

Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Επαναληπτική Εξεταστική
Σεπτέμβριος 2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B , όπου τα A, B είναι σύνολα.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1 (1 + 1, 5 + 1 μονάδες).

- (i) Διατυπώστε το Αξίωμα του Απείρου.
(ii) Αποδείξτε, με αναφορά στα αξιώματα που χρησιμοποιήσατε, ότι για κάθε σύνολο A υπάρχει σύνολο B που ικανοποιεί

$$t \in B \iff \exists x (x \in A \text{ και } t = \{x\})$$

για κάθε αντικείμενο t .

- (iii) Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη (μόνο μία απάντηση είναι σωστή).

	• $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$		• $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$
(α) $\mathbb{Z}$	• $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	(β) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$	• $\mathbb{N}^{\mathbb{Q}}$
	• $\mathcal{P}(\mathbb{N})$		• $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

Θέμα 2 (2, 5 + 1 + 1 μονάδες).

- (i) Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και τη συνάρτηση της πρόσθεσης $+$ σε αυτό. Ορίστε τη συνάρτηση του πολλαπλασιασμού στο σύστημα $(\mathbb{N}, 0, S)$ και αποδείξτε ότι έχει την προσεταιριστική ιδιότητα.

Μπορείτε να πάρετε δεδομένες τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης καθώς και την επιμεριστική ιδιότητα.

- (ii) Δώστε το παράδειγμα ενός μερικά διατεταγμένου χώρου με ακριβώς δύο μεγιστικά στοιχεία και κανένα ελαχιστικό. Μπορείτε να δώσετε την απάντησή σας με ένα διάγραμμα.
(ii) Δώστε το παράδειγμα ενός υπεραριθμήσιμου καλά διατεταγμένου χώρου. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 3 (1 + 1, 5 + 1, 5 μονάδες). Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$. Ορίζουμε το σύνολο P_f και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P_f ως εξής

$$P_f = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x, y \in A \text{ ισχύει } f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)\}$$

$$A \leq B \iff A \subseteq B, \quad A, B \in P_f.$$

Θεωρούμε δεδομένο ότι ο $(P_f, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

- (i) Δώστε το παράδειγμα ενός $A \in P_f$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε αλυσίδα $\mathcal{S}$ στο $(P_f, \leq)$ το σύνολο $D = \bigcup \mathcal{S}$ ανήκει στο P_f .
(iii) Δώστε με αιτιολόγηση το παράδειγμα ενός μεγιστικού $A \in P_f$ για τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$