Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Κανονική Εξεταστική

Ιούλιος 2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και **30 λεπτά**

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B, όπου τα A, B είναι σύνολα.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1 (**1 + 1 + 1,5** μονάδες)**.**

(i) Διατυπώστε το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου.

(ii) Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών. Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη (μόνο μία απάντηση είναι σωστή).

	• $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$			• $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$
(α) $\mathcal{A}$	• $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$		(β) $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$	• $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$
	• $\mathcal{P}(\mathbb{N})$			• $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

(iii) Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο V με την ιδιότητα για κάθε αντικείμενο x να ισχύει

$$x \in V \iff \text{το } x \text{ είναι σύνολο.}$$

Θέμα 2 (**2 + 2,5** μονάδες)**.**

(i) Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση της πρόσθεσης $+$ με την αναδρομή:

$$m + 0 = m, \quad m + S(n) = S(m + n), \quad \text{όπου } m, n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι:

(α) $m + 2 = S(S(m))$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου $2 = S(S(0))$, και

(β) $0 + n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε το σύνολο P_f καθώς και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P_f ως ακολούθως:

$$P_f = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ο περιορισμός της } f \text{ στο } A \text{ είναι ένα-προς-ένα συνάρτηση}\}$$
$$A \leq B \iff A \subseteq B, \quad A, B \in P_f.$$

Παίρνοντας δεδομένο ότι ο $(P_f, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος δείξτε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον $(P_f, \leq)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Θέμα 3 (**1 + 1,5 + 1,5** μονάδες)**.** Δίνεται ένας καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq_U)$ και ένα αντικείμενο $r \notin U$. Ορίζουμε το σύνολο $V = U \cup \{r\}$ καθώς και τη διμελή σχέση $\leq$ στο V ως ακολούθως:

$$x \leq y \iff (x \in U \;\&\; y \in U \;\&\; x \leq_U y) \lor y = r.$$

(i) Δείξτε για κάθε $x, y \in V$ ότι: (α) αν $x \leq y \leq x$ τότε $x = y$ καθώς και (β) ισχύει $x \leq y$ ή $y \leq x$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε μη κενό υποσύνολο του V έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς $\leq$.
(Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η $\leq$ είναι διάταξη στο V).

(iii) Δίνεται ένα $I \subseteq V$ με την ιδιότητα για κάθε $x, y \in V$ με $x \leq y$ αν $y \in I$ τότε $x \in I$. Αν $I \neq V$ αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in V$ με $I = \{x \in V \mid x < y\}$.