

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις
Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



3ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1.

- (i) Ορίστε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(ii) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το \mathbb{R} .

Λύση.

(i) Αν έχουμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ορίζουμε την ακολουθία $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής:

$$c_n = \begin{cases} a_k, & \text{αν } n = 2k \\ b_k, & \text{αν } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Η $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ αντιστοιχεί στο ζεύγος $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ την προηγούμενη ακολουθία $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η f είναι 1-1 και επί.

(ii) Αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στο πλήθος n των παραγόντων. Για $n = 2$ έχουμε από το (i) ότι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$ επομένως $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι το γινόμενο n παραγόντων $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το \mathbb{R} . Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $A_1 =_c A_2$ και $B_1 =_c B_2$ τότε $A_1 \times B_1 =_c A_2 \times B_2$.

Θεωρούμε τώρα το γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που αποτελείται από $n + 1$ παράγοντες. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (\text{επαγωγική υπόθεση}) \\ &= \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (\text{μέσω της } (a, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto (a, x_0, x_1, x_2, \dots)) \\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (Άσκηση 2.23 plus). Αν $A_1 \leq_c A_2$ και αν $B_1 \leq_c B_2$ δείξτε ότι

$$(A_1 \rightarrow B_1) \leq_c (A_2 \rightarrow B_2)$$

Με χρήση του συμβολισμού $(A \rightarrow B) \equiv B^A$ το παραπάνω γράφεται ως εξής:

$$B_1^{A_1} \leq_c B_2^{A_2}.$$

Συμπεράνετε το ζητούμενο της Άσκησης 2.23 του βιβλίου:

$$\text{Αν } A_1 =_c A_2 \text{ και αν } B_1 =_c B_2 \text{ τότε } (A_1 \rightarrow B_1) =_c (A_2 \rightarrow B_2) \text{ ή αλλιώς } B_1^{A_1} =_c B_2^{A_2}.$$

Υπόδειξη: Για το πρώτο ζητούμενο θεωρήστε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : A_1 \rightarrow A_2$ και (με εφαρμογή γνωστής άσκησης) μια συνάρτηση $\pi : A_2 \rightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$.

Λύση.

Σύμφωνα με την υπόδειξη θεωρούμε συναρτήσεις $\tau : A_1 \rightarrow A_2$ και $\pi : A_2 \rightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$. Θεωρούμε επίσης μια συνάρτηση $\rho : B_1 \rightarrow B_2$.

Θέλουμε να ορίσουμε μια 1-1 συνάρτηση H που να αντιστοιχεί μια τυχαία συνάρτηση $f \in (A_1 \rightarrow B_1)$ σε μια συνάρτηση $H(f) = g \in (A_2 \rightarrow B_2)$. Δοσμένης $f \in (A_1 \rightarrow B_1)$ ορίζουμε

$$H(f) : A_2 \rightarrow B_2 : H(f)(a_2) = (\rho \circ f \circ \pi)(a_2).$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{\pi} & \\
 A_1 & \xrightarrow{\tau} & A_2 \\
 f \downarrow & & \downarrow H(f) \\
 B_1 & \xrightarrow{\rho} & B_2
 \end{array}$$

Δείχνουμε ότι η συνάρτηση $H : (A_1 \rightarrow B_1) \rightarrow (A_2 \rightarrow B_2) : f \mapsto H(f)$ είναι 1-1. Θεωρούμε $f, f' \in (A_1 \rightarrow B_1)$ με $H(f) = H(f')$ και δείχνουμε ότι $f = f'$.

Έστω $a_1 \in A_1$, πρέπει να δείξουμε ότι $f(a_1) = f'(a_1)$. Παίρνουμε το $a_2 = \tau(a_1) \in A_2$. Εφόσον οι συναρτήσεις $H(f)$ και $H(f')$ είναι ίσες, θα παίρνουν και την ίδια τιμή στο a_2 . Επομένως

$$H(f)(a_2) = H(f')(a_2)$$

ισοδύναμα

$$(\rho \circ f \circ \pi)(a_2) = (\rho \circ f' \circ \pi)(a_2).$$

Παρατηρούμε ότι $\pi(a_2) = \pi(\tau(a_1)) = a_1$ από την ιδιότητα της π , επομένως η πιο πάνω ισότητα γίνεται

$$(\rho \circ f)(a_1) = (\rho \circ f')(a_1) \quad \text{δηλαδή} \quad \rho(f(a_1)) = \rho(f'(a_1)).$$

Εφόσον η ρ είναι 1-1 προκύπτει $f(a_1) = f'(a_1)$ και έχουμε το ζητούμενο.

Το συμπέρασμα της Άσκησης 2.23 του βιβλίου προκύπτει από αυτό μου μόλις αποδείξαμε και με τη χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein.

Μπορεί κανείς να λύσει την Άσκηση 2.23 και κατευθείαν. Η μέθοδος είναι ίδια με πιο πάνω και μάλιστα πιο απλή: αν έχουμε αντιστοιχίες $\tau : A_1 \rightarrow A_2$ και $\rho : B_1 \rightarrow B_2$ τότε μπορούμε να πάρουμε $\pi = \tau^{-1}$. Η συνάρτηση H όπως πιο πάνω είναι τότε 1-1 και (μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ότι είναι και) επί.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x2.7). Δείξτε ότι

$$(A \times B \rightarrow C) =_c (A \rightarrow (B \rightarrow C)).$$

Με τον άλλο συμβολισμό:

$$C^{A \times B} =_c (C^B)^A.$$

Λύση.

Θέλουμε να ορίσουμε μια αντιστοιχία π από το σύνολο $(A \times B \rightarrow C)$ στο σύνολο $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$. Για κάθε $p \in (A \times B \rightarrow C)$ το $\pi(p)$ είναι μια συνάρτηση από το A στο σύνολο $(B \rightarrow C)$ έτσι ώστε για κάθε $a \in A$:

$$\pi(p)(a) : B \rightarrow C : \pi(p)(a)(b) = p(a, b).$$

Δείχνουμε ότι η συνάρτηση $p \mapsto \pi(p)$ είναι 1-1 και επί.

Έστω $\pi(p) = \pi(p')$, πρέπει να δείξουμε ότι $p = p'$. Θεωρούμε $(a, b) \in A \times B$. Τότε $\pi(p)(a)(b) = \pi(p')(a)(b)$ δηλαδή $p(a, b) = p'(a, b)$. Επομένως $p = p'$ και η π είναι 1-1.

Για το “επί” θεωρούμε $h \in (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ και ορίζουμε $p : A \times B \rightarrow C$ με $p(a, b) = h(a)(b)$, δηλαδή το $p(a, b)$ είναι η τιμή της συνάρτησης $h(a) : B \rightarrow C$ στο b . Δείχνουμε ότι $\pi(p) = h$. Έστω $a \in A$, πρέπει να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\pi(p)(a)$ και $h(a)$ από το B στο C είναι ίσες. Για κάθε $b \in B$ έχουμε

$$\pi(p)(a)(b) = p(a, b) = h(a)(b)$$

επομένως $\pi(p)(a) = h(a)$.

Άσκηση 4 (Προβλήματα x2.5 και x2.6). Δείξτε ότι

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Συμπεράνετε ότι όλα τα πιο πάνω είναι ισότητες κατά Cantor.

Λύση.

Εφόσον $\{0, 1\} \leq_c \mathbb{N} \leq_c \mathbb{R}$ έχουμε από γνωστή άσκηση ότι

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Επιπλέον δείξαμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \Delta$ και επομένως

$$(1) \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Επειδή $\mathbb{R} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, έχουμε

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right)^{\mathbb{N}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R},$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}$ και από την (1) προκύπτει

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Τέλος, αφού $\mathbb{R} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτουν οι ισότητες κατά Cantor.

Άσκηση 5. Βρείτε με ποια από τα \mathbb{R} , $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ είναι ισοπληθικά τα ακόλουθα σύνολα:

$$\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1), \quad \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad [0, 1]^{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

Λύση.

Προφανώς ισχύει $\mathbb{R} \leq_c \mathbb{R}^n \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ μέσω των συναρτήσεων

$$x \mapsto (x, 0, \dots, 0) \quad \text{και} \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Εφόσον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$ προκύπτει από το Θεώρημα Schröder-Bernstein ότι $\mathbb{R}^n =_c \mathbb{R}$.

Για το επόμενο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ έχουμε προφανώς

$$\mathbb{R} \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{R} \leq_c \mathbb{R} \times \mathbb{R} =_c \mathbb{R},$$

άρα $\mathbb{N} \times \mathbb{R} =_c \mathbb{R}$.

Για το $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ χρησιμοποιούμε ότι $\mathbb{R} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} =_c \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right)^{\mathbb{R}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{R}} =_c \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Στην προτελευταία από τις πιο πάνω ισότητες κατά Cantor χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{R} =_c \mathbb{R}$. Η τελευταία προκύπτει με τον ίδιο τρόπο που δείξαμε ότι $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ - γενικά ισχύει $\{0, 1\}^A =_c \mathcal{P}(A)$ για κάθε σύνολο A .

Για τα τελευταία δύο σύνολα υπειθυμίζουμε ότι $[0, 1] =_c \mathbb{R}$ επομένως

$$[0, 1]^{\mathbb{R}} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{R}} =_c \mathbb{R}^{[0,1]}$$

και άρα

$$[0, 1]^{\mathbb{R}} =_c \mathbb{R}^{[0,1]} =_c \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x2.9). Δείξτε ότι το σύνολο $C([0, 1])$ όλων των **συνεχών** πραγματικών συναρτήσεων στο $[0, 1]$ είναι ισοπληθικό με το \mathbb{R} .

Υπόδειξη. Μια συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ καθορίζεται από τις τιμές της στους ρητούς αριθμούς του $[0, 1]$.

Λύση.

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ τότε $f = g$. (Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε $x \in [0, 1]$ είναι το όριο μια ακολουθίας ρητών $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $[0, 1]$, επομένως λόγω συνέχειας έχουμε $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(q_n) = g(x)$.)

Θεωρούμε μια απαρίθμηση των ρητών αριθμών στο $[0, 1]$,

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f \mapsto (f(r_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Με άλλα λόγια η π απεικονίζει τη συνεχή συνάρτηση f στην ακολουθία των τιμών της στους ρητούς αριθμούς του $[0, 1]$.

Δείχνουμε ότι η π είναι 1-1. Έστω $\pi(f) = \pi(g)$, τότε $f(r_n) = g(r_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή η $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι απαρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ έχουμε $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Σύμφωνα με τα πιο πάνω έχουμε $f = g$.

Επειδή η π είναι 1-1 προκύπτει ότι $C([0, 1]) \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$, η τελευταία ισότητα κατά Cantor είναι γνωστή από τα προηγούμενα.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathbb{R} \leq_c C([0, 1])$: σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούμε τη σταθερή συνάρτηση $c_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto x$ η οποία είναι φυσικά συνεχής. Είναι σαφές ότι η συνάρτηση $(x \in \mathbb{R} \mapsto c_x)$ είναι 1-1.

Με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι $\mathbb{R} <_c ([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]} =$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Λύση.

Από ένα θεώρημα του Cantor έχουμε $\mathbb{R} <_c \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}^{[0,1]}$.

Αρχικά θεωρούμε μια 1-1 συνάρτηση $\tau : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ - γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοια και μάλιστα μπορεί κανείς να την ορίσει με έναν σχετικά απλό τύπο.

Σε κάθε υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ αντιστοιχούμε τη συνάρτηση $f_A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \tau[A] \\ 0, & \text{αν } x \notin \tau[A] \end{cases}$$

(Η ιδέα είναι η συνάρτηση f_A να διατηρεί όλη την πληροφορία για το σύνολο A . Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την τ είναι επειδή θέλουμε η συνάρτηση f_A να ορίζεται στο $[0, 1]$. Αν οι συναρτήσεις ορίζονταν σε όλο το \mathbb{R} θα μπορούσαμε να πάρουμε απλά τη χαρακτηριστική συνάρτηση του A .)

Είναι σαφές ότι $f_A \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $(A \mapsto f_A)$ είναι 1-1. Αν έχουμε $f_A = f_B$ όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τότε έχουμε για κάθε $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z \in A &\iff \tau(z) \in \tau[A] && \text{(χρησιμοποιούμε ότι η } \tau \text{ είναι 1-1)} \\ &\iff f_A(\tau(z)) = 1 \\ &\iff f_B(\tau(z)) = 1 \\ &\iff \tau(z) \in \tau[B] \\ &\iff z \in B. \end{aligned}$$

Άρα $A = B$ και η απεικόνιση $(A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto f_A \in \mathbb{R}^{[0,1]})$ είναι 1-1. Επομένως $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}^{[0,1]}$.