# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

**Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

# 8ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1.** Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος, $A$ ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{D} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ με $\mathcal{D}(X) \subseteq X$ για κάθε $X \in \mathcal{P}(A)$. Συμβολίζουμε με $0_U$ το ελάχιστο στοιχείο του $U$ και με $S$ τη μερική συνάρτηση του επομένου στο $U$.

Ορίζουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή την οικογένεια $(C_x)_{x \in U}$ υποσυνόλων του $A$ ως εξής:

$$C_{0_U} = A$$

$$C_y = \mathcal{D}(C_x) \quad \text{αν } y = Sx,$$

$$C_y = \bigcap_{x<y} C_x \quad \text{αν το } y \text{ είναι οριακό σημείο.}$$

(i) Δείξτε με επαγωγή στο $y$ ότι για κάθε $z, y \in U$ με $z \leq y$ έχουμε $C_y \subseteq C_z$.

(ii) (Για όσες/όσους γνωρίζουν τοπολογία) Υποθέτουμε ότι $A = [0,1]^2$ και ότι η συνάρτηση $\mathcal{D}$ ικανοποιεί επιπλέον την εξής ιδιότητα:

*για κάθε μη κενό κλειστό $X \subseteq [0,1]^2$ το σύνολο $\mathcal{D}(X)$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$.*

Δείξτε ότι κάθε $C_y$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$.

**Λύση.**

(i) Θεωρούμε το σύνολο

$$P = \{y \in U \mid (\forall z \leq y)[C_y \subseteq C_z]\}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η $y \in P$ για κάθε $y \in U$.

Έστω $y \in U$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x < y$ έχουμε $x \in P$. Θα δείξουμε ότι $y \in P$. Αν το δείξουμε αυτό τότε από την Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής θα έχουμε το ζητούμενο.

Αν $y = 0_U$ τότε για κάθε $z \leq y$ θα έχουμε $z = 0_U$ και άρα $C_y = C_{0_U} = A = C_z$, επομένως $y \in P$.

Αν $y = Sx$ για κάποιο $x \in U$, τότε για κάθε $z \leq y$ θα έχουμε είτε $z \leq x$ είτε $z = Sx = y$. Αν $z = Sx = y$ τότε προφανώς $C_y = C_x$. Αν $z \leq x$ τότε

$$C_y = C_{Sx} = \mathcal{D}(C_x) \subseteq C_x \subseteq C_z$$

όπου στον πρώτο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\mathcal{D}(X) \subseteq X$ και στον δεύτερο ότι $\in P$ από την Επαγωγική Υπόθεση για το $x < y$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $C_y \subseteq C_z$ για κάθε $z \leq y$ , δηλαδή ισχύει $y \in P$.

Τέλος αν το $y$ είναι οριακό σημείο τότε για κάθε $z \leq y$ είτε $z = y$ οπότε προφανώς $C_y = C_z$ είτε $z < y$ οπότε

$$C_y = \cap_{x<y} C_x \subseteq C_z.$$

(Εδώ δεν χρειάζεται η Επαγωγική Υπόθεση.) Άρα πάλι έχουμε $y \in P$.

(ii) Δείχνουμε με Υπερπεπερασμένη Επαγωγή στο $y$ ότι κάθε $C_y$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$. Έστω $y \in U$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x < y$ το σύνολο $C_x$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$. Δείχνουμε το ίδιο για το $C_y$.

Αν $y = 0_U$ τότε $C_y = C_{0_U} = [0,1]^2$ που είναι προφανώς μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$.

Αν $y = Sx$ τότε $C_y = C_{Sx} = \mathcal{D}(C_x)$. Από την Επαγωγική Υπόθεση το $C_x$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$, και από την ιδιότητα της $\mathcal{D}$ το ίδιο ισχύει και για το $\mathcal{D}(C_x) = C_y$.

Αν το $y$ είναι οριακό σημείο τότε $C_y = \cap_{x<y} C_x$. Από την Επαγωγική Υπόθεση κάθε $C_x$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$. Επομένως το $C_y$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων. Μένει να δείξουμε ότι είναι μη κενό. Εδώ χρησιμοποιούμε την έννοια της συμπάγειας.

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $(C_x)_{x<y}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλαδή για κάθε $x_1, \dots, x_n < y$ έχουμε $\cap_{i=1}^n C_{x_i} \neq \emptyset$. Αυτό συμβαίνει λόγω του (i) και της Επαγωγικής Υπόθεσης: θεωρούμε $x_1, \dots, x_n < y$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε από το (i) ότι $C_{x_i} \supseteq C_{x_n}$ και άρα

$$\cap_{i=1}^n C_{x_i} = C_{x_n} \neq \emptyset \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)}.$$

Εφόσον η οικογένεια κλειστών συνόλων $(C_x)_{x<y}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και το $[0,1]^2$ είναι συμπαγής χώρος προκύπτει ότι η τομή $\cap_{x<y} C_x$ είναι μη κενή.

**Άσκηση 2** (Πρόβλημα x7.23)**.** Δείξτε ότι $\chi([0,n)) =_o [0,n+1)$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Με $\chi(A)$ εννοούμε τον χώρο Hartogs του συνόλου $A$ και με $[0,m)$, όπου $m \in \mathbb{N}$, το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών μικρότερων του $m$ με τη φυσική του διάταξη.

**Λύση.**

Γνωρίζουμε ότι $W = [0,n+1) \not\leq_c [0,n)$ επομένως από τη χαρακτηριστική ιδιότητα του χώρου Hartogs προκύπτει $\chi([0,n)) \leq_o [0,n+1)$. (Τα διαστήματα $[0,k)$, $k \geq 1$, με τη φυσική τους διάταξη είναι καλά διατεταγμένοι χώροι.)

Αν είχαμε $\chi([0,n)) <_o [0,n+1)$ τότε ο $\chi([0,n))$ θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $[0,n+1)$. Δηλαδή θα υπήρχε $m \in [0,n+1)$ με $\chi([0,n)) =_o [0,m)$. Αλλά τότε $m \leq n$ και επομένως

$$\chi([0,n)) =_c [0,m) \leq_c [0,n),$$

δηλαδή θα είχαμε $\chi(A) \leq_c A$, για $A = [0,n)$, που έρχεται σε αντίθεση με τις ιδιότητες του χώρου Hartogs. Επομένως $\chi([0,n)) \not<_o [0,n+1)$ και άρα $\chi([0,n)) =_o [0,n+1)$.

**Άσκηση 3.** Δίνεται ο χώρος Hartogs $(\chi(\mathbb{N}), \leq)$ του $\mathbb{N}$.

(i) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \chi(\mathbb{N})$ το σύνολο $seg(x) = \{y \in \chi(\mathbb{N}) \mid y < x\}$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\chi(\mathbb{N})$ υπάρχει $x \in \chi(\mathbb{N})$ με $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**Λύση.**

(i) Παίρνουμε $x \in \chi(\mathbb{N})$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $seg(x) \neq \emptyset$, αλλιώς το ζητούμενο είναι προφανές. Το $seg(x)$ με τον περιορισμό της διάταξης $\leq$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος. Αν ήταν υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε θα είχαμε $seg(x) \not\leq_c \mathbb{N}$ και από την ιδιότητες του χώρου Hartogs θα είχαμε $\chi(\mathbb{N}) \leq_o seg(x)$. Δηλαδή ο $\chi(\mathbb{N})$ θα ήταν όμοιος με ένα αρχικό τμήμα του $seg(x)$. Τα αρχικά τμήματα του $seg(x)$ είναι *γνήσια* αρχικά τμήματα του $\chi(\mathbb{N})$, επομένως ο $\chi(\mathbb{N})$ θα ήταν όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $\chi(\mathbb{N})$, άτοπο. Άρα το $seg(x)$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν δεν υπήρχε τέτοιο $x$ τότε για κάθε $x \in \chi(\mathbb{N})$ θα υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ με $x_n \not< x$, δηλαδή $x \leq x_n$. Από αυτό προκύπτει ότι

$$\chi(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(seg(x_n) \cup \{x_n\}\right).$$

Από το (i) κάθε σύνολο $seg(x_n)$ είναι αριθμήσιμο και συνεπώς κάθε $seg(x_n) \cup \{x_n\}$ είναι επίσης αριθμήσιμο σύνολο. Από την προηγούμενη ισότητα θα είχαμε ότι το $\chi(\mathbb{N})$ είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων, συνεπώς θα ήταν αριθμήσιμο σύνολο. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $\chi(\mathbb{N}) \not\leq_c \mathbb{N}$.

**Άσκηση 4.** Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το Αξίωμα Επιλογής.

(ii) Για κάθε μη κενό σύνολο $A$ υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$ με $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε μη κενό $X \in \mathcal{P}(A)$.

(iii) Για κάθε μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ το γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ είναι μη κενό.

**Λύση.**

(i)$\Longrightarrow$(ii) Έστω $A$ μη κενό σύνολο. Ορίζουμε $P \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}) \times A$ ως εξής

$$(X, x) \in P \iff x \in X.$$

Τότε για κάθε $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ υπάρχει $x \in A$ με $(X, x) \in P$. Από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει μια συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$ με $(X, \varepsilon(X)) \in P$, δηλαδή $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Από τον ορισμό της οικογένειας συνόλων υπάρχει σύνολο $E$ και μια συνάρτηση $\pi : I \to \mathcal{P}(E)$ με $\pi(i) = A_i$. Από το (ii) υπάρχει μια συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow E$ με $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε μη κενό $X \in \mathcal{P}(E)$. Επειδή κάθε $A_i = \pi(i)$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, ορίζεται η σύνθεση

$$f : I \to E : f(i) = (\varepsilon \circ \pi)(i).$$

Τότε για κάθε $i \in I$ έχουμε $f(i) = \varepsilon(\pi(i)) \in \pi(i) = A_i$, δηλαδή $f(i) \in A_i$ για κάθε $i \in I$ ή αλλιώς $f \in \prod\limits_{i \in I} A_i$.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Θεωρούμε σύνολα $A, B, P$ με $P \subseteq A \times B$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ με $(x, y) \in P$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $A$ είναι μη κενό σύνολο αλλιώς τότε παίρνουμε $f = \emptyset$ και έχουμε το ζητούμενο.

Θέτουμε $P_x = \{y \in B \mid (x, y) \in P\}$, για $x \in A$. Τότε $P_x \neq \emptyset$ για κάθε $x \in A$ και μάλιστα η συνάρτηση

$$\pi : A \to \mathcal{P}(B) : \pi(x) = P_x$$

ορίζει τη μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων $(P_x)_{x \in A}$. Από την υπόθεση το σύνολο $\prod_{x \in A} P_x$ είναι μη κενό. Έστω $f \in \prod_{x \in A} P_x$, τότε $f : A \to B$ και για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x) \in P_x$, δηλαδή $(x, f(x)) \in P$.

**Άσκηση 5.** Θεωρούμε μη κενά σύνολα $A$, $B$ και μια συνάρτηση $f : A \to B$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μεγιστικό μη κενό σύνολο $C \subseteq A$ πάνω στο οποίο η $f$ είναι $1-1$, δηλαδή ο περιορισμός $f \restriction C$ είναι $1-1$ και για κάθε $D \subseteq A$ για το οποίο η $f \restriction D$ είναι $1-1$, το $C$ δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του $D$.

**Λύση.**

Θεωρούμε το σύνολο $P = \{C \in \mathcal{P}(A) \mid f \restriction C : \ 1-1\}$, μαζί με τη σχέση $\subseteq$. Τότε ο $(P, \subseteq)$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος και μάλιστα μη κενός: αν $a \in A$ τότε $\{a\} \in P$. (Μπορούμε επίσης να πούμε $\emptyset \in P$.) Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Zorn στον χώρο $(P, \subseteq)$.

Έστω $\mathcal{D}$ μια αλυσίδα στον $(P, \subseteq)$. Θεωρούμε το σύνολο $S = \bigcup \mathcal{D}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $S \in P$, δηλαδή ότι ο περιορισμός $f \restriction S$ είναι $1-1$ συνάρτηση. Θεωρούμε $x_1, x_2 \in S = \bigcup \mathcal{D}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Δείχνουμε $x_1 = x_2$. Υπάρχουν $C_1, C_2 \in \mathcal{D}$ με $x_1 \in C_1$ και $x_2 \in C_2$. Αφού το $\mathcal{D}$ είναι $\subseteq$-αλυσίδα θα έχουμε είτε $C_1 \subseteq C_2$ είτε $C_2 \subseteq C_1$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $C \in \mathcal{D}$ με $x_1, x_2 \in C$. Αφού η αλυσίδα $\mathcal{D}$ αποτελείται από στοιχεία του $P$ έχουμε $C \in P$, δηλαδή η συνάρτηση $f \restriction C$ είναι $1-1$. Με βάση τα $x_1, x_2 \in C$ και $f(x_1) = f(x_2)$ καταλήγουμε $x_1 = x_2$.

Άρα $S \in P$. Προφανώς $C \subseteq S$ για κάθε $C \in \mathcal{D}$. Επομένως το $S = \bigcup \mathcal{D}$ είναι άνω φράγμα της αλυσίδας $\mathcal{D}$ στο $P$.

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε αλυσίδα στον $(P, \subseteq)$ έχει άνω φράγμα. Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο $C$ του $P$. Αν το $C$ ήταν κενό τότε παίρνοντας ένα $a \in A$ θα είχαμε $\{a\} \in P$ και το $C = \emptyset$ θα ήταν γνήσιο υποσύνολο του $\{a\}$, που αντιτίθεται στη μεγιστικότητα του $C$. Επομένως $C \neq \emptyset$. Τέλος αν $C \subseteq D$ και η $f \restriction D$ είναι $1-1$, τότε $D \in P$ και αφού το $C$ είναι μεγιστικό έχουμε $C = D$.