# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

**Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

# 2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1.** Σε αυτή την άσκηση πρέπει να πάρετε δεδομένο το **Θεώρημα Schröder-Bernstein**: για όλα τα σύνολα $A$, $B$, αν $A \leq_c B$ και αν $B \leq_c A$ τότε $A =_c B$.

Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα $A$, $B$, $C$ ισχύουν τα εξής:

(i) $A \not<_c A$.

(ii) Αν $A \leq_c B$ και $B <_c C$ τότε $A <_c C$.

(iii) Αν $A <_c B$ και $B \leq_c C$ τότε $A <_c C$.

**Λύση.**

(i) Αν $A <_c B$ έχουμε ειδικότερα ότι $A \neq_c B$. Θέτοντας $B = A$ έχουμε ότι αν $A <_c A$ τότε $A \neq_c A$. Επειδή όμως $A =_c A$ (μέσω της ταυτικής συνάρτησης) προκύπτει ότι $A \not<_c A$.

(ii) Είναι σαφές ότι $A \leq_c C$: αν έχουμε μονομορφισμούς $f : A \rightarrowtail B$ και $g : B \rightarrowtail C$ τότε η συνάρτηση $h = g \circ f : A \to C$ είναι επίσης μονομορφισμός.

Αν είχαμε $A =_c C$ από τις σχέσεις $A \leq_c B \leq_c C$ θα προέκυπτε $C \leq_c B \leq_c C$ και από το Θεώρημα Schröder-Bernstein θα είχαμε $B =_c C$ που αντιβαίνει στο $B <_c C$.

(iii) Όμοια με το (ii).

**Άσκηση 2.** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

**Λύση.**

(i) Επειδή το σύνολο $B$ είναι αριθμήσιμο έχουμε $B \leq_c \mathbb{N}$, επομένως $A \leq_c B \leq_c \mathbb{N}$. Προκύπτει ότι $A \leq_c \mathbb{N}$ και άρα το $A$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν $A = \emptyset$ τότε το $A$ είναι αριθμήσιμο, επομένως υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Επειδή η $\tau$ είναι συνάρτηση από το $B$ στο $A$ έχουμε $B \neq \emptyset$ και εφόσον το $B$ είναι αριθμήσιμο υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow B$. Τότε η σύνθεση $\tau \circ \pi : \mathbb{N} \to A$ είναι επιμορφισμός και άρα το $A$ είναι αριθμήσιμο.

**Άσκηση 3.** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός $\pi$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

**Σχόλιο:** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής.

**Λύση.**

Θεωρούμε ένα $a_0 \in A$ και ορίζουμε $\pi : B \to A$ ως εξής:

$$\pi(y) = \begin{cases} \tau^{-1}(y), & \text{αν } y \in \tau[A] \\ a_0, & y \notin \tau[A]. \end{cases}$$

Αν $x \in A$ τότε $\pi(\tau(x)) = \tau^{-1}(\tau(x)) = x$. Παρατηρούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση $\pi$ είναι αναγκαστικά επί γιατί το τυχαίο $x \in A$ είναι της μορφής $\pi(y)$ για $y = \tau(x) \in B$.

**Άσκηση 4** (Κατασκευή και Ιδιότητες του συνόλου Cantor)**.** Δοσμένου ενός κλειστού διαστήματος $I = [a, b]$ με $a < b$ ορίζουμε $\mathcal{L}I$ να είναι το πρώτο $1/3$ του $I$ και $\mathcal{R}I$ το τελευταίο $1/3$ του $I$ (κλειστά διαστήματα). Δηλαδή

$$\mathcal{L}I = \left[a, a + \frac{1}{3} \cdot (b-a)\right] \qquad \text{και} \qquad \mathcal{R}I = \left[a + \frac{2}{3} \cdot (b-a), b\right].$$

Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \in \mathbb{N}$ τα υποσύνολα $(F_i^n)_{i=1,\dots,2^n}$ του $[0,1]$ ως εξής:

$$F_1^0 = [0,1]$$

$$F_i^{n+1} = \begin{cases} \mathcal{L}F_j^n, & \text{αν } i = 2j-1 \\ \mathcal{R}F_j^n, & \text{αν } i = 2j \end{cases}, \quad \text{όπου } i = 1, \dots, 2^{n+1}.$$

Δηλαδή

$$F_{2j-1}^{n+1} = \mathcal{L}F_j^n \qquad \text{και} \qquad F_{2j}^{n+1} = \mathcal{R}F_j^n.$$

*Σχόλιο:* Παρατηρούμε ότι αν $i = 2j-1$ ή αν $i = 2j$ και $i \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$ τότε $j \in \{1, \dots, 2^n\}$. Επομένως το σύνολο $F_j^n$ έχει οριστεί και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στον ορισμό του $F_i^{n+1}$. Θα δείξουμε επιπλέον ότι κάθε $F_j^n$ είναι κλειστό μη τετριμμένο διάστημα, και άρα ο πιο πάνω ορισμός έχει νόημα.

Το **σύνολο Cantor** είναι το

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^n} F_i^n.$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Για κάθε $n$,$j$ το $F_j^n$ είναι κλειστό μη τετριμμένο διάστημα μήκους $1/3^n$ - ειδικότερα οι εκφράσεις $\mathcal{L}F_j^n$ και $\mathcal{R}F_j^n$ έχουν νόημα.

(ii) Για κάθε $n$ τα σύνολα $F_1^n, \dots, F_{2^n}^n$ είναι ξένα ανά δύο.
*Υπόδειξη.* Δοσμένων $F_i^{n+1}$ και $F_{i'}^{n+1}$ διακρίνετε περιπτώσεις όπου τα $i, i'$ είναι διαδοχικοί φυσικοί και όπου δεν είναι.

(iii) Για κάθε $\alpha \in \Delta =$ το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών, ορίζουμε την ακολουθία $(I_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του $[0,1]$ ως εξής:

$$I_0^\alpha = \begin{cases} F_1^1, & \text{αν } \alpha(0) = 0, \\ F_2^1, & \text{αν } \alpha(0) = 1, \end{cases} \qquad I_{n+1}^\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}I_n^\alpha & \text{αν } \alpha(n+1) = 0, \\ \mathcal{R}I_n^\alpha, & \text{αν } \alpha(n+1) = 1. \end{cases}$$

Τότε για κάθε $\alpha$ και κάθε $n$ υπάρχει $j_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ με $I_n^\alpha = F_{j_n}^n$. Συμπεράνετε ότι η ακολουθία $(I_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από κλειστά διαστήματα και ότι μήκος$(I_n^\alpha) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(iv) Η συνάρτηση

$$f : \Delta \to C : f(\alpha) = \text{το μοναδικό σημείο της τομής } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n^\alpha$$

είναι καλά ορισμένη.

(v) (Απαιτητική) Η προηγούμενη συνάρτηση $f$ είναι $1-1$.
*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $I_n^\alpha = I_n^\beta$.

(vi) (Απαιτητική) Η προηγούμενη συνάρτηση $f$ είναι επί.

**Λύση.**

(i) Με επαγωγή στο $n$. Για $n = 0$ το $F_1^0 = [0, 1]$ είναι κλειστό μη τετριμμένο διάστημα μήκους $1 = 1/3^0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τα $F_1^n, \ldots, F_{2^n}^n$ είναι κλειστά μη τετριμμένα διαστήματα μήκους $1/3^n$. Τότε από τον ορισμό κάθε $F_i^{n+1}$ είναι της μορφής $\mathcal{L}F_j^n$ ή $\mathcal{R}F_j^n$ για κάποιο $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$.

Από την Επαγωγική Υπόθεση το $F_j^n$ είναι κλειστό μη τετριμμένο διάστημα μήκους $1/3^n$. Είναι σαφές από τον ορισμό των $\mathcal{L}I$ και $\mathcal{R}I$ ότι είναι κλειστά μη τετριμμένα διαστήματα μήκους ίσου με το $1/3$ του μήκους του $I$, για κάθε κλειστό μη τετριμμένο διάστημα $I$. Επομένως το $F_i^{n+1}$ είναι κλειστό μη τετριμμένο διάστημα μήκους $1/3 \cdot 1/3^n = 1/3^{n+1}$.

(ii) Με επαγωγή στο $n$. Για $n = 0$ δεν υπάρχει κάτι να αποδείξουμε γιατί έχουμε μόνο ένα σύνολο, το $F_1^0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n$ έχουμε το εξής:

$$\text{για κάθε } j, j' \in \{1, \ldots, 2^n\} \text{ με } j \neq j' \text{ ισχύει } F_j^n \cap F_{j'}^n = \emptyset.$$

Δείχνουμε το ίδιο για το $n + 1$. Θεωρούμε $i, i' \in \{1, \ldots, 2^{n+1}\}$. Αν τα $i, i'$ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, τότε κάποιο από αυτά (ας πούμε το $i$) είναι ίσο με $2j - 1$ και το άλλο (το $i'$) είναι ίσο με $2j$ για κάποιο $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$F_i^{n+1} = \mathcal{L}F_j^n \quad \text{και} \quad F_{i'}^{n+1} = \mathcal{R}F_j^n.$$

Είναι σαφές ότι τα $\mathcal{L}I$ και $\mathcal{R}I$ είναι ξένα, άρα $F_i^{n+1} \cap F_{i'}^{n+1} = \emptyset$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι τα $i, i'$ δεν είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Ας πούμε $i = 2j$ και $i' = 2j'$ τότε $j \neq j'$, και τα σύνολα $F_i^{n+1}$, $F_{i'}^{n+1}$ περιέχονται στα $F_j^n$ και $F_{j'}^n$ αντίστοιχα. Από την Επαγωγική Υπόθεση τα τελευταία δύο σύνολα είναι ξένα, συνεπώς έχουμε πάλι $F_i^{n+1} \cap F_{i'}^{n+1} = \emptyset$. Στις άλλες περιπτώσεις έχουμε: α) $i = 2j$ και $i' = 2j' - 1$, β) $i = 2j - 1$ και $i' = 2j'$, γ) $i = 2j - 1$ και $i' = 2j' - 1$. Σε κάθε περίπτωση $j \neq j'$ και ισχύουν τα ίδια με πριν.

(iii) Θεωρούμε ένα $\alpha \in \Delta$ και δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $n$. Για $n = 0$ το ζητούμενο είναι σαφές από τον ορισμό του $I_0^\alpha$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n$ υπάρχει $j_n \in \{1, \ldots, 2^n\}$ με $I_n^\alpha = F_{j_n}^n$.

Τότε το $I_{n+1}^\alpha$ είναι κάποιο από τα $\mathcal{L}I_n^\alpha$ και $\mathcal{R}I_n^\alpha$. Έχουμε

$$\mathcal{L}I_n^\alpha = \mathcal{L}F_{j_n}^n = F_{2j_n-1}^{n+1} \quad \text{και} \quad \mathcal{R}I_n^\alpha = \mathcal{R}F_{j_n}^n = F_{2j_n}^{n+1}.$$

Επομένως $I_{n+1}^\alpha = F_i^{n+1}$ όπου το $i$ είναι κάποιο από τα $2j_n - 1$ και $2j_n$ και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώθηκε.

Είναι τότε σαφές ότι κάθε $I_n^\alpha$ είναι κλειστό διάστημα και ότι

$$\text{μήκος}(I_n^\alpha) = \text{ μήκος}(F_{j_n}^n) = 1/3^n \to 0.$$

(iv) Για κάθε $\alpha \in \Delta$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει από τον ορισμό $I_{n+1}^\alpha \subseteq I_n^\alpha$. Άρα η $(I_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων των οποίων η διάμετρος συγκλίνει στο 0. Από την Αρχή του Κιβωτισμού του Cantor η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n^\alpha$ είναι μονοσύνολο, συνεπώς η $f$ είναι καλά ορισμένη.

(v) Για να δείξουμε ότι η $f$ είναι $1 - 1$ εφαρμόζουμε την υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) = f(\beta)$ και δείχνουμε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι $I_n^\alpha = I_n^\beta$.

Για $n = 0$ αν είχαμε $I_0^\alpha \neq I_0^\beta$ τότε ένα από αυτά τα σύνολα θα ήταν το $F_1^1$ και το άλλο το $F_2^1$. Επομένως θα είχαμε $I_0^\alpha \cap I_0^\beta = \emptyset$. Από την άλλη $f(\alpha) \in I_0^\alpha$ και $f(\beta) \in I_0^\beta$. Άρα $f(\alpha) \neq f(\beta)$, άτοπο. Επομένως $I_0^\alpha = I_0^\beta$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n$ έχουμε $I_n^\alpha = I_n^\beta$ και δείχνουμε ότι $I_{n+1}^\alpha = I_{n+1}^\beta$. Όπως και πριν αν είχαμε $I_{n+1}^\alpha \neq I_{n+1}^\beta$ τότε ένα από αυτά τα σύνολα θα ήταν το $\mathcal{L}I_n^\alpha = \mathcal{L}I_n^\beta$ και το άλλο το $\mathcal{R}I_n^\alpha = \mathcal{R}I_n^\beta$. Άρα θα είχαμε $I_{n+1}^\alpha \cap I_{n+1}^\beta = \emptyset$, που είναι άτοπο γιατί $f(\alpha) \in I_{n+1}^\alpha$, $f(\beta) \in I_{n+1}^\beta$ και $f(\alpha) = f(\beta)$. Επομένως $I_{n+1}^\alpha = I_{n+1}^\beta$.

Καταλήγουμε ότι $I_n^\alpha = I_n^\beta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από αυτό προκύπτει ότι $\alpha = \beta$. Αλλιώς θα υπήρχε $n$ με $\alpha(n) \neq \beta(n)$, ας πούμε $\alpha(n) = 0$ και $\beta(n) = 1$. Αν $n = 0$ τότε $I_0^\alpha = F_1^1$ και $I_0^\beta = F_2^1$ που είναι άτοπο γιατί $I_0^\alpha = I_0^\beta$. Αν $n > 0$ τότε $n = m + 1$ και άρα

$$I_n^\alpha = I_{m+1}^\alpha = \mathcal{L}I_m^\alpha \qquad \text{ενώ} \qquad I_n^\beta = I_{m+1}^\beta = \mathcal{R}I_m^\beta$$

που όπως και πριν είναι άτοπο γιατί $I_n^\alpha = I_n^\beta$.

(vi) Θεωρούμε ένα $x \in C$. Τότε για κάθε $n$ υπάρχει $i_n \in \{1, \ldots, 2^n\}$ με $x \in F_{i_n}^{n+1}$. Μάλιστα αυτό το $i_n$ είναι μοναδικό γιατί τα $F_1^{n+1}, \ldots, F_{2^n}^{n+1}$ είναι ξένα ανά δύο.

Ορίζουμε $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha(n) = 0 &\iff \text{το προηγούμενο } i_n \text{ είναι περιττός αριθμός} \\ \alpha(n) = 1 &\iff \text{το προηγούμενο } i_n \text{ είναι άρτιος αριθμός.} \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $f(\alpha) = x$. Η ιδέα στον ορισμό του $\alpha$ είναι ότι τα «αριστερά» διαστήματα στην κατασκευή του $C$, δηλαδή αυτά της μορφής $\mathcal{L}I$, έχουν απαριθμηθεί με περιττό δείκτη, ενώ τα «δεξιά» διαστήματα με άρτιο. Π.χ. τα αριστερά διαστήματα μέχρι το $n = 2$ είναι τα $F_1^1$, $F_1^2$, $F_3^2$, ενώ τα δεξιά είναι τα $F_2^1$, $F_2^2$, $F_4^2$, (να κάνετε ένα σχήμα). Στα αριστερά διαστήματα θέλουμε να έχουμε $\alpha(n) = 0$ και στα δεξιά $\alpha(n) = 1$. Για παράδειγμα αν το $x$ ανήκει στο $F_1^1$ (αριστερό διάστημα) και στο $F_2^2$ (δεξιό διάστημα), τότε θα ορίσουμε $\alpha(0) = 0$ και $\alpha(1) = 1$.

Δείχνουμε με επαγωγή ότι $x \in I_n^\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από αυτό προκύπτει ότι $x = f(\alpha)$. Για $n = 0$ έχουμε $x \in F_1^1 \cup F_2^1$. Αν $x \in F_1^1$, δηλαδή αν $i_0 = 1$, έχουμε από τον ορισμό του $\alpha$ ότι $\alpha(0) = 0$. Επομένως $I_0^\alpha = F_1^1$, άρα $x \in I_0^\alpha$. Αν $x \in F_2^1$, δηλαδή αν $i_0 = 2$, έχουμε από τον ορισμό του $\alpha$ ότι $\alpha(0) = 1$ και άρα $I_0^\alpha = F_2^1$. Επομένως έχουμε πάλι $x \in I_0^\alpha$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n$ έχουμε $x \in I_n^\alpha$ και δείχνουμε ότι $x \in I_{n+1}^\alpha$. Από το (iii) το $I_n^\alpha$ είναι της μορφής $F_j^n$ για κάποιο $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$. Άρα $x \in F_j^n$. Από αυτό προκύπτει ότι το $x$ ανήκει σε ένα από τα $F_{2j-1}^{n+1}$ και $F_{2j}^{n+1}$. Έχουμε επιπλέον ότι $x \in F_{i_n}^{n+1}$. Επομένως το $i_n$ είναι ένα από τα $2j - 1$ και $2j$.

Αν $i_n = 2j - 1$, τότε $x \in F_{2j-1}^{n+1}$ και $\alpha(n) = 0$. Άρα

$$I_{n+1}^\alpha = \mathcal{L}I_n^\alpha = \mathcal{L}F_j^n = F_{2j-1}^{n+1}.$$

Συνεπώς $x \in I_{n+1}^\alpha$.

Αν $i_n = 2j$ τότε $x \in F_{2j}^{n+1}$ και $\alpha(n) = 1$. Άρα

$$I_{n+1}^\alpha = \mathcal{R}I_n^\alpha = \mathcal{R}F_j^n = F_{2j}^{n+1}.$$

Συνεπώς $x \in I_{n+1}^\alpha$.

**Άσκηση 5** (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24)**.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι $1 - 1$ και επί, όπου $\Delta$ είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών. Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

**Λύση.**

Δείχνουμε αρχικά ότι η $f$ είναι $1 - 1$. Υποθέτουμε ότι $f(A) = f(B)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \in A &\iff \chi_A(n) = 1 \\ &\iff f(A)(n) = 1 \\ &\iff f(B)(n) = 1 \\ &\iff \chi_B(n) = 1 \\ &\iff n \in B. \end{aligned}$$

Άρα $A = B$ και η $f$ είναι $1 - 1$. Δείχνουμε τώρα ότι είναι και επί. Αν $\alpha \in \Delta$ ορίζουμε

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\} \subseteq \mathbb{N}$$

και δείχνουμε ότι $f(A) = \alpha$. Έχουμε

$$f(A)(n) = 1 \iff \chi_A(n) = 1 \iff n \in A \iff \alpha(n) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή οι ακολουθίες $f(A)$ και $\alpha$ παίρνουν τιμές μόνο 0 ή 1 προκύπτει από την πιο πάνω ισοδυναμία ότι $f(A) = \alpha$.

Προκύπτει ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$. Είναι γνωστό ότι $\Delta =_c C =$ το σύνολο Cantor, και επιπλέον είναι σαφές ότι $C \leq_c \mathbb{R}$ αφού $C \subseteq \mathbb{R}$. Οπότε έχουμε

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta =_c C \leq_c \mathbb{R}.$$

**Άσκηση 6.** Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του $X$,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

**Λύση.**

Θεωρούμε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) : C \subseteq A \mapsto \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Δηλαδή $\pi(C) = f[C]$. Δείχνουμε ότι η $\pi$ είναι 1-1 και επί.

Για το 1-1 υποθέτουμε ότι $\pi(C_1) = \pi(C_2)$, πρέπει να δείξουμε ότι $C_1 = C_2$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in C_1 &\iff f(x) \in f[C_1] \quad \text{(γιατί η } f \text{ είναι 1-1)} \\ &\iff f(x) \in \pi(C_1) = \pi(C_2) \\ &\iff f(x) \in f[C_2] \\ &\iff x \in C_2 \quad \text{(γιατί η } f \text{ είναι 1-1).} \end{aligned}$$

Επομένως $C_1 = C_2$ και η $\pi$ είναι 1-1.

Για το επί, θεωρούμε $D \subseteq B$ και παίρνουμε $C = f^{-1}[D]$. Δείχνουμε ότι $\pi(C) = D$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in \pi(C) &\iff y \in f[C] \\ &\iff f^{-1}(y) \in C \quad \text{(ορίζεται η συνάρτηση } f^{-1} : B \to A\text{)} \\ &\iff f^{-1}(y) \in f^{-1}[D] \\ &\iff f(f^{-1}(y)) \in D \\ &\iff y \in D. \end{aligned}$$

Άρα $\pi(C) = D$ και η $\pi$ είναι επί.

Για την ισότητα $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ παρατηρούμε ότι εφόσον τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα έχουμε από τον ορισμό ότι $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$. Οπότε με εφαρμογή του πιο πάνω έχουμε το ζητούμενο.