

Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Επαναληπτική Εξεταστική

18 Σεπτεμβρίου 2026

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά 12 μονάδες. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε όσα ερωτήματα επιθυμείτε χωρίς κανέναν περιορισμό.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B , όπου τα A, B είναι σύνολα.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1 (1, 5 + 1 + 1, 5 μονάδες).

(i) Για κάθε σύνολο στα αριστερά, επιλέξτε το ισοπληθικό του από τις τρεις επιλογές στα δεξιά **στην ίδια γραμμή**. Μόνο μία απάντηση είναι σωστή για κάθε δοσμένο σύνολο και δεν ζητείται αιτιολόγηση. Γράψτε στην κόλλα σας ολόκληρη την ισοπληθικότητα, στη μορφή " $A =_c B$ ".

Δοσμένο σύνολο	Ισοπληθικό με		
$\{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$
$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}^{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}^{2026}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	$\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$	$\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{2025}$

(ii) Διατυπώστε το Αξίωμα του Διαχωρισμού.

(iii) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο V με την ιδιότητα $A \in V$ για κάθε σύνολο A .

Θέμα 2 (2 + 2 μονάδες). Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και τη συνάρτηση της πρόσθεσης $+$ σε αυτό, η οποία ορίζεται με αναδρομή ως εξής:

$$n + 0 = n, \quad n + S(m) = S(n + m), \quad \text{όπου } m, n \in \mathbb{N}.$$

(i) Αποδείξτε ότι

$$S(n) + m = S(n + m), \quad \text{όπου } m, n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, το στοιχείο $0' = (0, 0)$ καθώς και τη συνάρτηση $S' : \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{N}'$ που ορίζεται από

$$S'(n, 0) = (n, 1), \quad S'(n, 1) = (S(n), 0), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $Y \subseteq \mathbb{N}'$ τέτοιο ώστε $0' \in Y$ και για κάθε $x \in \mathbb{N}'$ να ισχύει:

$$x \in Y \implies S'(x) \in Y.$$

Αποδείξτε ότι $Y = \mathbb{N}'$.

Γυρίστε σελίδα!

Θέμα 3 (1 + 1 + 2 μονάδες).

(i) Στο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ορίζουμε τη λεξικογραφική διάταξη $\preceq$ ως εξής:

$$(m, k) \preceq (n, \ell) \iff m <_{\mathbb{N}} n \text{ ή } (m = n \text{ και } k \leq_{\mathbb{Z}} \ell),$$

όπου $(m, k), (n, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Παίρνουμε δεδομένο ότι ο $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \preceq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \preceq)$ **δεν είναι** καλά διατεταγμένος χώρος.

(ii) Θεωρούμε τον μερικά διατεταγμένο χώρο

$$(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$$

και τα στοιχεία $A = \{1\}$ και $B = \{2\}$. Βρείτε το $\sup\{A, B\}$ και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(iii) Ορίζουμε το σύνολο

$$P = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{για κάθε } x, y \in A \text{ με } x \neq y \text{ ισχύει } |x - y| \geq 1\}$$

καθώς και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P : $A \leq B \iff A \subseteq B$, όπου $A, B \in P$. Παίρνουμε δεδομένο ότι ο $(P, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

Αποδείξτε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον $(P, \leq)$ έχει άνω φράγμα.
