Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Φεβρουάριος 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και **30 λεπτά**

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.

Διευκρινίζεται ότι μέσα στα Αξιώματα του μαθήματος συμπεριλαμβάνεται και το Αξίωμα Επιλογής.

Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A και το B^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B, όπου τα A, B είναι σύνολα.

Θέμα 1 ($\mathbf{3 \times 1}$ μονάδες).

(i) Δίνονται τρία αντικείμενα x, y, z. Εξηγήστε γιατί ορίζεται το σύνολο $\{x, y, z\}$ με αναφορά στα Αξιώματα που χρειάζονται.

(ii) Αντιστοιχίστε το σύνολο στα αριστερά με το ισοπληθικό του στη δεξιά στήλη (μόνο μία απάντηση είναι σωστή).

(α) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(β) $\underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{256 \text{ φορές}}$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$

(iii) Δώστε το παράδειγμα ενός μερικά διατεταγμένου χώρου με ακριβώς δύο ελαχιστικά στοιχεία και κανένα μεγιστικό. Μπορείτε να κάνετε μόνο ένα διάγραμμα, δεν απαιτείται απόδειξη.

Θέμα 2 ($\mathbf{2+1+1,5}$ μονάδες). Δίνεται ένας καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με τις ιδιότητες: (α) το U είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και (β) για κάθε $y \in U$ το σύνολο $\mathrm{seg}(y) = \{x \in U \mid x < y\}$ είναι αριθμήσιμο.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ένας τέτοιος χώρος $(U, \leq)$.

(ii) Δείξτε ότι ο $(U, \leq)$ δεν είναι όμοιος με κανέναν επόμενο $\mathrm{Succ}(V)$ ενός καλά διατεταγμένου χώρου $(V, \leq_V)$.

(iii) Δίνεται μια συνάρτηση $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε για κάθε αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ το $\Phi(A)$ είναι επίσης αριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε την οικογένεια $(A_y)_{y \in U}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με υπερπεπερασμένη αναδρομή ως εξής:

$$a \in A_y \iff \exists x < y \text{ τέτοιο ώστε } a \in \Phi(A_x), \quad \text{όπου } y \in U.$$

Δείξτε ότι το A_y είναι αριθμήσιμο σύνολο για κάθε $y \in U$.

Θέμα 3 ($\mathbf{2,5+1+1}$ μονάδες). Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο P_f και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P_f ως εξής

$$P_f = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x, y \in A \text{ ισχύει } f(x+y) = f(x) + f(y)\}$$

$$A \leq B \iff A \subseteq B, \quad A, B \in P_f.$$

Θεωρούμε δεδομένο ότι ο $(P_f, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(i) Δείξτε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{S}$ στον $(P_f, \leq)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

(ii) Εξηγήστε γιατί ο $(P_f, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο.

(iii) Δώστε το παράδειγμα μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία το $[0, \infty)$ είναι μεγιστικό στοιχείο του P_f.