

# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις  
Χειμερινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων  
Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών



## 1ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:  
B. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1** (Πρόβλημα x1.2 - Οι νόμοι του De Morgan).

Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα  $A, B, C$  ισχύει

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

**Λύση.**

Για κάθε στοιχείο  $x$  έχουμε:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in C \text{ και } (x \notin A \text{ και } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ και } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Επιπλέον:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in C \text{ και } (x \notin A \text{ ή } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ ή } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

**Άσκηση 2** (Πρόβλημα x1.3). Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  και κάθε  $A, B \subseteq X$  ισχύουν

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$$

$$f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B].$$

Αν η  $f$  είναι 1-1 δείξτε ότι οι πιο πάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες. Βρείτε επίσης παραδείγματα όπου οι ισότητες δεν ισχύουν αν η  $f$  δεν είναι 1-1.

**Λύση.**

Θεωρούμε  $y \in f[A \cap B]$ . Τότε υπάρχει  $x \in A \cap B$  με  $y = f(x)$ . Αφού  $x \in A$  έχουμε  $y = f(x) \in f[A]$  και αφού  $x \in B$  έχουμε  $y = f(x) \in f[B]$ . Άρα  $y \in f[A] \cap f[B]$ .

Για τον άλλο εγκλεισμό θεωρούμε  $y \in f[A] \setminus f[B]$  και  $x \in A$  με  $y = f(x)$ . Αν ήταν  $x \in B$  τότε θα είχαμε  $y = f(x) \in f[B]$ , άτοπο. Άρα  $x \notin B$  και επομένως  $x \in A \setminus B$ . Καταλήγουμε ότι  $y = f(x) \in f[A \setminus B]$ .

Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι 1-1. Δείχνουμε αρχικά ότι  $f[A] \cap f[B] \subseteq f[A \setminus B]$ . Έστω  $y \in f[A] \cap f[B]$ , και  $x_1 \in A$ ,  $x_2 \in B$  με  $y = f(x_1) = f(x_2)$ . Αφού η  $f$  είναι 1-1 θα έχουμε  $x_1 = x_2 \in A \cap B$ . Άρα  $y = f(x_1) \in f[A \cap B]$ .

Τώρα δείχνουμε ότι  $f[A \setminus B] \subseteq f[A] \setminus f[B]$ . Έστω  $y \in f[A \setminus B]$  και  $x \in A \setminus B$  με  $y = f(x)$ . Αφού  $x \in A$  έχουμε  $y = f(x) \in f[A]$ . Αν ήταν  $y \in f[B]$  τότε θα υπήρχε  $x' \in B$  με  $y = f(x')$ . Επειδή η  $f$  είναι 1-1 θα είχαμε  $x = x' \in A \cap B$  που είναι άτοπο γιατί  $x \notin B$ . Επομένως  $y \notin f[B]$  και άρα  $y \in f[A] \setminus f[B]$ .

Δίνουμε τώρα τα παραδείγματα. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ . Παίρνουμε  $A = \{-2\}$  και  $B = \{2\}$ . Τότε  $A \cap B = \emptyset$  και άρα  $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset$ . Από την άλλη  $f[A] = f[B] = \{4\}$  και άρα  $f[A] \cap f[B] = \{4\}$ .

Για τον δεύτερο εγκλεισμό θεωρούμε πάλι την  $f(x) = x^2$ . Παίρνουμε  $A = \{-2, 2\}$  και  $B = \{2\}$ . Τότε  $A \setminus B = \{-2\}$  και  $f[A \setminus B] = \{4\}$ . Από την άλλη  $f[A] \setminus f[B] = \{4\} \setminus \{4\} = \emptyset$ .

**Άσκηση 3** (Πρόβλημα x1.4 plus). Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f : X \rightarrow Y$  και  $A, B \subseteq Y$ . Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cup B] &= f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \cap B] &= f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \setminus B] &= f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Αν  $C, D \subseteq X$  δείξτε ότι

$$f[C \cup D] = f[C] \cup f[D].$$

**Λύση.**

Για την πρώτη ισότητα έχουμε για κάθε  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A \cup B] &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \vee x \in f^{-1}[B] \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Υπευθυμίζουμε ότι το “ $\vee$ ” είναι ο λογικός τελεστής της διάζευξης προτάσεων και παίζει τον ρόλο του διαζευτικού “ή”. Ομοια προκύπτουν και οι επόμενες δύο ισότητες. Για την τελευταία ισότητα έχουμε για κάθε  $y \in Y$ ,

$$\begin{aligned} y \in f[C \cup D] &\iff (\exists x)[x \in C \cup D \ \& \ y = f(x)] \\ &\iff (\exists x)[x \in C \ \& \ y = f(x)] \vee (\exists x)[x \in D \ \& \ y = f(x)] \\ &\iff y \in f[C] \vee y \in f[D] \\ &\iff y \in f[C] \cup f[D]. \end{aligned}$$

**Άσκηση 4.** Δίνεται ένα άπειρο σύνολο  $A$  και μία συνάρτηση  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow A$  επί.

Δείξτε ότι για κάθε  $a_0, \dots, a_n \in A$  υπάρχει  $m > n$  με  $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$ .

**Λύση.**

Θεωρούμε το σύνολο  $B = \{a_0, \dots, a_n\} \cup \{\pi(0), \dots, \pi(n)\}$ . Προφανώς το  $B$  είναι πεπερασμένο σύνολο. Επειδή  $a_0, \dots, a_n \in A$  και η  $\pi$  παίρνει τιμές στο  $A$  έχουμε  $B \subseteq A$ . Επειδή το  $A$  είναι άπειρο υπάρχει  $x \in A \setminus B$ . Επιπλέον η  $\pi$  είναι επί, άρα υπάρχει  $m \in \mathbb{N}$  με  $x = \pi(m)$ .

Αφού  $\pi(m) \notin B$  θα έχουμε ειδικότερα ότι  $\pi(m) \notin \{\pi(0), \dots, \pi(n)\}$  και άρα  $m > n$ . Πάλι από το  $\pi(m) \notin B$  έχουμε ότι  $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$ .

**Άσκηση 5.** Αν  $A =_c B$  δείξτε ότι  $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$ , όπου  $\mathcal{P}(X)$  είναι το δυναμοσύνολο του  $X$ ,

$$\mathcal{P}(X) = \{ Y \mid Y \subseteq X \}.$$

Συμπεράνετε ότι  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ .

**Λύση.**

Θεωρούμε μια 1-1 και επί συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$ . Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B) : C \subseteq A \mapsto \{ f(x) \mid x \in C \}.$$

Δηλαδή  $\pi(C) = f[C]$ . Δείχνουμε ότι η  $\pi$  είναι 1-1 και επί.

---

Για το 1-1 υποθέτουμε ότι  $\pi(C_1) = \pi(C_2)$ , πρέπει να δείξουμε ότι  $C_1 = C_2$ . Για κάθε  $x \in A$  έχουμε

$$\begin{aligned}x \in C_1 &\iff f(x) \in f[C_1] \quad (\text{γιατί η } f \text{ είναι 1-1}) \\ &\iff f(x) \in \pi(C_1) = \pi(C_2) \\ &\iff f(x) \in f[C_2] \\ &\iff x \in C_2 \quad (\text{γιατί η } f \text{ είναι 1-1}).\end{aligned}$$

Επομένως  $C_1 = C_2$  και η  $\pi$  είναι 1-1.

Για το επί, θεωρούμε  $D \subseteq B$  και παίρνουμε  $C = f^{-1}[D]$ . Δείχνουμε ότι  $\pi(C) = D$ . Για κάθε  $y \in Y$  έχουμε

$$\begin{aligned}y \in \pi(C) &\iff y \in f[C] \\ &\iff f^{-1}(y) \in C \quad (\text{ορίζεται η συνάρτηση } f^{-1} : B \rightarrow A) \\ &\iff f^{-1}(y) \in f^{-1}[D] \\ &\iff f(f^{-1}(y)) \in D \\ &\iff y \in D.\end{aligned}$$

Άρα  $\pi(C) = D$  και η  $\pi$  είναι επί.

Για την ισότητα  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  παρατηρούμε ότι εφόσον τα σύνολα  $\mathbb{Z}$  και  $\mathbb{Q}$  είναι άπειρα αριθμήσιμα έχουμε από τον ορισμό ότι  $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$ . Οπότε με εφαρμογή του πιο πάνω έχουμε το ζητούμενο.