Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

11ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. 1) Για καλά διατεταγμένους χώρους U, V ορίζουμε

$$U \leq_o V \iff \text{υπάρχει αρχική ομοιότητα } \pi : U \rightarrowtail V \quad \text{και}$$
$$U <_o V \iff U \leq_o V \;\&\; U \neq_o V.$$

2) Θεώρημα Συγκρισιμότητας Καλά Διατεταγμένων χώρων: για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U και V έχουμε $U \leq_o V$ ή $V \leq_o U$.

Άσκηση 1. Για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V δείξτε ότι

$$U <_o V \iff (\exists x \in V)[U =_o seg_V(x)],$$

όπου $seg_V(x)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $y \in V$ με $y <_V x$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι τα αρχικά τμήματα του V είναι είτε το V είτε σύνολα της μορφής $seg_V(x)$ όπου $x \in V$. (Γνωστό από προηγούμενη άσκηση.)

Άσκηση 2 (7.28. Άσκηση)**.** Δείξτε ότι η σύνθεση αρχικών ομοιοτήτων είναι αρχική ομοιότητα.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x7.14)**.** Δείξτε ότι για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W έχουμε

$$U <_o V \;\&\; V \leq_o W \implies U <_o W$$
$$U \leq_o V \;\&\; V <_o W \implies U <_o W.$$

(Θεωρήστε γνωστή τη μεταβατική ιδιότητα.)

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x7.15)**.** Αν κ, λ είναι καλά διατάξιμοι πληθάριθμοι τότε $\kappa \leq_c \lambda$ ή $\lambda \leq_c \kappa$.

Ένα μη κενό σύνολο A είναι **καλά διατάξιμο** αν υπάρχει μια καλή διάταξη $\leq$ στο A.

Άσκηση 5 (Απαιτητική)**.**

(i) Έστω V ένας καλά διατεταγμένος χώρος που είναι άπειρο σύνολο και που δεν έχει οριακά σημεία. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to V$ με

$$f(0_{\mathbb{N}}) = 0_V \quad \text{και} \quad f(n + 1_{\mathbb{N}}) = \begin{cases} S_V(f(n)), & \text{αν υπάρχει } y \in V \text{ με } f(n) <_V y \\ 0_V, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι ομοιότητα και επομένως ισχύει $V =_o \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Η ιδέα είναι να απεικονίσουμε το $0_{\mathbb{N}}$ στο 0_V, το $1_{\mathbb{N}}$ στο $S_V(0_V)$ κ.ο.κ. Η δεύτερη περίπτωση στη διακλάδωση του ορισμού της f (δηλαδή το "αλλιώς") μπαίνει γιατί δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι για κάθε n θα υπάρχει $y \in V$ με $f(n) <_V y$. Το "αλλιώς" δεν θα συμβαίνει όμως ποτέ, δηλαδή θα είμαστε πάντα στην πρώτη περίπτωση.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο V που είναι άπειρο σύνολο έχουμε $1 + V =_0 V$, όπου $1 = \{\varnothing\}$ και $+$ είναι η πρόσθεση μεταξύ καλά διατεταγμένων χώρων.

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x7.16 - Απαιτητική)**.** Αν κ είναι ένας άπειρος καλά διατάξιμος πληθάριθμος τότε $\kappa + 1 =_c \kappa$.

Σχόλιο. Εδώ το σύμβολο $+$ δηλώνει την πρόσθεση μεταξύ πληθαρίθμων, δηλαδή

$$\kappa + 1 = |\,(\{0\} \times \kappa) \bigcup (\{1\} \times \{1\})\,| =_c (\{0\} \times \kappa) \bigcup \{(1,1)\}.$$

Για κάθε καλή διάταξη $\leq$ στο κ μπορούμε να βρούμε εύκολα μια καλή διάταξη στο $\kappa + 1$ έτσι που ο $(\kappa + 1, \leq')$ να είναι όμοιος με τον επόμενο του $(\kappa, \leq)$.

Βλέπουμε από αυτή την άσκηση ότι οι δύο έννοιες $\leq_o$ και $\leq_c$ διαφέρουν στα άπειρα σύνολα που επιδέχονται καλής διάταξης: από τη μία έχουμε $\kappa =_c \kappa + 1$ ενώ από την άλλη $(\kappa, \leq) <_o (\kappa + 1, \leq')$.

Άσκηση 7. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος, A ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{D} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ με $\mathcal{D}(X) \subseteq X$ για κάθε $X \in \mathcal{P}(A)$.

Ορίζουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή την οικογένεια $(C_x)_{x \in U}$ υποσυνόλων του A ως εξής:

$$\begin{aligned} C_{0_U} &= A \\ C_y &= \mathcal{D}(C_x) \quad \text{αν } y = Sx, \\ C_y &= \bigcap_{x<y} C_x \quad \text{αν το } y \text{ είναι οριακό σημείο.} \end{aligned}$$

(i) Δείξτε με επαγωγή στο y ότι για κάθε $z, y \in U$ με $z \leq y$ έχουμε $C_y \subseteq C_z$.

(ii) (Για όσες/όσους γνωρίζουν τοπολογία) Αν $A = [0,1]^2$ και η συνάρτηση $\mathcal{D}$ ικανοποιεί επιπλέον την εξής ιδιότητα:

$$X \text{ μη κενό κλειστό υποσύνολο του } [0,1]^2 \implies \mathcal{D}(X) \text{ μη κενό κλειστό υποσύνολο του } [0,1]^2,$$

δείξτε ότι κάθε C_y είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$.