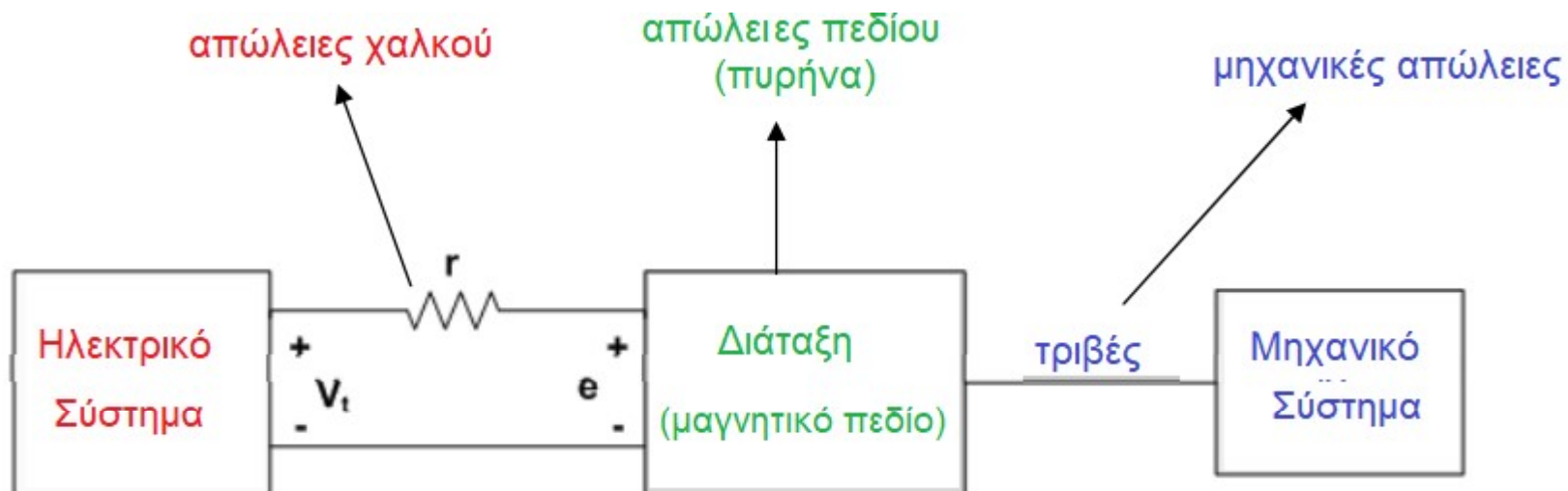




# Ηλεκτρομηχανική Μετατροπή Ενέργειας



Σχηματική αναπαράσταση διατάξεως ηλεκτρομηχανικής μετατροπής ενέργειας

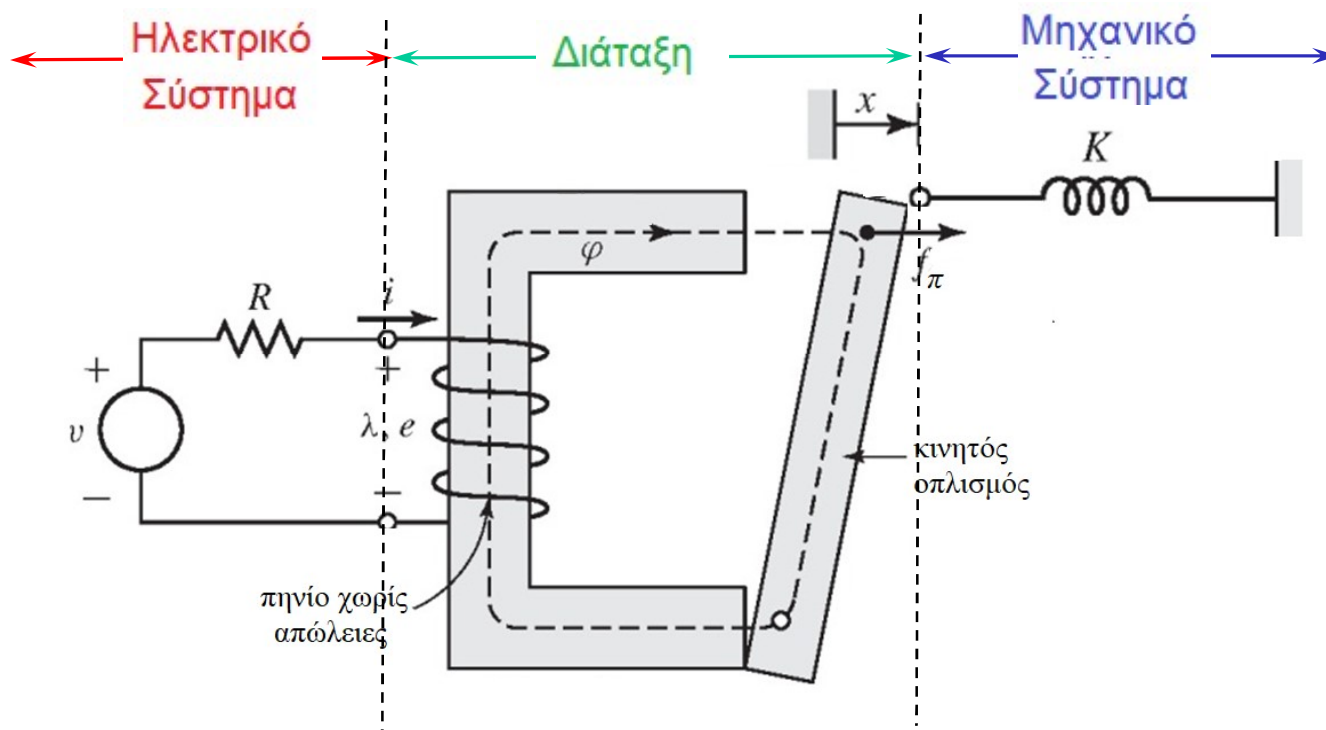
Μεταβολή ενέργειας από ηλεκτρικό σύστημα:  $dW_e = V_t i dt - i^2 r dt = e i dt$

Μεταβολή ενέργειας προς μηχανικό σύστημα + μηχανικές απώλειες:  $dW_m$

**Ενεργειακός ισολογισμός:**  $dW_e = dW_m + dW_\pi +$  απώλειες πεδίου  
(συνήθως αμελητέες)



## Διάταξη απλής διεγέρσεως



Ισοζύγιο ισχύος και ενέργειας

$$P_e = P_m + \frac{dW_\pi}{dt}$$

$$i \frac{d\lambda}{dt} = f_\pi \frac{dx}{dt} + \frac{dW_\pi}{dt}$$

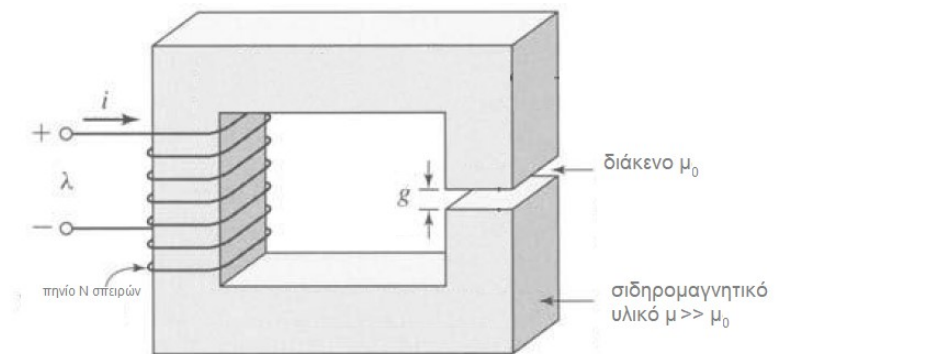
$$i d\lambda = f_\pi dx + dW_\pi$$

$$dW_\pi(\lambda, x) = i d\lambda - f_\pi dx$$

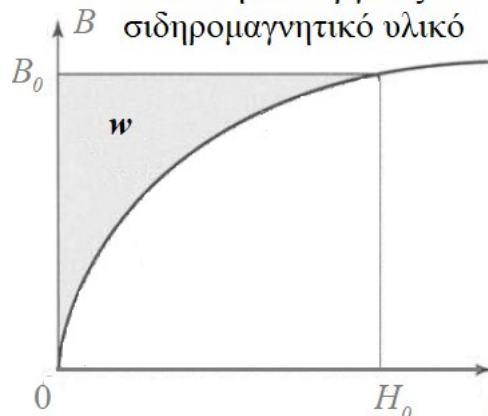


# Ενέργεια και συνενέργεια μαγνητικού πεδίου

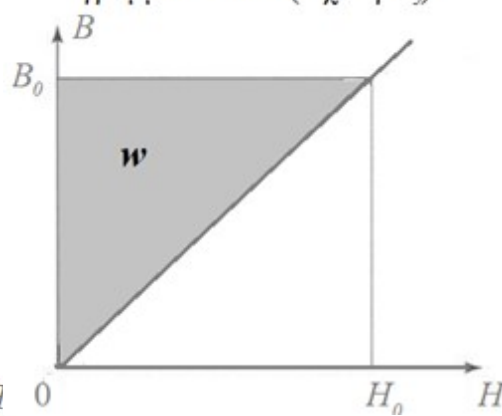
## Πυκνότητα ενέργειας στον πυρήνα και τα διάκενα



πυκνότητα ενέργειας σε σιδηρομαγνητικό υλικό



πυκνότητα ενέργειας σε γραμμικό υλικό (π.χ. αέρας)



Η πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου σε ένα υλικό δίνεται από τη σχέση:

$$w_{\pi} = \int_0^{B_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

Στα γραμμικά υλικά ( $B = \mu H$ ) ισχύει:

$$w_{\pi} = \frac{\mu H_0^2}{2}$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου σε γραμμικό υλικό με ομοιόμορφη κατανομή μαγνητικού πεδίου μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ενέργειας στον όγκο του υλικού  $V$  ως εξής:

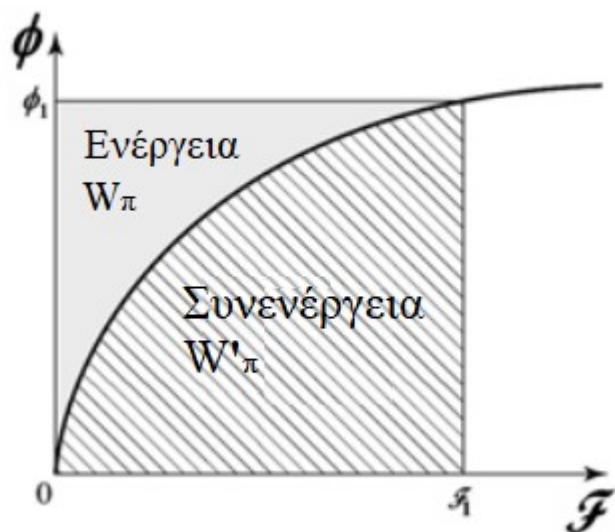
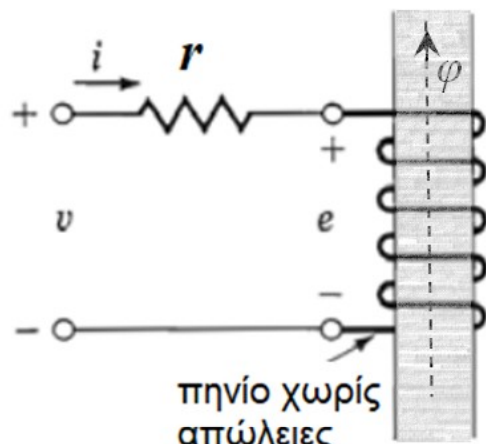
$$W_{\pi} = \int_V \frac{\mu H_0^2}{2} dV$$

Στα μαγνητικά κυκλώματα με διάκενα επειδή η επαγωγή  $B$  είναι αντίστοιχης τιμής στον πυρήνα και στα διάκενα ενώ η ένταση του πεδίου  $H$  είναι πολύ μεγαλύτερη (χιλιάδες φορές μεγαλύτερη) στα διάκενα σε σχέση με τον πυρήνα η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι συγκεντρωμένη στα διάκενα.



# Ενέργεια και συνενέργεια μαγνητικού πεδίου

## I. Ακίνητος οπλισμός



$$dW_e = ei dt$$

$$dW_e = N \frac{d\phi}{dt} i dt$$

$$dW_e = N i d\phi$$

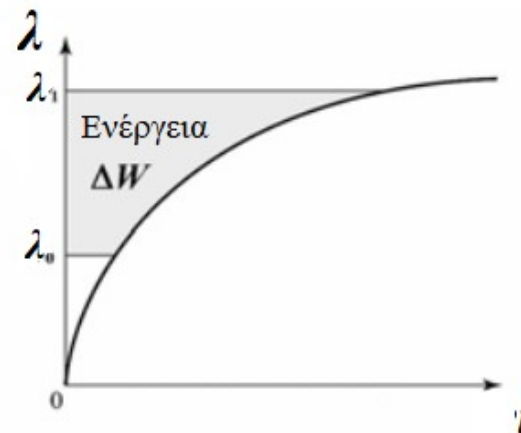
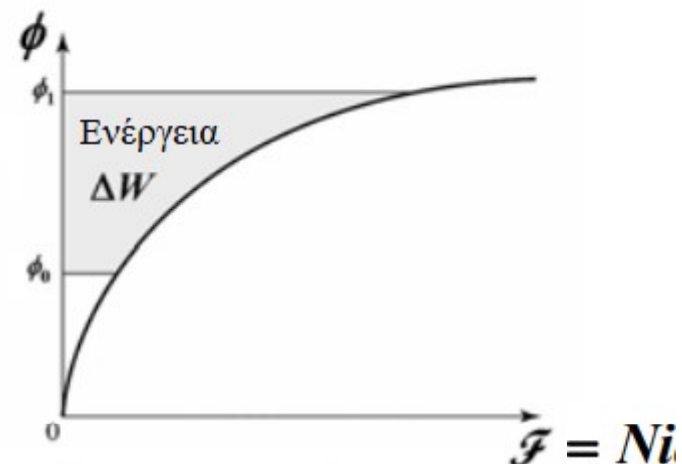
$$dW_e = \mathcal{F} d\phi$$

$$W_e = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \mathcal{F} d\phi = W_{\pi} = \int_0^{\phi_1} \mathcal{F} d\phi - \int_0^{\phi_0} \mathcal{F} d\phi$$

Συνενέργεια:

$$W'_{\pi} = \int_0^{\mathcal{F}_1} \phi d\mathcal{F}$$

$$W_{\pi} + W'_{\pi} = \mathcal{F}_1 \phi_1$$





# Ενέργεια και συνενέργεια μαγνητικού πεδίου

## II. Κινούμενος οπλισμός

Υπολογισμός δυνάμεων από την ενέργεια (αρχή δυνατών έργων):

$$dW_{\pi}(\lambda, x) = i d\lambda - f_{\pi} dx$$

$$dW_{\pi}(\lambda, x) = \frac{\partial W_{\pi}}{\partial \lambda} d\lambda - \frac{\partial W_{\pi}}{\partial x} dx$$

$$f_{\pi}(\lambda, x) = -\frac{\partial W_{\pi}(\lambda, x)}{\partial x}$$

Υπολογισμός δυνάμεων από τη συνενέργεια:

$$W'_{\pi}(i, x) = i \lambda - W_{\pi}(\lambda, x)$$

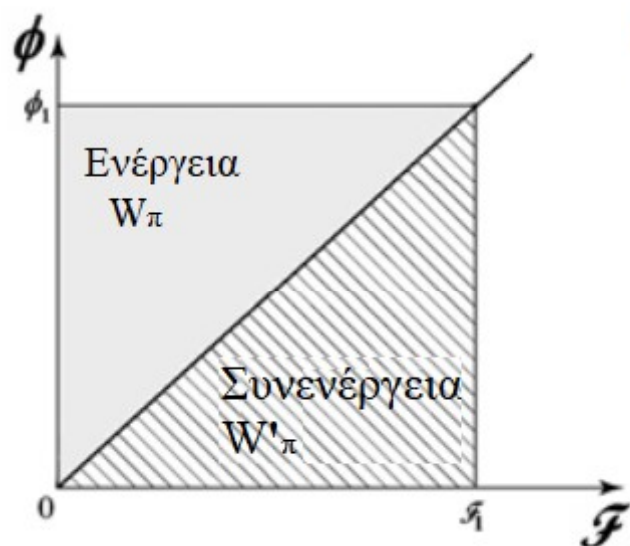
$$dW'_{\pi}(i, x) = \lambda di + f_{\pi} dx$$

$$f_{\pi}(i, x) = \frac{\partial W'_{\pi}(i, x)}{\partial x}$$



# Ενέργεια και συνενέργεια μαγνητικού πεδίου

## Περίπτωση γραμμικών υλικών



$$W_{\pi} = W'_{\pi} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_1 \phi_1 = \frac{1}{2} \mathcal{R} \phi_1^2 = \frac{1}{2} \lambda_1 i_1 = \frac{1}{2} L i^2$$

Υπολογισμός δυνάμεων όταν παραμένει σταθερή η μαγνητική ροή  $\phi$  κατά την κίνηση του οπλισμού:

$$f_{\pi} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx}$$

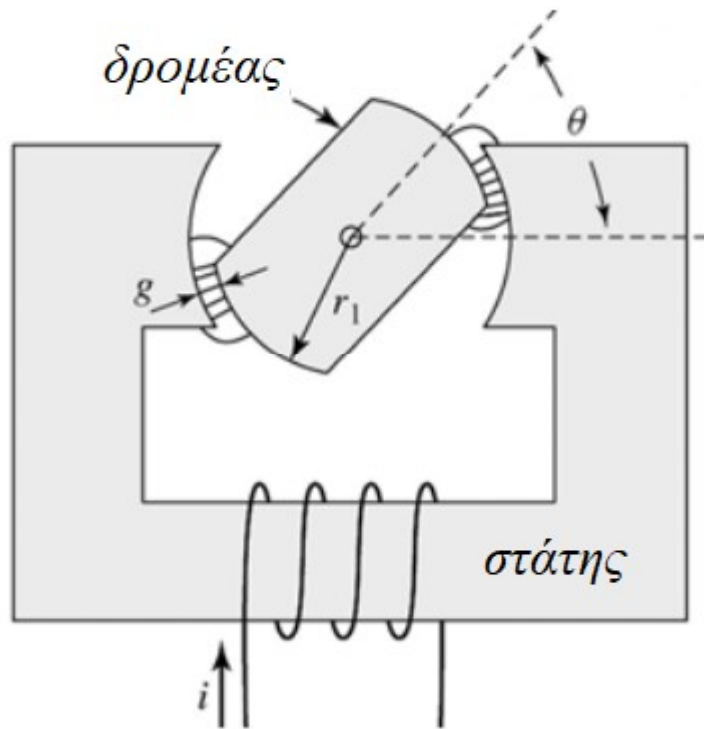
Υπολογισμός δυνάμεων όταν παραμένει σταθερό το ρεύμα  $i$  κατά την κίνηση του οπλισμού:

$$f_{\pi} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$



# Ενέργεια και συνενέργεια μαγνητικού πεδίου

## III. Στρεφόμενος οπλισμός



$$dW_{\pi}(\lambda, \theta) = i d\lambda - T_{\pi} d\theta$$

$$T_{\pi}(\lambda, \theta) = - \frac{\partial W_{\pi}(\lambda, \theta)}{\partial \theta}$$

$$T_{\pi}(i, \theta) = \frac{\partial W'_{\pi}(i, \theta)}{\partial \theta}$$

για γραμμικά υλικά :

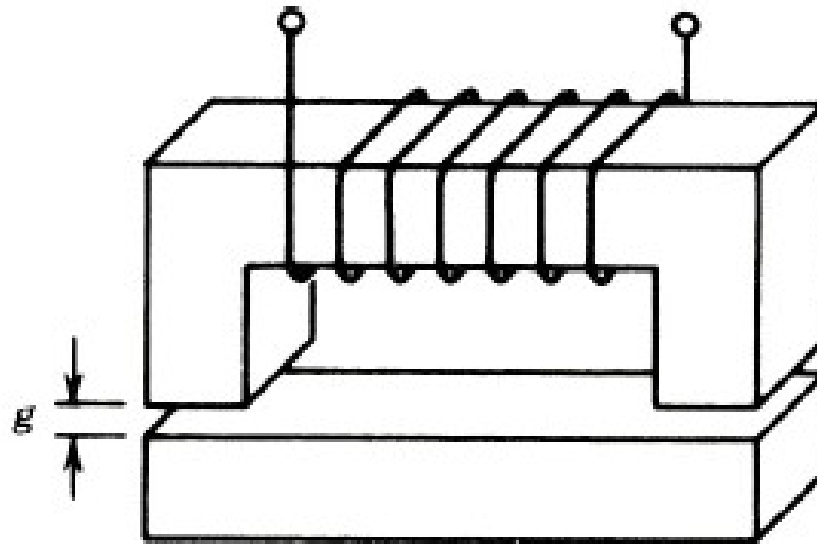
$$T_{\pi} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$





## Εφαρμογή 1

Ο ηλεκτρομαγνήτης του σχήματος έχει μήκος διακένων  $g=5\text{mm}$  διατομή πυρήνα  $6\times 6\text{cm}^2$  και η μαγνητική αντίσταση του σιδηρομαγνητικού υλικού μπορεί να αμεληθεί όπως και η θυσάνωση του πεδίου στα διάκενα. Το πηνίο έχει 300 σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα 20A. Να υπολογισθούν η μαγνητική επαγωγή στα διάκενα, η αυτεπαγωγή του πηνίου, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου και η ασκούμενη δύναμη στον οπλισμό.







## Λύση

Από τον νόμο του Ampere προκύπτει για το πεδίο των διακένων:

$$Ni = H_g l_g = \frac{B_g}{\mu_0} l_g$$

$$\begin{aligned} B_g &= \frac{\mu_0 Ni}{2g} \\ &= \frac{4\pi 10^{-7} \times 300 \times 20}{2 \times 5 \times 10^{-3}} \\ &= 0.754 \text{ tesla} \end{aligned}$$

Η αυτεπαγωγή υπολογίζεται από τη μαγνητική αντίσταση ως εξής:

$$\begin{aligned} L &= \frac{N^2}{R_g} = \frac{N^2 \mu_0 A_g}{l_g} \\ &= \frac{300^2 \times 4\pi 10^{-7} \times 6 \times 6 \times 10^{-4}}{2 \times 5 \times 10^{-3}} \\ &= 40.7 \times 10^{-3} \text{ H} \end{aligned}$$



## Λύση

Η ενέργεια στα διάκενα είναι:

$$\begin{aligned} W &= \frac{B_g^2}{2\mu_0} \times V_g \\ &= \frac{0.754^2}{2 \times 4\pi 10^{-7}} \times 2 \times 6 \times 6 \times 5 \times 10^{-7} \text{ J} \\ &= 8.1434 \text{ J} \end{aligned}$$

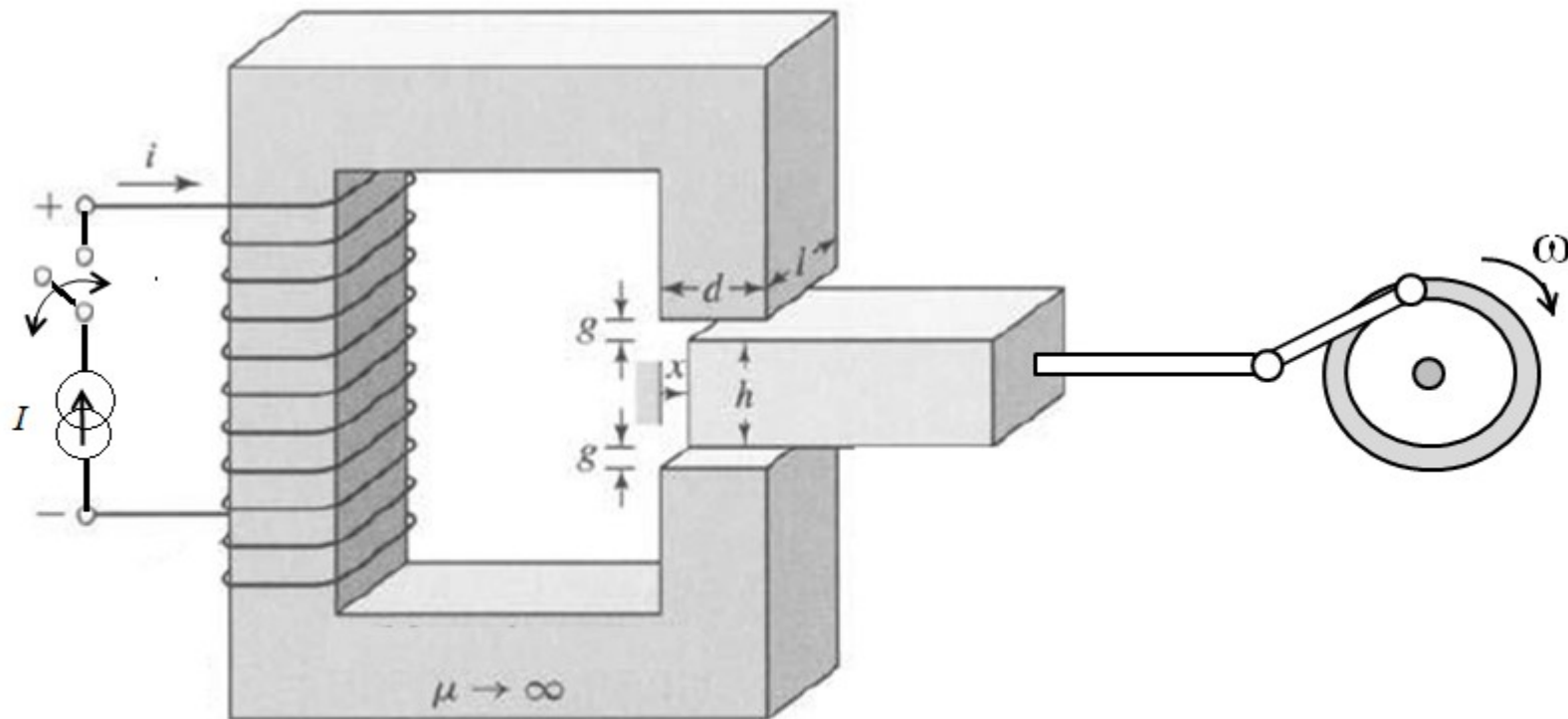
Και η ασκούμενη δύναμη στον σπλισμό:

$$\begin{aligned} f_{\pi} &= \frac{B_g^2}{2\mu_0} \times A_g \\ &= \frac{0.754^2}{2 \times 4\pi 10^{-7}} \times 2 \times 6 \times 6 \times 10^{-4} \text{ N} \\ &= 1628.7 \text{ N} \end{aligned}$$



## Εφαρμογή 2

Ο ηλεκτρομαγνήτης του σχήματος έχει μήκος διακένων  $g=2\text{mm}$ , διαστάσεις διατομής πυρήνα  $d=15\text{cm}$  και  $l=10\text{cm}$  και η μαγνητική αντίσταση του σιδηρομαγνητικού υλικού μπορεί να αμεληθεί όπως και η θυσάνωση του πεδίου στα διάκενα, καθώς  $g \ll h$ . Το πηνίο έχει 1000 σπείρες και τροφοδοτείται από πηγή σταθερού ρεύματος τιμής  $10\text{A}$  με κατάλληλο διακόπτη. Να υπολογισθεί η ασκούμενη δύναμη στον οπλισμό και να εξηγηθεί ο χρονισμός του διακόπτη προκειμένου σε παλινδρομική κίνηση του οπλισμού μεταξύ των θέσεων σύμπτωσης ( $x=0$ ) και αντίθεσης ( $x=d$ ) να ελέγχει τη ροή ισχύος μεταξύ ηλεκτρικού και μηχανικού συστήματος.





## Λύση

Για τη διατομή κάθε διακένου  $A_g$  ισχύει:

$$A_g = l(d - x) = ld \left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 l d (1 - x/d)}{2g}$$

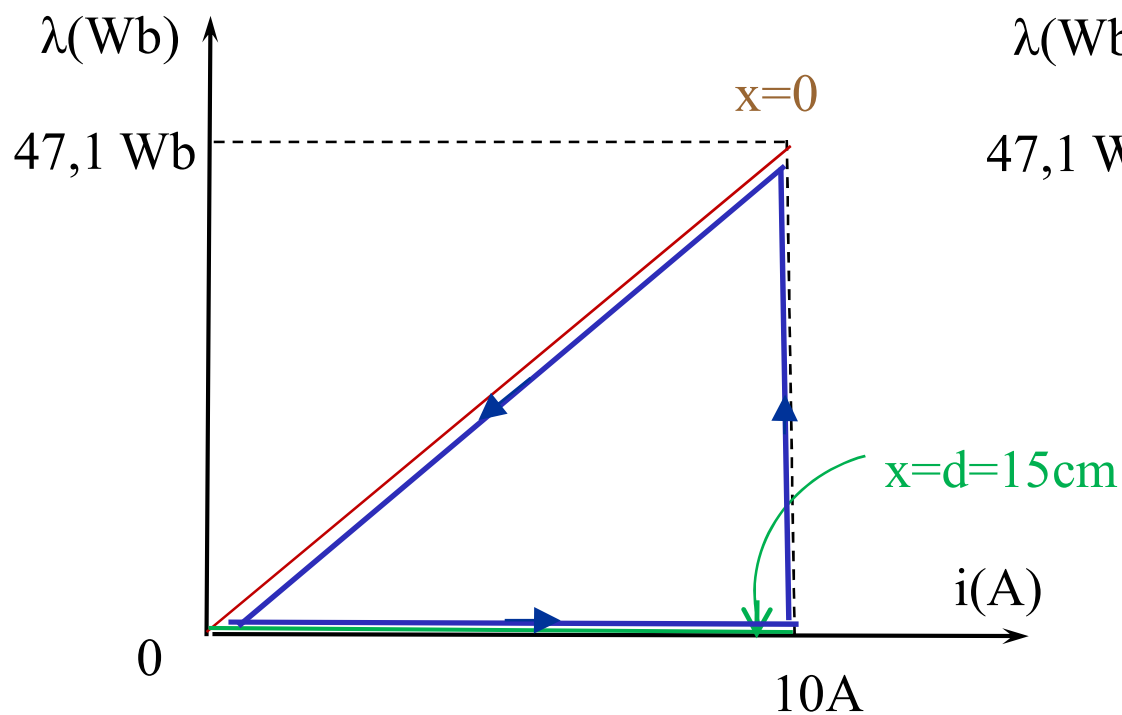
$$W'_\pi = \frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_0 l d (1 - x/d)}{2g} i^2$$

$$f_\pi(i, \theta) = \frac{\partial W'_\pi(i, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0}{4g} l N^2 i^2 = -1570 N$$

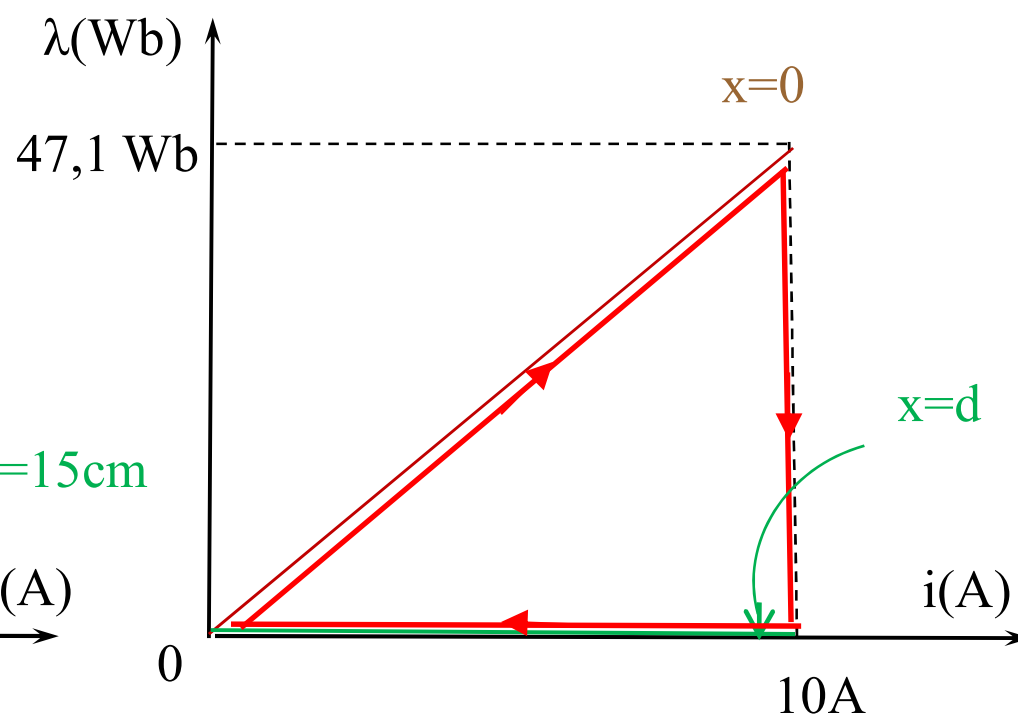


## Λύση

Στο διάγραμμα  $\lambda$ - $i$  καταγράφεται η ενέργεια ανά κύκλο παλινδρόμησης του οπλισμού:



Άνοιγμα διακόπτη στη σύμπτωση και κλείσιμο στην αντίθεση: μεταφορά ενέργειας από το ηλεκτρικό στο μηχανικό σύστημα

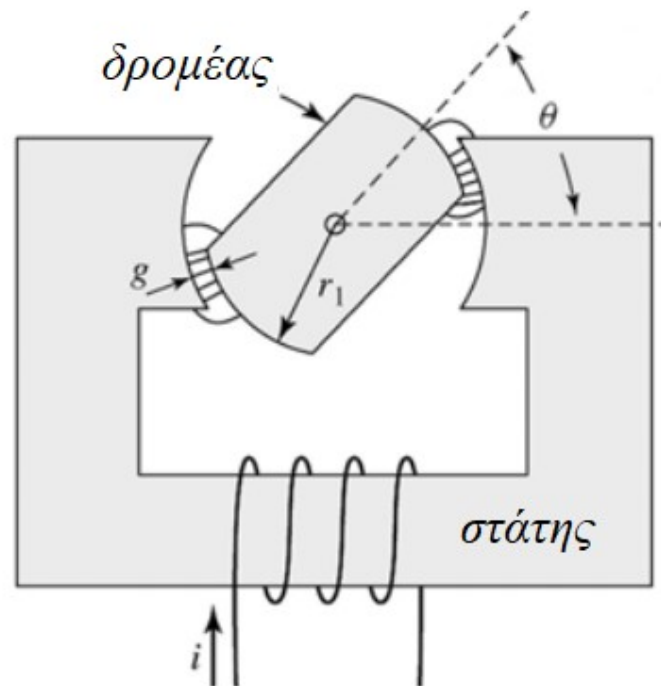


Άνοιγμα διακόπτη στην αντίθεση και κλείσιμο στη σύμπτωση: μεταφορά ενέργειας από το μηχανικό στο ηλεκτρικό σύστημα



## Εφαρμογή 3

Το μαγνητικό κύκλωμα του σχήματος περιλαμβάνει περιστρεφόμενο τμήμα (δρομέα) και ο πυρήνας έχει πάχος  $h$  (κάθετα στη διαφάνεια), το πηνίο βρίσκεται στο σταθερό τμήμα (στάτη) και έχει  $N$  σπείρες, κάθε ένα από τα διάκενα έχει μήκος  $g$  και η μαγνητική αντίσταση του σιδηρομαγνητικού υλικού μπορεί να αμεληθεί όπως και η θυσάνωση του πεδίου στα διάκενα. Να υπολογισθούν οι εκφράσεις της αυτεπαγωγής του πηνίου και της ροπής που ασκείται στον περιστρεφόμενο τμήμα του οπλισμού συναρτήσει της γωνιακής μετατόπισης  $\theta$ .





## Λύση

Από τον νόμο του Ampere προκύπτει για την ένταση του μαγνητικού πεδίου των διακένων:

$$H_g = \frac{Ni}{2g}$$

Θεωρώντας ομοιόμορφη την κατανομή της μαγνητικής επαγωγής στο μέσο του διακένου η μαγνητική ροή στο μαγνητικό κύκλωμα είναι της μορφής:

$$\varphi = \frac{\mu_0 Ni}{2g} h(r_1 + 0.5g)\theta$$

Η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι::

$$L(\theta) = \frac{N\varphi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h(r_1 + 0.5g)\theta}{2g}$$

Επομένως η ροπή προκύπτει::

$$T_\pi = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \left( \frac{\mu_0 N^2 h(r_1 + 0.5g)}{2g} \right)$$