Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Σε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ ορίζουμε

$$S_U(x) \equiv Sx = \min\{y \in U \mid x < y\}, \text{ εφόσον υπάρχει } y \in U \text{ με } x < y$$
$$seg(x) = \{y \in U \mid y < x\},$$

όπου $x \in U$.

Για δύο μερικά διατεταγμένους χώρους $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ ορίζουμε $P =_o Q$ αν υπάρχει $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow Q$ 1-1 και επί που **σέβεται τις διατάξεις**, δηλαδή για κάθε $x, y \in P$ ισχύει

$$x \leq_P y \iff \pi(x) \leq_Q \pi(y).$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο P είναι **όμοιος** με τον Q και η πιο πάνω π ονομάζεται **ομοιότητα**

Άσκηση 1. Έστω $(U, \leq)$ ένας καλά διατεταγμένος χώρος. Δείξτε ότι για κάθε $x \in U$ έχουμε

$$seg(Sx) = seg(x) \cup \{x\}.$$

Λύση.

Έστω $x \in U$. Αν $y \in seg(x) \cup \{x\}$, δηλαδή αν $y \leq x$, αφού $x < Sx$ θα έχουμε $y < Sx$. Άρα $seg(x) \cup \{x\} \subseteq seg(Sx)$. Θεωρούμε $y < Sx$. Αν είχαμε $x < y$ επειδή $Sx = \min\{z \in U \mid x < z\}$ θα είχαμε $Sx \leq y$ που είναι άτοπο. Άρα $x \not< y$ δηλαδή $y \leq x$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ με μέγιστο στοιχείο είναι επαγωγικός, δηλαδή κάθε αλυσίδα (ισοδύναμα κάθε υποσύνολό του) έχει supremum.

Λύση.

Έστω $S \subseteq U$. (Το S είναι φυσικά αλυσίδα γιατί ο $(U, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένος χώρος.) Θεωρούμε το σύνολο

$$UB = \{y \in U \mid (\forall x \in S)[x \leq y]\}$$

των άνω φραγμάτων (upper bounds) του συνόλου S. Το $\max U$, που υπάρχει από την υπόθεσή μας, ικανοποιεί $x \leq \max U$ για κάθε $x \in S$. Επομένως $\max U \in UB$ και $UB \neq \emptyset$.

Εφόσον ο U είναι καλά διατεταγμένος χώρος υπάρχει το $\min UB$, δηλαδή το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του S. Αυτό σημαίνει $\sup S = \min UB$.

Ορισμός: Το **άθροισμα** $P + Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων $(P, \leq_P)$ και $(Q, \leq_Q)$ είναι το σύνολο

$$P + Q = (\{0\} \times P) \bigcup (\{1\} \times Q)$$

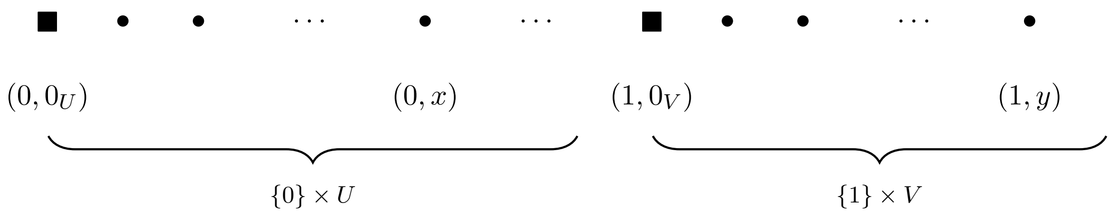
μαζί με τη διάταξη

$$(i, x) \leq (j, y) \iff [i = j = 0 \ \& \ x \leq_P y] \ \vee \ [i = j = 1 \ \& \ x \leq_Q y] \ \vee \ [i = 0 \ \& \ j = 1]$$

όπου $(i, x), (j, y) \in P + Q$. Παρατηρήστε ότι αν $i = 0$ τότε $x \in P$ και αν $i = 1$ τότε $x \in Q$.

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίγραφα των P, Q (τα $\{0\} \times P$ και $\{1\} \times Q$ αντίστοιχα) και τοποθετούμε το αντίγραφο του P "πριν" από το αντίγραφο του Q (αυτό προκύπτει από το $(0, x) \leq (1, y)$).

Το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων U, V σχηματικά:



Άσκηση 3 (Προβλήματα x7.2-x7.6)**.** Δείξτε ή απαντήστε τα ακόλουθα όσον αφορά το άθροισμα δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

(i) Αν $U =_o U'$ και $V =_o V'$ τότε $U + V =_o U' + V'$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, U', V, V'. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(ii) $U + (V + W) =_o (U + V) + W$ για κάθε καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W. (Δώστε μόνο τον ορισμό της ζητούμενης ομοιότητας.)

(iii) Αν U είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος ποιος είναι ο χώρος $U + \{0\}$ ως προς τη σχέση ομοιότητας $=_o$; (Συνοπτική απάντηση.)

(iv) Αν U, V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι τότε το άθροισμα $U + V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.

(v) Γιατί ισχύει $\{0\} + \mathbb{N} =_o \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} + \{0\}$; Συμπεράνετε ότι η πρόσθεση καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι μεταθετική πράξη.

Λύση.

(i) Έστω $\pi_1 : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow U'$ και $\pi_2 : V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow V'$ ομοιότητες. Ορίζουμε

$$\pi : (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times V) \to (\{0\} \times U') \cup (\{1\} \times V')$$

με $\pi(0, x) = (0, \pi_1(x))$ και $\pi(1, y) = (1, \pi_2(y))$, όπου $x \in U$ και $y \in V$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η π είναι ομοιότητα.

(ii) Από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} U + (V + W) &= (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times (V + W)) = (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times [(\{0\} \times V) \cup (\{1\} \times W)]) \\ &= (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times \{0\} \times V) \cup (\{1\} \times \{1\} \times W). \end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$(U + V) + W = (\{0\} \times \{0\} \times U) \cup (\{0\} \times \{1\} \times V) \cup (\{1\} \times W).$$

Οπότε ορίζουμε

$$\pi : U + (V + W) \to (U + V) + W : \pi(0, x) = (0, 0, x), \quad \pi(1, 0, y) = (0, 1, y), \quad \pi(1, 1, z) = (1, z)$$

όπου $x \in U$, $y \in V$ και $z \in W$.

(iii) Ο $U + \{0\} = (\{0\} \times U) \cup (\{1\} \times \{0\}) = (\{0\} \times U) \cup \{(1, 0)\}$ είναι όμοιος με τον **επόμενο** $Succ(U)$ του U, δηλαδή τον χώρο που προκύπτει αν τοποθετήσουμε το στοιχείο $r(U) \notin U$ "μετά" από όλα τα στοιχεία του U. Η ομοιότητα από τον $U + \{0\}$ στον $Succ(U)$ απεικονίζει τα στοιχεία του συνόλου $(\{0\} \times U) \cup \{(1, 0)\}$ ως εξής: $(0, x) \mapsto x$ και $(1, 0) \mapsto r(U)$.

(iv) Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $U + V = (\{0\} \times U) + (\{1\} \times V)$.

1η Περίπτωση: $A \cap (\{0\} \times U) \neq \emptyset$. Τότε για να βρούμε το ελάχιστο του A θα κοιτάξουμε μέσα στον U. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{x \in U \mid (0, x) \in A\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το B είναι ένα μη κενό υποσύνολο του U και συνεπώς υπάρχει το $\min B \in U$. Δείχνουμε ότι $(0, \min B) = \min A$, όπου το πρώτο minimum λαμβάνεται μέσα στον U ενώ το δεύτερο μέσα στον $U + V$. Για ευκολία συμβολίζουμε με $\trianglelefteq$ τη διάταξη στον $U + V$ και με $\triangleleft$ το αυστηρό της μέρος.

Επειδή $\min B \in B$ έχουμε $(0, \min B) \in A$. Έστω $(i, x) \in A$, αν $i = 0$ τότε $x \in B$, οπότε $\min B \leq x$ και $(0, \min B) \trianglelefteq (0, x) = (i, x)$. Αν $i = 1$ (και άρα $x \in V$) τότε $(0, \min B) \triangleleft (1, x) = (i, x)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $(0, \min B) \trianglelefteq (i, x)$ για κάθε $(i, x) \in A$. Καταλήγουμε ότι $(0, \min B) = \min A$.

2η Περίπτωση: $A \cap (\{0\} \times U) = \emptyset$. Τότε $A \subseteq \{1\} \times V$ και επομένως για να βρούμε το ελάχιστο του A θα πρέπει να κοιτάξουμε μέσα στον V. Θεωρούμε το σύνολο

$$C = \{y \in V \mid (1, y) \in A\}.$$

Αφού $\emptyset \neq A \subseteq \{1\} \times V$ έχουμε $C \neq \emptyset$. Επομένως υπάρχει το $\min C \in V$. Δείχνουμε ότι $(1, \min C) = \min A$. Επειδή $\min C \in C$ έχουμε $(1, \min C) \in A$. Έστω $(i, x) \in A$. Αν $i = 0$ τότε $x \in U$ οπότε $A \cap (\{0\} \times U) \neq \emptyset$, που είναι άτοπο γιατί είμαστε στη 2η Περίπτωση. Άρα $i = 1$ και $x \in V$. Αφού $(1, x) = (i, x) \in A$ έχουμε $x \in C$ και άρα $\min C \leq x$. Επομένως $(1, \min C) \leq (1, x)$. Καταλήγουμε ότι $(1, \min C) \leq (i, x)$ για κάθε $(i, x) \in A$ και άρα $(1, \min C) = \min A$.

(v) Ο χώρος $\{0\} + \mathbb{N} = (\{0\} \times \{0\}) \bigcup (\{1\} \times \mathbb{N}) = \{(0, 0)\} \bigcup (\{1\} \times \mathbb{N})$ είναι όμοιος με τον $\mathbb{N}$. Στην ουσία προσθέτουμε ένα στοιχείο στα αριστερά του $\mathbb{N}$, τότε ο καινούργιος χώρος έχει τη μορφή:

$$\underset{(0,0)}{\square} \qquad \underbrace{\blacksquare \qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \cdots}_{\{1\} \times \mathbb{N}}$$

Την ίδια μορφή έχει και ο $\mathbb{N}$. Αυστηρά ορίζουμε την απεικόνιση $\pi : \{(0, 0)\} \bigcup (\{1\} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} : \pi(0, 0) = 0_{\mathbb{N}}$ και $\pi(1, n) = n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Τότε η π είναι η ζητούμενη ομοιότητα.

Από την άλλη ο χώρος $\mathbb{N} + \{0\} = (\{0\} \times \mathbb{N}) \bigcup (\{1\} \times \{0\}) = (\{0\} \times \mathbb{N}) \bigcup \{(1, 0)\}$ έχει το $(1, 0)$ ως οριακό σημείο:

$$\underbrace{\blacksquare \qquad \bullet \qquad \bullet \qquad \cdots}_{\{0\} \times \mathbb{N}} \qquad \underset{(1,0)}{\square}$$

Αυστηρά: αν $(i, n) < (1, 0)$ τότε $i = 0$ και επομένως $(0, n) < (0, n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}) < (1, 0)$, άρα το $(1, 0)$ δεν μπορεί να είναι ο επόμενος του (i, n).

Ο δύο χώροι $\mathbb{N} + \{0\}$ και $\{0\} + \mathbb{N}$ δεν είναι όμοιοι γιατί αλλιώς θα είχαμε

$$\mathbb{N} + \{0\} =_o \{0\} + \mathbb{N} =_o \mathbb{N} =_o \{0\} \times \mathbb{N},$$

δηλαδή ο $\mathbb{N} + \{0\}$ θα ήταν όμοιος με το γνήσιο αρχικό τμήμα του $seg((1, 0)) = \{0\} \times \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί ένας καλά διατεταγμένος χώρος δεν μπορεί να είναι όμοιος με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του (γνωστό Θεώρημα).

Άσκηση 4 (Απαιτητική)**.**

(i) Έστω V ένας καλά διατεταγμένος χώρος που είναι άπειρο σύνολο και που δεν έχει οριακά σημεία. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to V$ με

$$f(0_{\mathbb{N}}) = 0_V \quad \text{και} \quad f(n + 1_{\mathbb{N}}) = \begin{cases} S_V(f(n)), & \text{αν υπάρχει } y \in V \text{ με } f(n) <_V y \\ 0_V, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι ομοιότητα και επομένως ισχύει $V =_o \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Η ιδέα είναι να απεικονίσουμε το $0_{\mathbb{N}}$ στο 0_V, το $1_{\mathbb{N}}$ στο $S_V(0_V)$ κ.ο.κ. Η δεύτερη περίπτωση στη διακλάδωση του ορισμού της f (δηλαδή το "αλλιώς") μπαίνει γιατί δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι για κάθε n θα υπάρχει $y \in V$ με $f(n) <_V y$. Το "αλλιώς" δεν θα συμβαίνει όμως ποτέ, δηλαδή θα είμαστε πάντα στην πρώτη περίπτωση.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο V που είναι άπειρο σύνολο έχουμε $1 + V =_0 V$, όπου $1 = \{\emptyset\}$ και $+$ είναι η πρόσθεση μεταξύ καλά διατεταγμένων χώρων.

Λύση.

(i) Αρχικά δείχνουμε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι για κάθε $k <_{\mathbb{N}} n$ έχουμε $f(k) <_V f(n)$ και πως για κάθε $y <_V f(n)$ υπάρχει $m <_{\mathbb{N}} n$ με $f(m) = y$.

Για $n = 0_{\mathbb{N}}$ το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα επειδή $f(0_{\mathbb{N}}) = 0_V$ και συνεπώς δεν υπάρχουν τέτοια k, y.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει για κάθε $k <_{\mathbb{N}} n$, $f(k) <_V f(n)$ και κάθε $y <_V f(n)$ υπάρχει $m <_{\mathbb{N}} n$ με $f(m) = y$.

Έστω $k <_{\mathbb{N}} n + 1_{\mathbb{N}}$. Από την επαγωγική υπόθεση το σύνολο $\{y \in V \mid y \leq_V f(n)\}$ είναι ίσο με το $\{f(m) \mid m \leq_{\mathbb{N}} n\}$ και επομένως είναι πεπερασμένο. Εφόσον το V είναι άπειρο σύνολο υπάρχει $y \in V$ εκτός αυτού του συνόλου και άρα $f(n) <_V y$. Επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση του ορισμού, δηλαδή $f(n + 1_{\mathbb{N}}) = S_V(f(n))$. Επιπλέον

$$f(k) \leq_V f(n) <_V S_V(f(n)) = f(n + 1_{\mathbb{N}}),$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και ότι $k \leq n$. Καταλήγουμε ότι $f(k) <_V f(n + 1_{\mathbb{N}})$. Θεωρούμε τώρα ένα $y <_V f(n + 1_{\mathbb{N}}) = S_V(f(n))$. Τότε $y \leq_V f(n)$. Αν $y <_V f(n)$ από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχει $m <_{\mathbb{N}} n$ με $y = f(m)$, ενώ αν $y = f(n)$ παίρνουμε $m = n$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή.

Από αυτό που έχουμε δείξει προκύπτει ότι η f σέβεται τις διατάξεις (και άρα είναι και 1-1) και πως το σύνολο $f[\mathbb{N}]$ είναι αρχικό τμήμα του V.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι επί. Τότε $f[\mathbb{N}] \neq V$ και επομένως υπάρχει $y \in V$ με $f[\mathbb{N}] = \mathrm{seg}_V(y)$. Προφανώς $y \neq 0_V$. **Αφού ο V δεν έχει οριακά σημεία** $y = S_V(x)$ για κάποιο $x \in V$. Τότε $x \in seg_V(y) = f[\mathbb{N}]$ άρα $x = f(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αλλά τότε $x = f(n) <_V f(n + 1_{\mathbb{N}})$ και άρα $y = S_V(x) \leq f(n + 1_{\mathbb{N}})$, δηλαδή $f(n + 1_{\mathbb{N}}) \notin \mathrm{seg}_V(y) = f[\mathbb{N}]$, άτοπο. Επομένως η f είναι επί και άρα είναι και ομοιότητα.

(ii) Αν ο V δεν έχει οριακά σημεία τότε από το (i) $V =_o \mathbb{N}$. Έχουμε δει από προηγούμενη άσκηση ότι

$$1 + \mathbb{N} =_0 \mathbb{N} \quad \text{άρα} \quad 1 + V =_o V.$$

Επομένως υποθέτουμε ότι ο V έχει οριακά σημεία. Θεωρούμε το ελάχιστο οριακό σημείο ω_V του V. Τότε το άπειρο σύνολο $\mathrm{seg}_V(\omega_V)$ μαζί με τη διάταξη του V είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος που δεν έχει οριακά σημεία. Από τα προηγούμενα $1 + \mathrm{seg}_V(\omega_V) =_o seg_V(\omega_V)$. Επιπλέον αν θέσουμε $U = \{y \in V \mid \omega_V \leq y\}$ έχουμε

$$V =_o \mathrm{seg}_V(\omega_V) + U.$$

Άρα

$$1 + V =_o 1 + (seg_V(\omega_V) + U) =_o (1 + seg_V(\omega_V)) + U =_o \mathrm{seg}_V(\omega_V) + U =_o V.$$