}e^{x/y}$$

$$= \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} e^{x/\ln x}$$

αφού

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{x/y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{x/y} \qquad \text{και} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

Αν μια συνάρτηση $f(x, y) = 0$, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, θα λέμε ότι η y είναι πεπλεγμένη συνάρτηση της x. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \overset{(11.11.3)}{\Rightarrow} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \end{aligned}$$

Έστω ότι έχουμε δύο επιφάνειες στις τρεις διαστάσεις που ορίζονται ως ακολούθως

$$F = f(x, y, z) = 0 \qquad \text{και} \qquad G = g(x, y, z) = 0$$

Τότε μπορούμε να εκφράσουμε τις μεταβλητές y και z ως συνάρτηση της x. Οι ολικές παράγωγοι ως προς x θα είναι

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \\ 0 = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα των δύο εξισώσεων με αγνώστους τα $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ και $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ θα λάβουμε

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}} \tag{11.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}} \tag{11.11}$$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τις επιφάνειες

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad g(x,y,z) = x + y + z = 0$$

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 1$$

και επομένως οι τύποι (11.11.3) και (11.11.3) θα μας δώσουν

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2x-2z}{2y-2z} = -\frac{x-z}{y-z} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x-2y}{2y-2z} = \frac{x-y}{y-z} \end{aligned}$$

11.11.4 Ολικές παράγωγοι ανωτέρας τάξης

Η έκφραση της ολικής παραγώγου της (11.11.3) για τη συνάρτηση $F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$ είναι

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε τον τελεστή $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, ο οποίος δρα στη συνάρτηση $F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$ και επομένως θα έχει την έκφραση

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y}$$

Με αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να υπολογίσουμε την ολική παράγωγο δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \tag{11.12}$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι ισχύει το θεώρημα του Schwartz, $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$.

Μια απλή εφαρμογή του τύπου (11.11.4) είναι να θεωρήσουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b, \qquad \text{όπου } a,b, \text{ σταθερές.}$$

Τότε θα έχουμε για τον (11.11.4)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}&=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)f\\&=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)f\\&=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \qquad (11.13)\end{aligned}$$

Μπορείτε να δείξετε με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής ότι ο τύπος (11.11.4) γενικεύεται για τη νιοστή ολική παράγωγο ως

$$\frac{\mathrm{d}^nF(t)}{\mathrm{d}t^n}=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\left(x(t),y(t)\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

11.11.5 Ομογενείς συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ ονομάζεται ομογενής βαθμού n αν

$$f\left(ax,ay\right)=a^n f(x,y) \quad \forall a= \text{ σταθερά}$$

Το θεώρημα του Euler αναφέρει ότι για κάθε ομογενή συνάρτηση βαθμού n θα ισχύει

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf$$

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ θα έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x+2y$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}&=x\left(2x+y\right)+y\left(x+2y\right)\\&=2x^2+xy+yx+2y^2=2\left(x^2+xy+y^2\right)=2f\end{aligned}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε το θεώρημα του Euler για μια ομογενή συνάρτηση περισσότερων μεταβλητών, $f(x,y,z,\ldots)$, όπου

$$f\left(ax,ay,az,\ldots\right)=a^n f\left(x,y,z,\ldots\right)$$

Τότε το θεώρημα του Euler θα μας δώσει

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots=nf$$

Έστω $X=ax,\ Y=ay,\ Z=az,\ldots$ τότε έχουμε ως δεδομένο τη συνάρτηση

$$f(X,Y,Z)=a^n f(x,y,z,\ldots)$$

Αν λάβουμε την παράγωγο ως προς a, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}a}+\ldots&=na^{n-1}f\left(x,y,z,\ldots\right)\\ \Rightarrow\frac{\partial f}{\partial X}x+\frac{\partial f}{\partial Y}y+\frac{\partial f}{\partial Z}z+\ldots&=na^{n-1}f(x,y,z)\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $a=1$, τότε η παραπάνω σχέση θα οδηγηθεί σε

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\ldots=nf$$

αφού $X=x,\ Y=y,\ Z=z$ για $a=1$.

11.11.6 Πιο σύνθετες συναρτήσεις

Έστω $f:A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad(x,y,z)\to f(x,y,z)$, όπου A ανοικτό υποσύνολο και f συνεχώς παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές x,y,z είναι τρεις πραγματικές συναρτήσεις συνεχώς παραγωγίσιμες σ' ένα ανοικτό υποσύνολο $B\subset\mathbb{R}^2$ και ότι

$$\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\big)\in A\ \forall(s,t)\in B\subset\mathbb{R}^2$$

Τότε η σύνθετη συνάρτηση

$$F:(s,t)\to F(s,t)=f\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)$$

που είναι ορισμένη στο B είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο B και ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)=&\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}+\\&+\frac{\partial f}{\partial z}\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)=&\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)\frac{\partial x(s,t)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}+\\&+\frac{\partial f}{\partial z}\left(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\right)\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

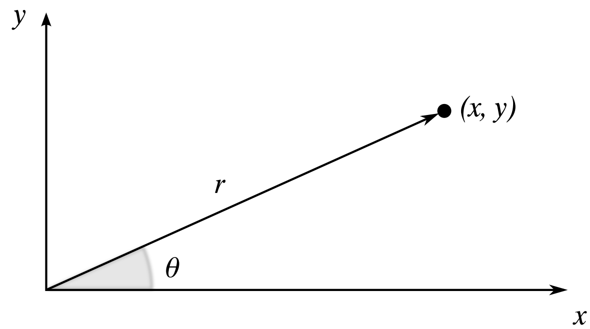
Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, τότε θα γράφουμε

$$\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\tag{11.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\tag{11.15}$$

Παράδειγμα

Έστω μια συνάρτηση $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to V(x, y)$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν θεωρήσουμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) θα έχουμε



Σχήμα 11.4

$$x(r, \theta) = r\cos\theta, \qquad y(r, \theta) = r\sin\theta$$

Επομένως, θεωρούμε τις μεταβλητές $s \equiv r$, $t \equiv \theta$ στις εκφράσεις (11.11.6), (11.11.6), όπου θα λάβουμε

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} & = \dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta} & = \dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} & = \dfrac{\partial V}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial V}{\partial y}\sin\theta \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta} & = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\underbrace{r\sin\theta}_{y} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\underbrace{r\cos\theta}_{x} \end{cases} \tag{11.16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r\dfrac{\partial V}{\partial r} & = \dfrac{\partial V}{\partial x}\underbrace{r\cos\theta}_{x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\underbrace{r\sin\theta}_{y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta} & = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\underbrace{r\sin\theta}_{y} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\underbrace{r\cos\theta}_{x} \end{cases}$$

όπου πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη της πρώτης σχέσης με r

$$\Rightarrow \begin{cases} r\dfrac{\partial V}{\partial r} & = x\dfrac{\partial V}{\partial x} + y\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta} & = -y\dfrac{\partial V}{\partial x} + x\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} & = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} & = -\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

Αν δημιουργήσουμε τον όρο $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{x}{r}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{y}{r}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{x}{r}\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\\
&= \left(\frac{x}{r}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\cancel{\frac{2xy}{r^2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}}+\left(\frac{y}{r}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\\
&\quad+\left(\frac{x}{r}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\cancel{-\frac{2yx}{r^2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}}\\
&= \frac{x^2+y^2}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\frac{y^2+x^2}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\\
\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα : Εξίσωση του Laplace

Από τις εξισώσεις (11.11.6) έπεται ότι

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{11.17}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{11.18}$$

δηλαδή οι τελεστές $\partial/\partial x$ και $\partial/\partial y$ σε πολικές συντεταγμένες θα είναι

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{11.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{11.20}$$

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους δευτέρας τάξης, τότε θα λάβουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\overset{(11.11.6)}{=}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\\
&\overset{(11.11.6)}{=} \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{11.21}
$$

και για τον όρο $\partial^2 V/\partial y^2$ έχουμε

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\overset{(11.11.6)}{=}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(11.11.6)}{=} \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}
\end{aligned}
\tag{11.22}
$$

Αν προσθέσουμε τις σχέσεις (11.11.6) και (11.11.6), θα λάβουμε την εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{0=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\text{εξίσωση Laplace σε καρτεσιανές}} &= \left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\\
&= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 1

Έστω μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to \phi(x,y)$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Θέτουμε $u = x + y$, $v = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Να δείξετε ότι ισχύει

$$
x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y}=u\frac{\partial\phi}{\partial u}-v\frac{\partial\phi}{\partial v}
$$

Λύση: Από τις σχέσεις (11.11.6) και (11.11.6) θα γράψουμε τις παραγώγους $\partial\phi/\partial x$ και $\partial\phi/\partial y$ ως ακολούθως

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial u}1+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial\phi}{\partial v}
\end{aligned}
\tag{11.23}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial u}1+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\\
&= \frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial\phi}{\partial v}
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

Σχηματίζουμε την έκφραση

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y} &\underset{(11.11.6)}{\overset{(11.11.6)}{=}} x\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)+y\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)\\
&= \Big(\underbrace{x+y}_{u}\Big)\frac{\partial\phi}{\partial u}-\underbrace{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}_{v}\frac{\partial\phi}{\partial v}=u\frac{\partial\phi}{\partial u}-v\frac{\partial\phi}{\partial v}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ με $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4(s^2+t^2)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right]$$

Λύση:

Θα εκφράσουμε τις παραγώγους $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$ ως ακολούθως

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\end{aligned} \tag{11.25}$$

όπου θεωρήσαμε την $g(s,t) = g\big(s(x,y), t(x,y)\big)$ και εφαρμόσαμε τις σχέσεις (11.11.6), (11.11.6) με την ανταλλαγή των ρόλων για τα (x,y) με (s,t). Ειδικότερα, αν $g \equiv x$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}1 &= 2s\frac{\partial s}{\partial x} - 2t\frac{\partial t}{\partial x}\\ 0 &= 2s\frac{\partial s}{\partial y} - 2t\frac{\partial t}{\partial y}\end{aligned} \tag{11.26}$$

Με παρόμοιο τρόπο, αν θεωρήσουμε $g \equiv y$ θα λάβουμε

$$\begin{aligned}0 &= 2t\frac{\partial s}{\partial x} + 2s\frac{\partial t}{\partial x}\\ 1 &= 2t\frac{\partial s}{\partial y} + 2s\frac{\partial t}{\partial y}\end{aligned} \tag{11.27}$$

Οι εξισώσεις (11.11.6) και (11.11.6) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους $\partial s/\partial x$, $\partial t/\partial x$, $\partial s/\partial y$, $\partial t/\partial y$. Η λύση του συστήματος εξισώσεων θα μας δώσει

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}, & \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}\\ \frac{\partial t}{\partial x} &= -\frac{t}{2\left(s^2+t^2\right)}, & \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{s}{2\left(s^2+t^2\right)}\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στις εξισώσεις (11.11.6), θα έχουμε

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} &= \dfrac{1}{2\left(s^2+t^2\right)}\left(s\dfrac{\partial f}{\partial s} - t\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= \dfrac{1}{2\left(s^2+t^2\right)}\left(t\dfrac{\partial f}{\partial s} + s\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)\end{cases}$$

επομένως έχουμε

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4\left(s^2+t^2\right)^2}\left[s^2\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + t^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \cancel{-2st\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}} + t^2\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + s^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \cancel{2ts\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\left(s^2+t^2\right)^2}\left[\left(s^2+t^2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(t^2+s^2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4\left(s^2+t^2\right)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

11.11.7 Παράγωγοι δευτέρας τάξης

Για μια συνάρτηση $F(s,t) = f\left(x(s,t), y(s,t)\right)$ θα υπολογίσουμε τις παραγώγους

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

Από τη σχέση (11.11.6) έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right]\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}
\end{aligned}
$$

Με όμοιο τρόπο να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση του κύματος σε μία διάσταση,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

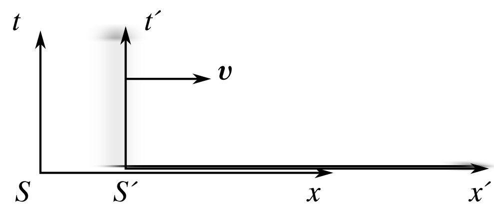
που περιγράφει τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό, είναι αναλλοίωτη ως προς του μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή θα ισχύει

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2}$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, x και t είναι η θέση και ο χρόνος αντίστοιχα. Στην ειδική σχετικότητα του Einstein θα μελετήσετε το μετασχηματισμό Lorentz, ο οποίος μετατρέπει τη θέση x και το χρόνο t σύμφωνα με τις σχέσεις

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right), \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ είναι ο παράγοντας Lorentz και v η ταχύτητα ανάμεσα σε δύο συστήματα αναφοράς S και S' (βλ. σχήμα 11.5).



Σχήμα 11.5

Στο πρόβλημα αυτό θεωρούμε ότι έχουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$(x', t') \to \Psi\left(x\left(x', t'\right), t\left(x', t'\right)\right)$$

και επομένως οι διάφορες παράγωγοι θα έχουν

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x'} &= \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x'} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial t'} &= \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t'} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial t'} \end{cases} \tag{11.28}$$

Από τους μετασχηματισμούς Lorentz έχουμε

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \gamma\frac{v}{c^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = v\gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma$$

Συνεπώς, οι εξισώσεις (11.11.7) θα μας δώσουν

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x'} &= \gamma\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \gamma\dfrac{v}{c^2}\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial t'} &= v\gamma\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \gamma\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} \end{cases}$$

Για τις δεύτερες παραγώγους θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x'}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) \\ &= \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma \left[\gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} \right] + \gamma \frac{v}{c^2} \left[\gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t^2} \right] \\
&= \gamma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\gamma^2 v}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} + \frac{\gamma^2 v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad (11.29)
\end{aligned}
$$

Ομοίως εργαζόμενοι θα λάβουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t'} \right) = \frac{\partial}{\partial t'} \left(v\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \\
&= v\gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \\
&= v\gamma \left[v\gamma \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \gamma \left[v\gamma \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \\
&= v^2 \gamma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2v\gamma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad (11.30)
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (11.11.7) και (11.11.7) θα μπορέσουμε να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} &= \gamma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\gamma^2 v}{c^2} \cancel{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x}} + \frac{\gamma^2 v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{v^2 \gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{2v\gamma^2}{c^2} \cancel{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t}} - \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\
&= \gamma^2 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{1/\gamma^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{1/\gamma^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}
$$

11.11.8 Διαφορικό

Ορίζουμε το διαφορικό μιας μονοδιάστατης συνάρτησης $f(x)$ ως

$$
\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \quad \text{ή} \quad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x
$$

Αν η συνάρτηση $f = f(x, y)$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, το διαφορικό ορίζεται ως

$$
\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y
$$

Αυτός ο τύπος του διαφορικού ισχύει και στην περίπτωση που οι μεταβλητές x και y δεν είναι ανεξάρτητες. Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$
P(X, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \qquad (11.31)
$$

θα προέρχεται από ένα διαφορικό κάποιας συνάρτησης όταν

$$
\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y
$$

$$\Rightarrow P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{11.32}$$

Αν λάβουμε τις μερικές παραγώγους ως προς y και x των σχέσεων (11.11.8) αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{11.33}$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Schwartz, $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$, από τις σχέσεις (11.11.8) θα λάβουμε τη σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

που αποτελεί την αναγκαία συνθήκη ώστε η συνάρτηση (11.11.8) να προέρχεται από ένα ολικό διαφορικό.

Παράδειγμα

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$xy\mathrm{d}x + x^2y^2\mathrm{d}y \tag{11.34}$$

προέρχεται από ένα ολικό διαφορικό.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση (11.11.8) περιέχει τους όρους

$$P(x,y) = xy, \qquad Q(x,y) = x^2y^2$$

όπου οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Συνεπώς, η (11.11.8) δεν μπορεί να έχει προέλθει από ένα ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης.

Παράδειγμα

Θα βρούμε το διαφορικό $\mathrm{d}f$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = e^{xy}\cos\left(x^2+y^2\right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}\cos(x^2+y^2) - 2xe^{xy}\sin\left(x^2+y^2\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}\cos(x^2+y^2) - 2ye^{xy}\sin\left(x^2+y^2\right)$$

Επομένως, το διαφορικό $\mathrm{d}f$ θα είναι

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = e^{xy}\left[y\cos\left(x^2+y^2\right) - 2x\sin\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x + e^{xy}\left[x\cos\left(x^2+y^2\right) - 2y\sin\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}y$$

11.11.9 Εφαρμογή: Θερμοδυναμικές σχέσεις

Ο διαφορικός λογισμός των μερικών παραγώγων βρίσκει άμεση εφαρμογή στο πεδίο της θερμοδυναμικής. Θα δείξουμε μερικές από τις σχέσεις της θερμοδυναμικής, γνωστές ως σχέσεις του Maxwell στη θερμοδυναμική. Ένα θερμοδυναμικό σύστημα περιγράφεται από τον όγκο V, τη θερμοκρασία T, την πίεση P και την εντροπία S. Αυτές οι 4 ποσότητες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους: δύο από αυτές μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά οι άλλες δύο θα μπορούν να καθοριστούν με τη βοήθεια των δύο πρώτων. Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής περιγράφει τη διατήρηση της ενέργειας και δίνεται από το διαφορικό

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \tag{11.35}$$

όπου U είναι η εσωτερική ενέργεια του συστήματος. Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε παρακάτω βασίζεται στη σχέση του διαφορικού μιας συνάρτησης $U(x, y)$ δύο μεταβλητών x και y, όπου

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y \tag{11.36}$$

όπου ο όρος $(\partial U/\partial x)_y$ δηλώνει τη μερική παράγωγο της U ως προς x, όπου το y είναι σταθερό. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Schwartz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

θα εξάγουμε τις διάφορες θερμοδυναμικές σχέσεις.
Από τις σχέσεις (11.11.9) και (11.11.9) έπεται, αφού διαλέξουμε $x \equiv S$ και $y \equiv V$

$$\begin{aligned}
T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V &= \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \mathrm{d}S + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \mathrm{d}V \\
&\Rightarrow \begin{cases} T &= \left(\dfrac{\partial U}{\partial S}\right)_V \\ P &= -\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_S \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_S &= \dfrac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} \\ \left(\dfrac{\partial P}{\partial S}\right)_V &= -\dfrac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \end{cases} \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V
\end{aligned}$$

Αυτή είναι μια πρώτη βασική θερμοδυναμική εξίσωση. Ας συνεχίσουμε «στο ίδιο μήκος κύματος», όπου θεωρούμε τη συνάρτηση $S = S(V, T)$, δηλαδή είναι συνάρτηση του όγκου V και της θερμοκρασίας T. Από τη σχέση (11.11.9) έπεται

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T\right] - P\mathrm{d}V = \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P\right]\mathrm{d}V + T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T \tag{11.37}$$

Επίσης, αν $U = U(V,T)$, τότε

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T \tag{11.38}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (11.11.9) και (11.11.9) έπεται

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P\\ \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V &= T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V\end{cases}\\
\Rightarrow &\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial T\partial V} &= \left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T + T\dfrac{\partial^2 S}{\partial T\partial V} - \left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V\\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial V\partial T} &= T\dfrac{\partial^2 S}{\partial V\partial T}\end{cases}\\
\Rightarrow &\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + T\cancel{\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial V}} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = T\cancel{\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial T}}\\
\Rightarrow &\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V
\end{aligned}\tag{11.39}$$

Μια τρίτη θερμοδυναμική σχέση μπορεί να δημιουργηθεί ως ακολούθως. Έστω ότι λαμβάνουμε το διαφορικό της συνάρτησης $F = U - ST$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Big(\underbrace{U - ST}_{F}\Big) &= \mathrm{d}U - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S \overset{(11.11.9)}{=} \cancel{T\mathrm{d}S} - P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T - \cancel{T\mathrm{d}S}\\
&= -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T
\end{aligned}\tag{11.40}$$

Η συνάρτηση $F = U - ST$ ονομάζεται *δυναμικό ή δυναμική ενέργεια του Helmholtz*. Επομένως, η σχέση (11.11.9) μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathrm{d}F = -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T \tag{11.41}$$

Αν η $F = F(V,T)$ είναι δηλαδή συνάρτηση του όγκου V και θερμοκρασίας T, τότε

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T \tag{11.42}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (11.11.9) και (11.11.9) θα λάβουμε

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_T &= -P\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V &= -S\end{cases}\\
\Rightarrow &\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_T &= -\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V\\ \dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V &= -\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T\end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} & = -\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} & = -\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T
$$

που είναι η ίδια θερμοδυναμική σχέση με την (11.11.9).

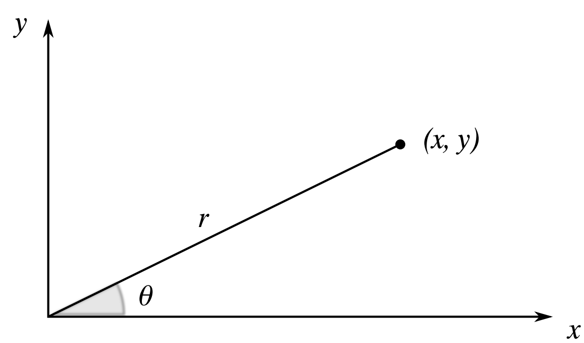
11.12 Μιγαδικές μεταβλητές

Ένα σημείο στο καρτεσιανό επίπεδο (x, y) μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$, όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι ένας φανταστικός αριθμός και x, y ονομάζονται το πραγματικό και φανταστικό μέρος του z αντίστοιχα. Ο χώρος των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται ως $\mathbb{C}$, συνεπώς θα λέμε $z \in \mathbb{C}$. Η πρώτη επαφή σας με τους μιγαδικούς αριθμούς είναι η δυνατότητα επίλυσης τριωνύμων με αρνητική ορίζουσα. Για παράδειγμα οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Η αναπαράσταση του μιγαδικού αριθμού $x \in \mathbb{Z}$ στο καρτεσιανό επίπεδο μπορεί να γίνει μέσω των πολικών συντεταγμένων (r, θ), όπου $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ και επομένως ο μιγαδικός αριθμός z θα έχει τη μορφή

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$



Σχήμα 11.6

Με $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ να είναι το μέτρο του μιγαδικού αριθμού και $\theta = \arg(z)$ το όρισμα του z. Η κύρια τιμή του ορίσματος ενός μιγαδικού αριθμού z ικανοποιεί τη σχέση $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Βέβαια οποιαδήποτε γωνία $\theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι ισοδύναμα ορίσματα του μιγαδικού αριθμού z. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ορίζουμε το μιγαδικό συζυγή αριθμό $\bar{z} = x - iy$ και συνεπώς ο αριθμός $z\bar{z}$ είναι

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 \cancel{- ixy} + \cancel{iyx} + y^2 = x^2 + y^2 = r^2$$

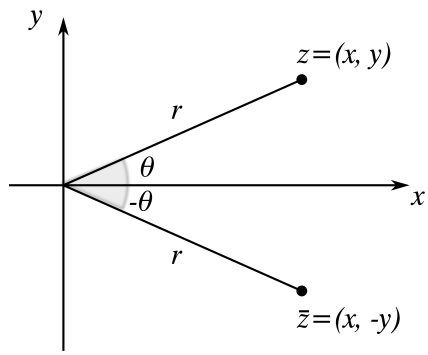
που ορίζει το τετράγωνο του μέτρου του z, $|z|^2$, δηλαδή

$$|z|^2 = z\bar{z} = r^2 = x^2 + y^2$$

Επίσης, το πραγματικό και φανταστικό μέρος του z είναι

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad y = \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Η αναπαράσταση του συζυγή μιγαδικού αριθμού $\bar{z}$ φαίνεται στο σχήμα 11.7, όπου το μέτρο του $r = |\bar{z}|$ ταυτίζεται με το $|z|$, αλλά το όρισμα του $\bar{z}$ είναι αντίθετο του ορίσματος του z, δηλαδή $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$.



Σχήμα 11.7

11.12.1 Ταυτότητα του Euler

Από τις σειρές MacLaurin ημιτόνου, συνημιτόνου και εκθετικής συνάρτησης

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ \cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \\ e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε το $z = i\theta$, έπεται

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \dots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin\theta} \\ \Rightarrow e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta\end{aligned}$$

11.12.2 Πράξεις των μιγαδικών αριθμών

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Οι διάφορες πράξεις θα έχουν

1. Πρόσθεση, αφαίρεση

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)$$

2. Πολλαπλασιασμός

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$$

3. Διαίρεση

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{\underbrace{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}_{x_2^2+y_2^2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Αν $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ είναι τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$\begin{aligned} |z_1z_2| &= |z_1|\,|z_2|, \qquad & |z_1 + z_2| &\le |z_1| + |z_2|, \\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad & |z_1 \pm z_2| &\ge |z_1| - |z_2| \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε την πολική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1} = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right), \qquad z_2 = r_2e^{i\theta_2} = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$$

τότε

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2\left[\cos(\theta + \theta_2) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \\ z^n &= \underbrace{\left(re^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta} = r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]}_{\text{Θεώρημα του De Moivre}} \end{aligned}$$

Ένας μιγαδικός αριθμός w ονομάζεται η νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού z αν

$$\begin{aligned} w^n &= z \Rightarrow w = z^{1/n} \\ \Rightarrow w &= \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n}e^{i\theta/n} \\ &= r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \end{aligned}$$

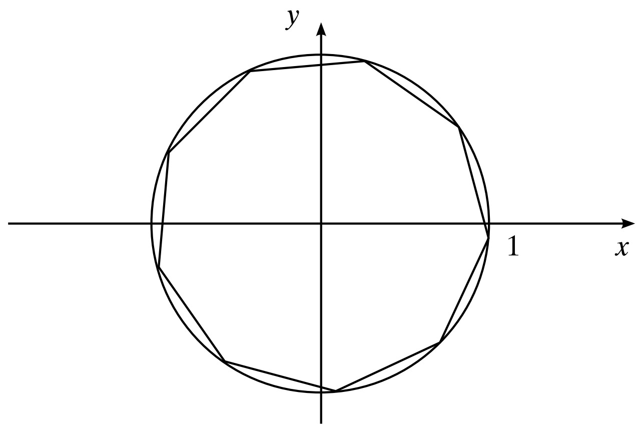
όπου παρατηρούμε ότι υπάρχουν n διαφορετικές τιμές του $z^{1/n}$, δηλαδή n διαφορετικές ρίζες του z, αρκεί $z \neq 0$. Αν $z = 1$, τότε $w^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, και συνεπώς θα υπάρχουν n ρίζες για τη μονάδα με τιμές

$$w = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{i2k\pi/n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

Γεωμετρικά, οι n ρίζες της μονάδας αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$ και κέντρο την αρχή των αξόνων.
Εσωτερικό γινόμενο δύο μιγαδικών $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ορίζεται ως

$$z_1\,z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = |z_1|\,|z_2|\cos\theta$$

όπου $0 \le \theta \le \pi$ είναι η γωνία μεταξύ των z_1 και z_2.



Σχήμα 11.8

Το *εξωτερικό γινόμενο* των μιγαδικών z_1, z_2 είναι

$$z_1 \times z_2 = (0, 0, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

δηλαδή ορίζει ένα διάνυσμα με μέτρο

$$|z_1 \times z_2| = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

και κάθετο στο μιγαδικό επίπεδο.

11.12.3 Μιγαδική παραγώγιση

Θεωρούμε μια συνάρτηση $w = f(z), f : z \in \mathbb{C} \to w = f(z) \in \mathbb{C}$, όπου μόνο μια τιμή του w αντιστοιχεί σε κάθε τιμή του z, θα λέμε ότι η w είναι μονότιμη συνάρτηση του z ή ότι η $f(z)$ είναι μια μονότιμη συνάρτηση. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $w = f(z) = z^2$ είναι μια μονότιμη συνάρτηση, καθότι για κάθε z υπάρχει μια μόνο τιμή της w.
Άν για κάθε z αντιστοιχούν πολλές τιμές της w, τότε θα έχουμε μια συνάρτηση πολλών τιμών. Για παράδειγμα, στη συνάρτηση $w^2 = z$, για κάθε z αντιστοιχούν δύο τιμές της w.
Άν $w = f(z)$ είναι μια μονότιμη συνάρτηση σε μια περιοχή $A \subset \mathbb{C}$, τότε η παράγωγός της ορίζεται ως ακολούθως

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Το διαφορικό της συνάρτησης w θα είναι μια συνάρτηση που ορίζεται ως

$$\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z$$

Άν η παράγωγος $f'(z)$ της συνάρτησης $w = f(z)$ ορίζεται για κάθε σημείο $z \in A \subset \mathbb{C}$, τότε η $f(z)$ ονομάζεται αναλυτική συνάρτηση στην περιοχή $A \subset \mathbb{C}$. Επίσης, θα λέμε ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική στο σημείο z_0, αν υπάρχει μια περιοχή $|z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, όπου για κάθε σημείο αυτής της περιοχής η $f'(z)$ ορίζεται.

11.12.4 Κανόνες παραγώγισης

Αν $f(z), g(z), h(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις, τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(f(z) \pm g(z)\big) = \dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \pm \dfrac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(f(z)g(z)\big) = \dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}g(z) + f(z)\dfrac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right) = \dfrac{g(z)\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} - f(z)\dfrac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}}{g^2(z)}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\mathrm{d}z/\mathrm{d}f}$
5. Σύνθετη συνάρτηση. Αν $w = f(\zeta),\ \zeta = g(z)$, τότε
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για το διαφορικό των μιγαδικών συναρτήσεων.

11.12.5 Εξισώσεις των Cauchy-Riemann

Αν $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι μια συνάρτηση στην περιοχή $A \subset\in \mathbb{C}$, τότε η αναγκαία συνθήκη για να είναι η $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση είναι το πραγματικό, $u(x, y)$, και φανταστικό μέρος, $v(x, y)$ της $f(z)$ να ικανοποιούν τις σχέσεις των Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Αν οι παράγωγοι δευτέρας τάξης των u, v ορίζονται και είναι συνεχείς στην περιοχή $A \subset \mathbb{C}$, τότε θα έχουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}}_{\text{θεώρημα Schwartz}} = 0 \tag{11.43}$$

αφού ισχύει το θεώρημα του Schwartz για τη συνάρτηση $v(x, y)$. Όμοια θα ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{11.44}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (11.12.5) και (11.12.5) ονομάζονται εξισώσεις του Laplace, και συμβολίζονται ως

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \forall \Psi = u, v$$

ή

$$\nabla^2\Psi = 0, \qquad \text{όπου } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Ο τελεστής $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ονομάζεται λαπλασιανή και θα τη συναντήσουμε πάλι στη διανυσματική ανάλυση.

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το πραγματικό και φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace. Ορίζουμε τον τελεστή ανάδελτα, ∇, και το συζυγή αυτού, $\bar{\nabla}$ ως

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

Αυτοί οι τελεστές μας επιτρέπουν να ορίσουμε διάφορες «δράσεις» σε συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις $F(x,y)$ πραγματικές ή μιγαδικές $A(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$.

(α) Βαθμίδα της $F(x,y) = F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$$

ή βαθμίδα της $A(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y) = P\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iQ\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$

$$\nabla A = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$$

(β) Απόκλιση της $A(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$$\nabla \cdot A = \mathrm{Re}\left\{\bar{\nabla} A\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)\right\} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial A}{\partial z}\right\}$$

Απόκλιση της $F(x,y)$

$$\nabla \cdot F = \mathrm{Re}\left\{\bar{\nabla} F\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)F\right\} = \frac{\partial F}{\partial x} = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$$

(γ) Στροβιλισμός του $A(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$$\nabla \times A = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \qquad \text{με μέτρο}$$

$$|\nabla \times A| = \left|\Im\left(\bar{\nabla} A\right)\right| = \left|\Im\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)\right\}\right| = \left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| = \left|2\Im\left\{\frac{\partial A}{\partial z}\right\}\right|$$

(δ) Λαπλασιανή ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο του ανάδελτα ∇ με τον εαυτό του

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \mathrm{Re}\left\{\bar{\nabla}\nabla\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Παράδειγμα

Έστω μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x, y)$, όπου $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Τότε έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\underbrace{\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Όμοια μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\underbrace{\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}}_{-i} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

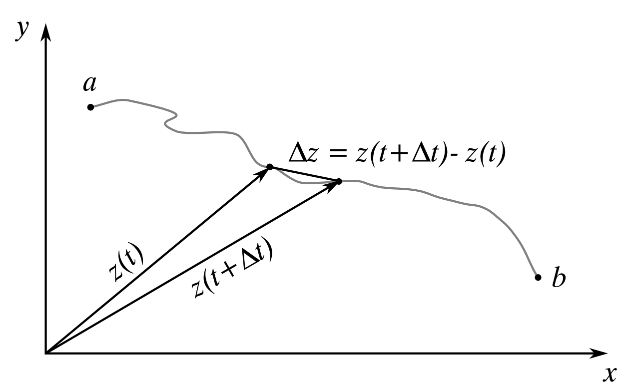
Επομένως, ο τελεστής ανάδελτα είναι

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Όμοια για το συζυγή ισχύει

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - i^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

11.12.6 Εφαρμογή στη Μηχανική



Σχήμα 11.9

Η κίνηση ενός υλικού σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο (x, y) μπορεί να περιγραφεί μέσω της παραμετρικής καμπύλης $z(t) = x(t) + iy(t)$, όπου t είναι μια παράμετρος (όπως για παράδειγμα ο χρόνος). Η παράγωγος του $z(t)$ ως προς το t, $\mathrm{d}z(t)/\mathrm{d}t$, είναι

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

ορίζεται τη μιγαδική ταχύτητα του υλικού σημείου. Ενώ η δεύτερη παράγωγος, $\mathrm{d}^2z(t)/\mathrm{d}t^2$, ορίζει τη μιγαδική επιτάχυνση του υλικού σημείου. Η ταχύτητα και επιτάχυνση είναι πραγματικές συναρτήσεις και ορίζονται ως

$$\text{ταχύτητα} = \left|\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right|, \qquad \text{επιτάχυνση} = \left|\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|$$

Παράδειγμα

Μια έλλειψη στο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται από τη μιγαδική συνάρτηση

$$z(t) = a\cos(\omega t) + ib\sin(\omega t), \qquad a, b, \omega > 0, \quad a > b$$

όπου $t \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος.
Η μιγαδική ταχύτητα ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω στην έλλειψη θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin(\omega t) + ib\omega\cos(\omega t)$$

ενώ η ταχύτητά του είναι

$$\text{ταχύτητα} = \left|\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{a^2\omega^2\sin^2(\omega t) + b^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = \omega\sqrt{a^2\sin^2(\omega t) + b^2\cos^2(\omega t)}$$

Η μιγαδική επιτάχυνση είναι

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-a\omega\sin(\omega t) + ib\omega\cos(\omega t)\right] \\
&= -a\omega^2\cos(\omega t) - ib\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2\Bigg[\underbrace{a\cos(\omega t) + ib\sin(\omega t)}_{z(t)}\Bigg] = -\omega^2 z(t) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} &+ \omega^2 z(t) = 0
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

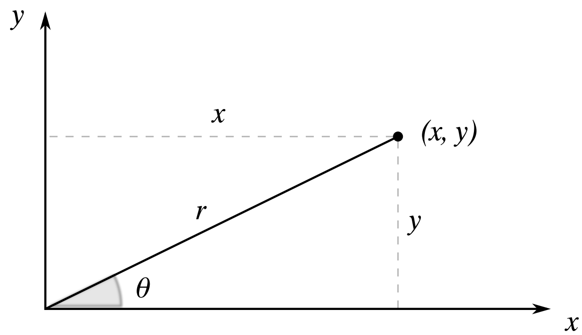
Να δείξετε ότι οι εξισώσεις των Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες θα έχουν τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Λύση:

Σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



Σχήμα 11.10

Επομένως, οι διάφορες παράγωγοι αναπτύσσονται ως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{-y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{-y}{r^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (11.45)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{x}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{x}{r^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \qquad (11.46)\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{-y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{-y}{r^2} \\
&= \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (11.47)\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{x}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{x}{r^2} \\
&= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta \qquad (11.48)
\end{aligned}$$

Η εξίσωση των Cauchy-Riemann $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ θα μας δώσει (με τη βοήθεια των σχέσεων (11.12.6) και (11.12.6))

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta \\
\Rightarrow &\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta = 0 \qquad (11.49)
\end{aligned}$$

Επίσης, από την εξίσωση των Cauchy-Riemann $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ και με τη βοήθεια των σχέσεων (11.12.6) και (11.12.6) θα λάβουμε

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta = -\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \\ \Rightarrow &\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{11.50}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (11.12.6) με $\cos\theta$ και τη σχέση (11.12.6) με $\sin\theta$, και αφού τις προσθέσουμε θα έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (11.12.6) με $-\sin\theta$ και τη σχέση (11.12.6) με $\cos\theta$, και τις προσθέσουμε, θα λάβουμε

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Παράδειγμα

Να γράψετε τη συνάρτηση $f(z) = z + 1/z$ σε πολικές συντεταγμένες (r, θ), και να προσδιορίσετε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνάρτησης.

Λύση:

Για $z = re^{i\theta}$, η συνάρτηση $f(z)$ θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} f(z) &= z\frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) + \frac{1}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = \underbrace{\frac{r^2+1}{r}\cos\theta}_{u(r,\theta)} + i\,\underbrace{\frac{r^2-1}{r}\sin\theta}_{v(r,\theta)} \end{aligned}$$

Το πραγματικό, $u(r,\theta)$, και φανταστικό, $v(r,\theta)$, μέρος της συνάρτησης $f(z)$ είναι

$$u(r,\theta) = \frac{r^2+1}{r}\cos\theta, \qquad v(r,\theta) = \frac{r^2-1}{r}\sin\theta$$

Βιβλιογραφία

[1] C. Kittel, et al. Μηχανική, Ελληνική μετάφραση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.

[2] Classical Mechanics, H. Goldstein, Addison-Wesley Publishing Company.

[3] Σημειώσεις Θεωρητικής Μηχανικής, Ελισάβετ Δαλιεράκη. Εκδόσεις: Τέχνη - Επιστήμη

[4] H. Pottel, Am. J. Phys. 56 (1988) 351.

[5] Z. Reut, Eur. J. Phys. 11 (1990) 131.