

Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Κανονική Εξεταστική

Ιανουάριος 2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και 30 λεπτά

Διδάσκων:
B. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B , όπου τα A, B είναι σύνολα.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1 (1 + 1 + 1,5 μονάδες).

(i) Δίνεται ένα μη κενό σύνολο A . Εξηγήστε με βάση τα Αξιώματα του Zermelo γιατί ορίζεται το σύνολο

$$B = \{y \in \mathcal{P}(A) \mid \exists x \in A \forall t (t \in y \iff t = x)\}.$$

(ii) Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη. Μόνο μία απάντηση είναι σωστή και δεν ζητείται αιτιολόγηση.

	• $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$		• $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
(α) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$	• $\mathbb{Q}^{2025}$	(β) $[0, 1]^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$	• $\mathbb{R}$
	• $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$		• $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$

(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε μη κενά σύνολα A, B, C αν $B \leq_c C$ τότε $B^A \leq_c C^A$.

Θέμα 2 (2 + 2 μονάδες). Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και τη συνάρτηση $+$ της πρόσθεσης σε αυτό, που ορίζεται με αναδρομή ως ακολούθως:

$$n + 0 = n, \quad n + S(m) = S(n + m), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

(i) Δώστε τον ορισμό της συνάρτησης $\cdot$ του πολλαπλασιασμού στο $(\mathbb{N}, 0, S)$ και αποδείξτε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$n \cdot (m + k) = (n \cdot m) + (n \cdot k), \quad n, m, k \in \mathbb{N}.$$

Μπορείτε να επικαλεστείτε την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης.

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $S' : A \rightarrow A$ έτσι ώστε η τριάδα $(A, 0, S')$ να ικανοποιεί την Αρχή Επαγωγής, δηλαδή αν το $Y \subseteq A$ έχει τις ιδιότητες: α) $0 \in Y$ και β) $\forall a \in A (a \in Y \implies S'(a) \in Y)$, τότε $Y = A$. Μπορείτε να επικαλεστείτε όλες τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Θέμα 3 (1 + 1,5 + 2 μονάδες).

(i) Δείξτε ότι ο επόμενος $\text{Succ}(U)$ ενός καλά διατεταγμένου χώρου U είναι επαγωγικός.

(ii) Δίνονται οι διατεταγμένοι χώροι $\mathbb{N}$ και $\{a\} + \mathbb{N} = \{(0, a)\} \cup \{(1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, όπου a είναι ένα αντικείμενο. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \{a\} + \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f(0, a) = 0$ και $f(1, n) = n + 1$ είναι ομοιότητα.

(iii) Δίνονται δύο καλά διατεταγμένοι χώροι $(U, \leq_U)$ και $(V, \leq_V)$ καθώς και μια συνάρτηση $\pi : U \rightarrow V$ που ικανοποιεί:

$$\forall x, y \in U (x \leq_U y \iff \pi(x) \leq_V \pi(y))$$

και ότι το $\pi[U]$ είναι αρχικό τμήμα του V . Συμβολίζουμε με S_U και S_V τη μερική συνάρτηση του επομένου στο U και στο V αντίστοιχα. Δείξτε ότι για κάθε $x \in U$, στο οποίο ορίζεται η S_U , ισχύει

$$\pi(S_U(x)) = S_V(\pi(x)).$$