Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

10ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Σε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ ορίζουμε

$$S_U(x) \equiv Sx = \min\{y \in U \mid x < y\}, \text{ εφόσον υπάρχει } y \in U \text{ με } x < y$$
$$seg(x) = \{y \in U \mid y < x\},$$

όπου $x \in U$.

Για δύο καλά διατεταγμένους χώρους $(U, \leq_U)$ και $(V, \leq_V)$ ορίζουμε $U =_o V$ αν υπάρχει $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V$ 1-1 και επί που **σέβεται τις διατάξεις**, δηλαδή για κάθε $x, y \in U$ ισχύει

$$x \leq_U y \iff \pi(x) \leq_V \pi(y).$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο U είναι **όμοιος** με τον V και η πιο πάνω π ονομάζεται **ομοιότητα**.

Σχόλιο. Η έννοια της ομοιότητας ορίζεται και μεταξύ μερικά διατεταγμένων χώρων με τον ίδιο τρόπο, αλλά εμείς θα περιοριστούμε σε ομοιότητες μεταξύ καλά διατεταγμένων χώρων.

Άσκηση 1. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος. Δείξτε ότι για κάθε $x \in U$ έχουμε

$$seg(Sx) = seg(x) \cup \{x\}.$$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με μέγιστο στοιχείο είναι επαγωγικός, δηλαδή κάθε αλυσίδα (ισοδύναμα κάθε υποσύνολό του) έχει supremum.

Άσκηση 3. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος και $V \subseteq U$. Το V ονομάζεται **αρχικό τμήμα** του U αν για κάθε $y \in V$ και κάθε $x \in U$, αν $x \leq y$ τότε $x \in V$. Με άλλα λόγια το V "δεν παραλείπει" τα μικρότερα στοιχεία.

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το V είναι αρχικό τμήμα του U.

(ii) Είτε $V = U$ είτε υπάρχει $x \in U$ με $V = seg(x)$.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x7.1)**.** Δείξτε ότι κάθε γραμμική διάταξη ενός πεπερασμένου συνόλου είναι καλή διάταξη.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι κάθε μερική διάταξη σε ένα πεπερασμένο σύνολο έχει μεγιστικό και ελαχιστικό στοιχείο. (Άσκηση σε προηγούμενο φυλλάδιο.)

Άσκηση 5. Θεωρούμε δύο καλά διατεταγμένους χώρους $(U, \leq_U)$, $(V, \leq_V)$. Δείξτε με υπερπεπερασμένη επαγωγή ότι υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $\pi : U \to V$ που ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \pi(0_U) &= 0_V \\ \pi(S_U(x)) &= S_V(\pi(x)) && \text{αν } x \in U, \\ \pi(y) &= \sup\{\pi(x) \mid x <_U y\} && \text{αν } y \text{ οριακό σημείο.} \end{aligned}$$

Ορισμός: Το **άθροισμα** $P + Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ είναι το σύνολο
$$P + Q = (\{0\} \times P) \bigcup (\{1\} \times Q)$$
(όπου $0 = \varnothing$ και $1 = \{\varnothing\}$) μαζί με τη διάταξη
$$(i, x) \leq (j, y) \iff [i = j = 0 \;\&\; x \leq_P y] \;\vee\; [i = j = 1 \;\&\; x \leq_Q y] \;\vee\; [i = 0 \;\&\; j = 1]$$
όπου $(i, x), (j, y) \in P + Q$. Παρατηρήστε ότι αν $i = 0$ τότε $x \in P$ και αν $i = 1$ τότε $x \in Q$.

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίγραφα των P, Q (τα $\{0\} \times P$ και $\{1\} \times Q$ αντίστοιχα) και τοποθετούμε το αντίγραφο του P "πριν" από το αντίγραφο του Q (αυτό προκύπτει από το $(0, x) \leq (1, y)$).

Το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων U, V σχηματικά:

$$\underbrace{\underset{(0,0_U)}{\blacksquare} \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \underset{(0,x)}{\bullet} \quad \cdots}_{\{0\} \times U} \quad \underbrace{\underset{(1,0_V)}{\blacksquare} \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \underset{(1,y)}{\bullet} \quad \cdots}_{\{1\} \times V}$$

Άσκηση 6 (Προβλήματα x7.2-x7.6)**.** Δείξτε ή απαντήστε στα ακόλουθα όσον αφορά το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

(i) Αν $U =_o U'$ και $V =_o V'$ τότε $U + V =_o U' + V'$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, U', V, V'. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(ii) $U + (V + W) =_o (U + V) + W$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(iii) Αν U είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος ποιος είναι ο χώρος $U + \{0\}$ ως προς τη σχέση ομοιότητας $=_o$; (Συνοπτική απάντηση.)

(iv) Αν U, V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι τότε το άθροισμα $U + V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

(v) Γιατί ισχύει $\{0\} + \mathbb{N} =_0 \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \neq_0 \mathbb{N} + \{0\}$; Συμπεράνετε ότι η πρόσθεση καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι μεταθετική πράξη.