Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση για αυτό το Φυλλάδιο:

Θεώρημα Αναδρομής. Έστω $(\mathbb{N}, 0, S)$ ένα σύστημα φυσικών αριθμών, E ένα σύνολο, $a \in E$ και μια συνάρτηση $h : E \to E$.

Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες

$$f(0) = a$$
$$f(Sn) = h(f(n)) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39)**.**

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα A, B και C. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Λύση.
(i) Έχουμε

$$(x, y, z) = (x, (y, z)) = (x', (y, z')) = (x', y', z').$$

Τότε $x = x'$ και $(y, z) = (y', z')$. Από το τελευταίο προκύπτει $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ δύο συνόλων X_1 και X_2 είναι σύνολο. Επομένως έχουμε τα σύνολα $B \times C$ και $A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

Άσκηση 2 (Άσκηση 4.18 σελ. 45)**.** Δείξτε ότι αν $A =_c A'$ και $B = B'$ τότε

(i) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$

(ii) $A \times B =_c A' \times B'$

(iii) $(A \to B) =_c (A' \to B')$.

Σχόλιο. Στα (i) και (ii) να ορίσετε μόνο τις ζητούμενες συναρτήσεις χωρίς να δείξετε ότι είναι $1-1$ και επί. Το (iii) το έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση. Εδώ εξηγήστε γιατί η αντιστοιχία
$H : (A \to B) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow (A' \to B')$ που ορίσαμε είναι σύνολο.

Λύση.
Θεωρούμε $\tau : A \to A'$ και $\rho : B \to B'$ $1-1$ και επί συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X \uplus Y = (\{\emptyset\} \times X) \times (\{\{\emptyset\}\} \times Y).$$

(i) Ορίζουμε $g : (\{\emptyset\} \times A) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B) \longrightarrow (\{\emptyset\} \times A') \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B')$ ως εξής:

$$g(\emptyset, x) = (\emptyset, \tau(x)), \quad \text{όπου } x \in A \qquad \text{και} \qquad g(\{\emptyset\}, x) = (\{\emptyset\}, \rho(x)) \quad \text{όπου } x \in B.$$

Προκύπτει εύκολα ότι η g είναι $1-1$ και επί.

(ii) Ορίζουμε $h : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ με $h(a, b) = (\tau(a), \rho(b))$. Τότε η h είναι $1-1$ και επί.

(iii) Όπως έχουμε δει η ζητούμενη $1-1$ και επί συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$H : (A \to B) \to (A' \to B') : H(f)(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[l, bend right, "\tau^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "H(f)"] \\ B \arrow[r, "\rho"'] & B' \end{tikzcd}$$

Όλα οι προηγούμενες συναρτήσεις ορίζονται και αποδεικνύεται ότι είναι 1-1 και επί με βάση τα αξιώματα. Για παράδειγμα η H ορίζεται ως το σύνολο

$$\{(f,g) \in (A \to B) \times (A' \to B') \mid (\forall a' \in A')[g(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')]\}.$$

Άσκηση 3. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $Sn \neq n$.

Λύση.

Θεωρούμε το σύνολο $X = \{n \in \mathbb{N} \mid Sn \neq n\}$ και δείχνουμε ότι: α) $0 \in X$, β) για κάθε $n \in X$ έχουμε ότι $Sn \in X$. Τότε από την Αρχή Επαγωγής θα έχουμε $X = \mathbb{N}$ που είναι το ζητούμενο.

Για το α) ισχύει από τις ιδιότητες του συστήματος φυσικών αριθμών ότι $Sn \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα $S0 \neq 0$ και άρα $0 \in X$.

Για το β) θεωρούμε $n \in X$ και δείχνουμε ότι $Sn \in X$. Εφόσον $n \in X$ έχουμε $Sn \neq n$ και αφού η S είναι $1-1$ έχουμε επίσης $S(Sn) \neq Sn$. Αυτό σημαίνει ότι $Sn \in X$.

Άσκηση 4. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της συνάρτησης f στο Θεώρημα Αναδρομής: για κάθε συνόλο E, κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \to E$ υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες $f(0) = a$ και $f(Sn) = h(f(n))$ για κάθε n, όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών.

Λύση.

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to E$ και $g : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θεωρήματος Αναδρομής και δείχνουμε με επαγωγή ότι $f(n) = g(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε $f(0) = a = g(0)$. Υποθέτουμε ότι $f(n) = g(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$f(Sn) = h(f(n)) = h(g(n)) = g(Sn)$$

και από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος α΄)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με τις ιδιότητες:

$$\pi(0_1) = 0_2$$
$$\pi(S_1 n) = S_2 \pi(n) \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

(i) Δείξτε ότι η π είναι επί.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $X = \{m \in \mathbb{N}_2 \mid (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)]\}$.

(ii) Δείξτε ότι η π είναι $1-1$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $Y = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(n) = \pi(m)] \implies n = m\}$.

Λύση.

(i) Θεωρούμε το σύνολο X της υπόδειξης. Έχουμε $0_2 = \pi(0_1)$ επομένως $0_2 \in X$. Έστω $m \in X$, θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}_1$ με $m = \pi(n)$. Τότε $S_2 m = S_2 \pi(n) = \pi(S_1 n)$ επομένως $S_2 m = \pi(n')$ για κάποιο $n' \in \mathbb{N}_1$ (συγκεκριμένα το $n' = S_1 n$) και άρα $S_2 m \in X$.

Από την Αρχή Επαγωγής στο σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ έχουμε $X = \mathbb{N}_2$ και άρα η π είναι επί.

(ii) Θεωρούμε το σύνολο Y της υπόδειξης. Δείχνουμε αρχικά ότι $0_1 \in Y$. Έστω $m \in \mathbb{N}_1$ με $\pi(0_1) = \pi(m)$. Έπεται ότι $\pi(m) = 0_2$. Αν είχαμε $m \neq 0_1$ τότε από γνωστό Λήμμα $m = S_1 k$ για κάποιο $k \in N_1$. Αλλά τότε

$$0_2 = \pi(m) = \pi(S_1 k) = S_2 \pi(k)$$

και τότε το 0_2 θα ανήκε στην εικόνα της S_2 που είναι άτοπο. Άρα $m = 0_1$ και έχουμε επομένως $0_1 \in Y$.

Θεωρούμε τώρα $n \in Y$ και (για να δείξουμε ότι $S_1 n \in Y$) θεωρούμε επίσης $m \in \mathbb{N}_1$ με $\pi(S_1 n) = \pi(m)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $m = S_1 n$. Αρχικά εξασφαλίζουμε ότι $m \neq 0_2$. Έχουμε

$$\pi(m) = \pi(S_1 n) = S_2 \pi(n) \neq 0_2.$$

Αφού $\pi(0_1) = 0_2$ προκύπτει ότι $m \neq 0_1$. Από γνωστό Λήμμα υπάρχει $k \in \mathbb{N}_1$ με $m = S_1 k$. Δείχνουμε ότι $k = n$. Έχουμε

$$S_2 \pi(n) = \pi(m) = \pi(S_1 k) = S_2 \pi(k).$$

Επειδή η συνάρτηση S_2 είναι $1-1$ προκύπτει $\pi(n) = \pi(k)$ και αφού $n \in Y$ έχουμε $n = k$. Επομένως $m = S_1 k = S_1 n$ και $S_1 n \in Y$.

Άσκηση 6 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος β΄)**.** Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Σχόλιο: Με βάση την προηγούμενη άσκηση αυτή η μοναδική συνάρτηση π είναι αντιστοιχία. Από αυτές τις δύο ασκήσεις προκύπτει ότι στην ουσία έχουμε μόνο ένα σύστημα φυσικών αριθμών, δηλαδή για κάθε δύο συστήματα η δομή του ενός μεταφέρεται στο άλλο μέσω μιας αντιστοιχίας.

Λύση.
Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναδρομής παίρνοντας για σύστημα φυσικών αριθμών το $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, $E = \mathbb{N}_2$, $a = 0_2$, και $h : E \to E : h(m) = S_2 m$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to E = \mathbb{N}_2$ ώστε $\pi(0_1) = 0_2$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$ ισχύει:

$$\pi(S_1 n) = h(\pi(n)) = S_2 \pi(n).$$

Για τη μοναδικότητα θεωρούμε μια συνάρτηση $\pi' : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί: $\pi'(0_1) = 0_2$ και

$$\pi'(S_1 n) = S_2 \pi'(n) \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Τότε η π' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Αναδρομής για τις συγκεκριμένες επιλογές $E = \mathbb{N}_2$, $a = 0_2$, και $h = S_2$:

$$\pi'(0_1) = a, \qquad \pi'(S_1 n) = h(\pi'(n)) \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Από τη μοναδικότητα της συνάρτησης που προκύπτει στο Θεώρημα Αναδρομής έχουμε $\pi = \pi'$.

Στην επόμενη άσκηση δείχνουμε ότι από ένα σύστημα φυσικών αριθμών μπορεί κανείς να κατασκευάσει σχετικά πολλά συστήματα, το οποία όμως όπως αναφέραμε προηγουμένως θα είναι «ισομορφικά» με το αρχικό σύστημα.

Άσκηση 7 (Κατασκευή συστήματος φυσικών αριθμών από δοσμένο σύστημα)**.** Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Λύση.
Ορίζουμε $0_2 = \pi(0_1) \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$, $m \in \mathbb{N}_2$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "S_1"'] & \mathbb{N}_2 \arrow[l, bend right, "\pi^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "S_2"] \\ \mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{N}_2 \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι η S_2 είναι καλά ορισμένη αφού η π είναι $1-1$ και επί. Η S_2 είναι $1-1$ ως σύνθεση $1-1$ συναρτήσεων.

Αν είχαμε $S_2 m = 0_2$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}_2$ τότε θα είχαμε

$$\pi(0_1) = 0_2 = S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$$

και αφού η π είναι $1-1$ προκύπτει $0_1 = S_1 \pi^{-1}(m)$. Επομένως το 0_1 θα ανήκε στην εικόνα της S_1 που είναι άτοπο. Άρα $S_2 m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$.

Τέλος δείχνουμε την Αρχή της Επαγωγής στο $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Έστω $Y \subseteq \mathbb{N}_2$ με $0_2 \in Y$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$ αν $m \in Y$ τότε $S_2 m \in Y$. Θεωρούμε το σύνολο $X = \pi^{-1}[Y]$. Αφού $\pi(0_1) = 0_2 \in Y$ έχουμε $0_1 \in X$.

Έστω $n \in X$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}_1$. Τότε $\pi(n) \in Y$ και από την υπόθεσή μας για το σύνολο Y έχουμε ότι $S_2\pi(n) \in Y$. Αλλά $S_2\pi(n) = \pi(S_1\pi^{-1}(\pi(n))) = \pi(S_1 n)$. Άρα $\pi(S_1 n) \in Y$ που σημαίνει ότι $S_1 n \in X$. Με άλλα λόγια δείξαμε για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$,

$$n \in X \implies S_1 n \in X.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής στο σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ έχουμε $\pi^{-1}[Y] = X = \mathbb{N}_1$. Εφόσον η π είναι επί προκύπτει ότι $Y = \mathbb{N}_2$ και επομένως η Αρχή της Επαγωγής ισχύει για την τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$.

Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών.