

Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Κανονική Εξεταστική

Ιανουάριος 2026

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B , όπου τα A, B είναι σύνολα.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1 (4×1 μονάδες).

(i) Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη. Μόνο μία απάντηση είναι σωστή και δεν ζητείται αιτιολόγηση.

(α) $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$	• $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	(β) $\{0, 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$	• $\{0, 1\}^{\mathbb{Q}}$
	• $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$		• $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
	• $\mathcal{P}(\mathbb{R})$		• $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$

(ii) Θεωρούμε αντικείμενα a, b, x, y με $a \neq b$ και $x \neq y$. Αν

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

δείξτε ότι $a = x$ και $b = y$.

(iii) Πότε είναι ένα σύνολο A αριθμήσιμο; (Δώστε τον ορισμό ή έναν χαρακτηρισμό.)

(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε αριθμήσιμα σύνολα A, B το σύνολο $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

Θέμα 2 ($2 + 2$ μονάδες). Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$.

(i) Αποδείξτε ότι αν το $(\mathbb{N}', 0', S')$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών, τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$ τέτοια ώστε $\pi(0) = 0'$ και $\pi(S(n)) = S'(\pi(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{3 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $S_A : A \rightarrow A$ έτσι ώστε η τριάδα $(A, 0, S_A)$ να ικανοποιεί την Αρχή Επαγωγής, δηλαδή αν το $Y \subseteq A$ έχει τις ιδιότητες: α) $0 \in Y$ και β) $\forall y \in A (y \in Y \implies S_A(y) \in Y)$, τότε $Y = A$. Μπορείτε να επικαλεστείτε όλες τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Θέμα 3 ($1 + 2 + 1$ μονάδες).

(i) Δώστε το παράδειγμα ενός μερικά διατεταγμένου χώρου, ο οποίος έχει ακριβώς ένα ελάχιστο στοιχείο και δεν έχει ελάχιστο. Μπορείτε να δώσετε την απάντησή σας με ένα διάγραμμα.

(ii) Ορίζουμε το σύνολο

$$P = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{για κάθε } x, y \in A \text{ ισχύει } 0 \leq_{\mathbb{R}} x \cdot y\}$$

καθώς και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P : $A \leq B \iff A \subseteq B$, όπου $A, B \in P$. Παίρνουμε δεδομένο ότι ο $(P, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

Αποδείξτε ότι για κάθε αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον $(P, \leq)$ το σύνολο $D = \bigcup \mathcal{S}$ είναι άνω φράγμα της $\mathcal{S}$ στον $(P, \leq)$.

(iii) Εξετάστε αν το διάστημα $[0, \infty)$ του $\mathbb{R}$ είναι μεγιστικό στοιχείο του πιο πάνω μερικά διατεταγμένου χώρου $(P, \leq)$.