Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών

8ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση: Σταθεροποιούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και ορίζουμε τις σχέσεις $\leq$, και $<$ ως εξής:

$$n \leq m \iff (\exists k \in \mathbb{N})[n + k = m]$$
$$n < m \iff n \leq m \;\&\; n \neq m,$$

όπου $n, m \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 1.

(i) Δείξτε ότι $n < Sn$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$, αν $k < n$ τότε $Sk \leq n$.

Λύση.

(i) Όπως έχουμε δει $n + S0 = S(n + 0) = Sn$ άρα $n \leq S_n$. Από γνωστό Λήμμα $Sn \neq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $n < Sn$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Αφού $k < n$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $k + m = n$. Επιπλέον $m \neq 0$ γιατί $k \neq n$. Άρα $m = St$ για κάποιο $t \in \mathbb{N}$. Τότε

$$n = k + m = k + St = Sk + t.$$

Αφού $Sk + t = n$ έχουμε $Sk \leq t$.

Άσκηση 2. Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \subseteq [0, n)$ το A είναι πεπερασμένο.

(ii) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο B και κάθε $A \subseteq B$ το A είναι πεπερασμένο σύνολο.

Λύση.

(i) Με επαγωγή στο n. Αν $n = 0$ τότε $A \subseteq [0, 0) = \varnothing$ και άρα το $A = \varnothing$ είναι περασμένο.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι κάθε $A \subseteq [0, n)$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Δείχνουμε ότι ισχύει το ίδιο για το Sn στη θέση του n.

Έστω $A \subseteq [0, Sn)$. Αφού $[0, Sn) = [0, n) \cup \{n\}$ (γνωστή άσκηση) έχουμε

$$A = (A \cap [0, n)) \cup (A \cap \{n\}).$$

Το σύνολο $A \cap [0, n)$ είναι υποσύνολο του $[0, n)$ και επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση είναι πεπερασμένο. Αν $A \cap \{n\} = \varnothing$ τότε $A = A \cap [0, n)$ και επομένως το A είναι πεπερασμένο.

Υποθέτουμε ότι $A \cap \{n\} \neq \varnothing$, δηλαδή ότι $n \in A$. Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ με $A \cap [0, n) =_c [0, m)$ και μια συνάρτηση $f : [0, m) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A \cap [0, n)$ 1-1 και επί. Τότε η συνάρτηση

$$g : [0, Sm) = [0, m) \cup \{m\} \longrightarrow A = (A \cap [0, n)) \cup \{n\} : g(k) = \begin{cases} f(k), & k \in [0, m), \\ n, & k = m, \end{cases}$$

είναι 1-1 και επί. Άρα το A είναι πεπερασμένο.

(ii) Αυτό είναι άμεσο από το (i). Αν $A \subseteq B$ και $B =_c [0, n)$ τότε το A είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο $[0, n)$. Επομένως το A είναι ισοπληθικό με ένα πεπερασμένο σύνολο. Είναι άμεσο ότι και το A είναι πεπερασμένο.

Άσκηση 3. Θεωρούμε δύο **ξένα** πεπερασμένα σύνολα A, B και $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$ και $=_c [0, n)$. Δείξτε με επαγωγή στο $\mathbb{N}$ ότι $[0, m + n) =_c A \cup B$.

Λύση.

Σταθεροποιούμε τα A, m και δείχνουμε ότι για κάθε B, n με $B =_c [0, n)$ ισχύει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Για $n = 0$, αφού $B =_c [0, n)$ έχουμε $B = \varnothing$. Άρα $[0, m + n) = [0, m)$ και $A \cup B = A$. Αφού $A =_c [0, m)$ προκύπτει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο B με $B =_c [0, n)$ ισχύει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο B με $B =_c [0, Sn)$ και μια 1-1 και επί συνάρτηση

$$g : [0, Sn) = [0, n) \cup \{n\} \longrightarrow B.$$

Η ιδέα είναι να αφαιρέσουμε ένα στοιχείο από το B και να εφαρμόσουμε την Επαγωγική Υπόθεση.

Ορίζουμε $B' = g[[0, n)]$. Τότε $B' =_c [0, n)$ και άρα από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση

$$f : [0, m + n) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \cup B'.$$

Έχουμε $B = B' \cup \{g(n)\}$, $g(n) \notin B'$ (αφού η g είναι 1-1) και $g(n) \notin A$ (αφού τα A, B είναι ξένα). Επιπλέον

$$[0, m + Sn) = [0, S(m + n)) = [0, m + n) \cup \{m + n\}.$$

Ορίζουμε

$$h : [0, m + Sn) \longrightarrow A \cup B : h(k) = \begin{cases} f(k), & k \in [0, m + n), \\ g(n), & k = m + n. \end{cases}$$

Τότε η h είναι 1-1 και επί. Επομένως $A \cup B =_c [0, m + Sn)$.

Άσκηση 4 (Ισοδύναμες Διατυπώσεις της Αρχής του Περιστερεώνα)**.** Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Η Αρχή του Περιστερεώνα: Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο και η συνάρτηση $f : A \to A$ είναι 1-1 τότε $f[A] = A$.

(ii) Για κάθε φυσικούς αριθμούς $m < n$ **δεν** υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : [0, n) \to [0, m)$.

(iii) Για κάθε δύο πεπερασμένα σύνολα A, B και για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$ και $B =_c [0, n)$, αν $m < n$ τότε $A <_c B$.

(iv) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A υπάρχει **μοναδικό** $n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, n)$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να αποδείξετε τις ισοδυναμίες κυκλικά (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). Στην τελευταία κατεύθυνση θεωρήστε τα ξένα σύνολα $f[A]$ και $A \setminus f[A]$ και εφαρμόστε την Άσκηση 3.

Λύση.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω $m < n$ και $f : [0, n) \to [0, m)$. Τότε $[0, m) \subseteq [0, n)$ και άρα $f : [0, n) \to [0, n)$. Αν η f ήταν 1-1 από την Αρχή του Περιστερεώνα για $A = [0, n)$ η f θα ήταν και επί. Άρα για το $m \in [0, n)$ θα υπήρχε $k \in [0, n)$ με $f(k) = m$. Αλλά τότε θα είχαμε $f(k) = m \notin [0, m)$ που είναι άτοπο αφού $f : [0, n) \to [0, m)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Έχουμε $A =_c [0, m)$ και $B =_c [0, n)$. Υποθέτουμε ότι $m < n$. Επομένως $A =_c [0, m) \leq_c [0, n) =_c B$ και άρα $A \leq_c B$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $A =_c B$. Τότε

$$[0, m) =_c A =_c B =_c [0, n)$$

και ειδικότερα θα υπήρχε μια 1-1 συνάρτηση $f : [0, n) \to [0, m)$ που αντιτίθεται στην υπόθεση. Άρα $A \neq_c B$ και $A <_c B$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Θεωρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m) =_c [0, n)$. Αν τα m, n ήταν διαφορετικά, εφόσον η διάταξη $\leq$ είναι γραμμική ο ένας φυσικός θα ήταν μικρότερος από τον άλλο. Ας πούμε $m < n$.

Τότε από το (iii) εφαρμοσμένο στα σύνολα $A' = [0, m) =_c [0, m)$ και $B' = [0, n) =_c [0, n)$ προκύπτει $[0, m) <_c [0, n)$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε $[0, m) =_c A =_c [0, n)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Έστω A πεπερασμένο σύνολο, και $f : A \rightarrowtail A$ 1-1 συνάρτηση. Αφού το A είναι πεπερασμένο υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$. Προφανώς $f[A] =_c A =_c [0, m)$.

Από την Άσκηση 2 - (ii) το σύνολο $A \setminus f[A] \subseteq A$ είναι επίσης πεπερασμένο. Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$A \setminus f[A] =_c [0, n).$$

Εφαρμόζουμε την Άσκηση 3 στα ξένα σύνολα $f[A]$ και $A \setminus f[A]$ και έχουμε ότι

$$[0, m+n) =_c f[A] \cup (A \setminus f[A]) = A,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $f[A] \subseteq A$.

Επομένως έχουμε $A =_c [0, m+n)$ και $A =_c [0, m)$. Από την υπόθεση (iv) προκύπτει $m = m+n$ και άρα $n = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $A \setminus f[A] = \varnothing$ και εφόσον $f[A] \subseteq A$ έχουμε $f[A] = A$.

Σχόλιο: Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης και της Αρχής του Περιστερώνα ορίζουμε στην κλάση των πεπερασμένων συνόλων τον τελεστή,

$$A\text{: πεπερασμένο} \;\mapsto\; \#A = \text{ο μοναδικός } n \in \mathbb{N} \text{ με } A =_c [0, n).$$

Άσκηση 5. Επαληθεύστε τις ιδιότητες του ισχυρού τελεστή πληθικότητας για τον $A \mapsto [0, \#A)$, όπου το A είναι πεπερασμένο σύνολο.

Δείξτε επίσης ότι για πεπερασμένα σύνολα A, B έχουμε

$$A \leq_c B \iff \#A \leq \#B$$

Λύση.

Είναι σαφές από τον ορισμό ότι $A =_c [0, \#A)$ για κάθε πεπερασμένο σύνολο A. Επιπλέον αν $A =_c B$ (όπου A, B πεπερασμένα) τότε $[0, \#A) =_c [0, \#B)$. Από την Αρχή του Περιστερεώνα και το (ii) της Άσκησης 4 δεν μπορούμε να έχουμε $\#A < \#B$ ή $\#B < \#A$. Άρα $\#A = \#B$ και $[0, \#A) = [0, \#B)$.

Τέλος θεωρούμε ένα σύνολο $\mathcal{E}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο C με

$$X \in C \iff X = [0, \#A) \text{ για κάποιο } A \in \mathcal{E}.$$

Παρατηρούμε ότι $[0, n) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ επομένως από το Αξίωμα Διαχωρισμού ορίζεται το σύνολο

$$C = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid (\exists A)(\exists n)[A \in \mathcal{E} \;\&\; n \in \mathbb{N} \;\&(A \twoheadrightarrow [0, n)) \neq \varnothing \;\&\; (\forall x)[x \in X \iff x < n]]\}.$$

Σχετικά με το δεύτερο ζητούμενο, η μία κατεύθυνση είναι άμεση από το (iii) της Άσκησης 4 και την Αρχή του Περιστερεώνα: Αν $A \leq_c B$ τότε $B \nless_c A$ και άρα $\#B \nless \#A$ (Άσκηση 4 - (iii)), άρα $\#A \leq \#B$.

Αντίστροφα αν $\#A \leq \#B$ τότε $[0, \#A) \subseteq [0, \#B)$ και άρα

$$A =_c [0, \#A) \leq_c [0, \#B) =_c B.$$

Επομένως $A \leq_c B$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων A και B είναι πεπερασμένο σύνολο και πως

$$\#(A \cup B) \leq \#A + \#B.$$

Λύση.

Αν τα A, B είναι ξένα πεπερασμένα σύνολα, αφού $A = [0, \#A)$ και $B = [0, \#B)$ έχουμε από την Άσκηση 3 ότι $A \cup B =_c [0, \#A + \#B)$. Επομένως το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Αν τα A, B είναι τυχαία σύνολα (δηλαδή όχι απαραίτητα ξένα) τότε

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \leq_c (\{\varnothing\} \times A) \bigcup (\{\{\varnothing\}\} \times B) = A \biguplus B.$$

Είναι προφανές ότι $\{\varnothing\} \times A =_c A =_c [0, \#A)$ και επομένως $\#(\{\varnothing\} \times A) = \#A$. Ομοίως $\#(\{\{\varnothing\}\} \times B) = \#B$.

Αφού τα σύνολα $\{\varnothing\} \times A$ και $\{\{\varnothing\}\} \times B$ είναι ξένα έχουμε από τα πιο πάνω

$$A \biguplus B = (\{\varnothing\} \times A) \bigcup (\{\{\varnothing\}\} \times B) =_c [0, \#A + \#B).$$

Ειδικότερα η ξένη ένωση $A \uplus B$ είναι πεπερασμένο σύνολο και

$$\#(A \biguplus B) = \#A + \#B.$$

Επιπλέον αφού $A \cup B \leq_c A \uplus B$ προκύπτει εύκολα ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι πεπερασμένο. Με χρήση του δεύτερου ζητούμενου της Άσκησης 5 έχουμε

$$\#(A \cup B) \leq \#(A \biguplus B) = \#A + \#B.$$