Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

6ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$Sn = n + 1 = 1 + n \quad \text{και} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίς να επικαλεστείτε την αντιμεταθετική ιδιότητα των πράξεων. Στις ισότητες που αφορούν τον πολλαπλασιασμό μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι $0 + n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x5.1). Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή για κάθε n, m, k έχουμε

$$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k).$$

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x5.2 - Απαιτητική). Δείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή για κάθε n, m έχουμε

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x5.3). Η πράξη της ύψωσης σε δύναμη ορίζεται με αναδρομή στο m,

$$\begin{aligned} n^0 &= 1, \\ n^{Sm} &= n^m \cdot n, \end{aligned}$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ με $n \neq 0$.

Δείξτε ότι για κάθε n, m, k έχουμε

$$\begin{aligned} n^{m+k} &= n^m \cdot n^k, \\ n^{m \cdot k} &= \left(n^m\right)^k. \end{aligned}$$

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x5.4). Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, και τη μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Σε κάθε σύστημα φυσικών αριθμών ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού: $+_1$, $\cdot_1$ και $+_2$, $\cdot_2$.

Δείξτε ότι η π είναι ομοιομορφισμός ως προς αυτές τις πράξεις, δηλαδή για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(n +_1 m) &= \pi(n) +_2 \pi(m) \\ \pi(n \cdot_1 m) &= \pi(n) \cdot_2 \pi(m). \end{aligned}$$

Υπενθύμιση: Σταθεροποιούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και ορίζουμε τις σχέσεις $\leq$, και $<$ ως εξής:

$$\begin{aligned} n \leq m &\iff (\exists k \in \mathbb{N})[n + k = m] \\ n < m &\iff n \leq m \;\&\; n \neq m, \end{aligned}$$

όπου $n, m \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6.

(i) Δείξτε ότι $n < Sn$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$, αν $k < n$ τότε $Sk \leq n$.

Άσκηση 7. Αποδείξτε το Θεώρημα Αναδρομής (χωρίς παραμέτρους) με τη βοήθεια του Θεωρήματος Αναδρομής με παραμέτρους.

Άσκηση 8 (Ιδιαίτερα απαιτητική). Αποδείξτε το Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους:

Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$ και μη κενά σύνολα E, Y. Τότε για κάθε συναρτήσεις $g : Y \to E$ και $h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & f(0, y) = g(y) \\ \text{και} \quad & f(Sn, y) = h(f(n, y), n, y) \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $y \in Y$.

Υπόδειξη. Να εφαρμόσετε για κάθε $y \in Y$ το Θεώρημα Αναδρομής χωρίς παραμέτρους στα

$$E' = \mathbb{N} \times E, \; a_y = (0, g(y)) \text{ και } h_y : E' \to E' : h_y(m, b) = (Sm, h(b, m, y)).$$

Αν $\varphi_y : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times E$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την εφαρμογή του Θεώρηματος Αναδρομής στα προηγούμενα, εξηγήστε γιατί ορίζεται η

$$\varphi : \mathbb{N} \times Y \to \mathbb{N} \times E : \varphi(n, y) = \varphi_y(n)$$

και θεωρήστε την $f : \mathbb{N} \times Y \to E : f(n, y) =$ η δεύτερη συντεταγμένη του $\varphi(n, y)$.