Εξέταση στη Θεωρία Συνόλων

Φεβρουάριος 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης:
1 ώρα και **30 λεπτά**

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις. Υπάρχουν συνολικά **12 μονάδες**. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό. Διευκρινίζεται ότι μέσα στα Αξιώματα του μαθήματος συμπεριλαμβάνεται και το Αξίωμα Επιλογής.

Θέμα 1 ($\mathbf{1 + 1,5 + 1}$ μονάδες)**.**

(i) Για κάθε αντικείμενο x ορίζουμε

$$[x] = \{\varnothing, \{x\}\}.$$

Να αναφέρετε όλα τα Αξιώματα που χρησιμοποιούμε για να αιτιολογήσουμε ότι το $[x]$ είναι σύνολο.

(ii) Εξετάστε, με πλήρη αιτιολόγηση της απάντησής σας, αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$[x] = [y] \implies x = y$$

για κάθε αντικείμενα x, y, όπου τα $[x]$, $[y]$ είναι όπως στο (i).

(iii) Ποια από τα σύνολα

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$; Δεν χρειάζεται απόδειξη. Το $\mathcal{P}$ είναι το σύμβολο του δυναμοσυνόλου.

Θέμα 2 ($\mathbf{1 + 2 + 1}$ μονάδες)**.** Δίνεται ένας καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ και μια συνάρτηση $\tau : U \to U$.

(i) Αν το $y \in U$ είναι οριακό σημείο του U δείξτε ότι για κάθε $a \in U$ με $a < y$ υπάρχει $x \in U$ με $a < x < y$.

(ii) Αν η τ σέβεται τις διατάξεις δείξτε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι $y \leq \tau(y)$ για κάθε $y \in U$.

(iii) Αν $U = Succ(\mathbb{N})$ = ο επόμενος χώρος του $\mathbb{N}$, όπου το $\mathbb{N}$ λαμβάνεται με τη γνωστή του διάταξη, να δώσετε το παράδειγμα μιας συνάρτησης $\pi : U \to U$ που σέβεται τις διατάξεις και **δεν είναι** επί.

Θέμα 3 ($\mathbf{2,5 + 1 + 1}$ μονάδες)**.** Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών και μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$P = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ο περιορισμός της } f \text{ στο } A \text{ είναι } 1-1\}$$

και τη διμελή σχέση $\leq$ στο P,

$$A \leq B \iff A \subseteq B, \qquad \text{όπου } A, B \in P.$$

Παίρνουμε δεδομένο ότι το ζεύγος $(P, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.

(i) Δείξτε ότι κάθε αλυσίδα στον $(P, \leq)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

(ii) Γιατί έχει ο $(P, \leq)$ μεγιστικό στοιχείο;

(iii) Βρείτε ένα μεγιστικό στοιχείο του $(P, \leq)$ όταν η f δίνεται από τον τύπο $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.