Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Επαναληπτική Εξεταστική

Σεπτέμβριος 2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και **30 λεπτά**

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B, όπου τα A, B είναι σύνολα.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1 ($\mathbf{1,5+1+1}$ μονάδες).

(i) Δίνονται τα αντικείμενα a, b, x, y. Εξηγήστε γιατί υπάρχει το σύνολο $\{a, b, x, y\}$ αναφέροντας τα αξιώματα που χρησιμοποιήσατε.

(ii) Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών. Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη (μόνο μία απάντηση είναι σωστή).

		• $\mathcal{A}$			• $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
(α)	$\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$	• $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$	(β)	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	• $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
		• $\mathcal{P}(\mathbb{N})$			• $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$

(iii) Δίνονται δύο σύνολα A, B. Πότε ένα σύνολο $f \subseteq A \times B$ είναι συνάρτηση από το A στο B;

Θέμα 2 ($\mathbf{1+1,5+2}$ μονάδες). Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και την πράξη του πολλαπλασιασμού $\cdot$ στο $(\mathbb{N}, 0, S)$, η οποία ορίζεται με αναδρομή ως ακολούθως:

$$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot S(m) = n \cdot m + n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

όπου $+$ είναι η πράξη της πρόσθεσης στο $(\mathbb{N}, 0, S)$.

(i) Δείξτε ότι $0 \cdot m = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι $n \cdot m = m \cdot n$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι $S(x) \cdot y = x \cdot y + y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{N}$.

(iii) Θεωρούμε ένα σύνολο $\mathbb{N}'$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί. Ορίζουμε

$$0' = \pi(0) \text{ και } S' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}' : S'(y) = \pi(S(\pi^{-1}(y))).$$

Αποδείξτε την Αρχή Επαγωγής για την τριάδα $(\mathbb{N}', 0', S')$:
αν το $Y \subseteq \mathbb{N}'$ ικανοποιεί (α) $0' \in Y$ και (β) $\forall y \in \mathbb{N}'(y \in Y \implies S'(y) \in Y)$, τότε $Y = \mathbb{N}'$.

Θέμα 3 ($\mathbf{1,5+2,5}$ μονάδες). Ορίζουμε το σύνολο

$$P = \{(A, f) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \mid \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση από το } A \text{ στο } \mathbb{R}\}$$

και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P ως ακολούθως:

$$(A, f) \leq (B, g) \iff A \subseteq B \;\text{ και }\; \forall x \in A\,(f(x) = g(x)), \quad \text{όπου } (A, f), (B, g) \in P.$$

(i) Αποδείξτε ότι η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο σύνολο P. Είναι η $\leq$ ολική διάταξη στο P;

(ii) Δίνεται μια αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον $(P, \leq)$. Ορίζουμε τα σύνολα $A_0 \subseteq \mathbb{R}$ και $f_0 \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ως ακολούθως:

$$x \in A_0 \iff \exists (A, f) \in \mathcal{S}\ (x \in A)$$
$$(x, y) \in f_0 \iff \exists (A, f) \in \mathcal{S}\ (x \in A \;\&\; y = f(x)), \quad \text{όπου } x, y \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι το ζεύγος (A_0, f_0) είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της $\mathcal{S}$ στον $(P, \leq)$.