Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

8ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος, A ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{D} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ με $\mathcal{D}(X) \subseteq X$ για κάθε $X \in \mathcal{P}(A)$. Συμβολίζουμε με 0_U το ελάχιστο στοιχείο του U και με S τη μερική συνάρτηση του επομένου στο U.

Ορίζουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή την οικογένεια $(C_x)_{x \in U}$ υποσυνόλων του A ως εξής:

$$\begin{aligned} C_{0_U} &= A \\ C_y &= \mathcal{D}(C_x) \quad \text{αν } y = Sx, \\ C_y &= \bigcap_{x<y} C_x \quad \text{αν το } y \text{ είναι οριακό σημείο.} \end{aligned}$$

(i) Δείξτε με επαγωγή στο y ότι για κάθε $z, y \in U$ με $z \leq y$ έχουμε $C_y \subseteq C_z$.

(ii) (Για όσες/όσους γνωρίζουν τοπολογία) Υποθέτουμε ότι $A = [0,1]^2$ και ότι η συνάρτηση $\mathcal{D}$ ικανοποιεί επιπλέον την εξής ιδιότητα:

για κάθε μη κενό κλειστό $X \subseteq [0,1]^2$ το σύνολο $\mathcal{D}(X)$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$.

Δείξτε ότι κάθε C_y είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^2$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x7.23)**.** Δείξτε ότι $\chi([0,n)) =_o [0, n+1)$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Με $\chi(A)$ εννοούμε τον χώρο Hartogs του συνόλου A και με $[0,m)$, όπου $m \in \mathbb{N}$, το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών μικρότερων του m με τη φυσική του διάταξη.

Άσκηση 3. Δίνεται ο χώρος Hartogs $(\chi(\mathbb{N}), \leq)$ του $\mathbb{N}$.

(i) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \chi(\mathbb{N})$ το σύνολο $\mathrm{seg}(x) = \{y \in \chi(\mathbb{N}) \mid y < x\}$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\chi(\mathbb{N})$ υπάρχει $x \in \chi(\mathbb{N})$ με $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Το Αξίωμα Επιλογής.

(ii) Για κάθε μη κενό σύνολο A υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$ με $\varepsilon(X) \in X$ για κάθε μη κενό $X \in \mathcal{P}(A)$.

(iii) Για κάθε μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ το γινόμενο $\prod_{i \in I} A_i$ είναι μη κενό.

Άσκηση 5. Θεωρούμε μη κενά σύνολα A, B και μια συνάρτηση $f : A \to B$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μεγιστικό μη κενό σύνολο $C \subseteq A$ πάνω στο οποίο η f είναι $1-1$, δηλαδή ο περιορισμός $f \upharpoonright C$ είναι $1-1$ και για κάθε $D \subseteq A$ για το οποίο η $f \upharpoonright D$ είναι $1-1$, το C δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του D.