Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Κατασκευή συστήματος φυσικών αριθμών από δοσμένο σύστημα)**.** Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, ένα σύνολο $\mathbb{N}_2$ και μια $1-1$ και επί συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0_2 \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ έτσι ώστε η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ να είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Λύση.
Ορίζουμε $0_2 = \pi(0_1) \in \mathbb{N}_2$ και $S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$, $m \in \mathbb{N}_2$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "S_1"'] & \mathbb{N}_2 \arrow[l, bend right, "\pi^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "S_2"] \\
\mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{N}_2
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι η S_2 είναι καλά ορισμένη αφού η π είναι $1-1$ και επί. Η S_2 είναι $1-1$ ως σύνθεση $1-1$ συναρτήσεων.

Αν είχαμε $S_2 m = 0_2$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}_2$ τότε θα είχαμε

$$\pi(0_1) = 0_2 = S_2 m = \pi(S_1 \pi^{-1}(m))$$

και αφού η π είναι $1-1$ προκύπτει $0_1 = S_1 \pi^{-1}(m)$. Επομένως το 0_1 θα ανήκε στην εικόνα της S_1 που είναι άτοπο. Άρα $S_2 m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$.

Τέλος δείχνουμε την Αρχή της Επαγωγής στο $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Έστω $Y \subseteq \mathbb{N}_2$ με $0_2 \in Y$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}_2$ αν $m \in Y$ τότε $S_2 m \in Y$. Θεωρούμε το σύνολο $X = \pi^{-1}[Y]$. Αφού $\pi(0_1) = 0_2 \in Y$ έχουμε $0_1 \in X$.

Έστω $n \in X$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}_1$. Τότε $\pi(n) \in Y$ και από την υπόθεσή μας για το σύνολο Y έχουμε ότι $S_2 \pi(n) \in Y$. Αλλά $S_2 \pi(n) = \pi(S_1 \pi^{-1}(\pi(n))) = \pi(S_1 n)$. Άρα $\pi(S_1 n) \in Y$ που σημαίνει ότι $S_1 n \in X$. Με άλλα λόγια δείξαμε για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$,

$$n \in X \implies S_1 n \in X.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής στο σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ έχουμε $\pi^{-1}[Y] = X = \mathbb{N}_1$. Εφόσον η π είναι επί προκύπτει ότι $Y = \mathbb{N}_2$ και επομένως η Αρχή της Επαγωγής ισχύει για την τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$.

Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι η τριάδα $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών.

Άσκηση 2. Θεωρούμε ένα σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}, 0, S)$, ένα σύνολο X, ένα στοιχείο $x_0 \in X$ και μια συνάρτηση $g : X \to X$. Δείξτε τα εξής:

(i) Υπάρχει μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες $A_0 = \{x_0\}$ και $A_{Sn} = g[A_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει ένα **αριθμήσιμο** σύνολο B με την ιδιότητες $x_0 \in B$ και αν $x \in B$ τότε $g(x) \in B$.

Λύση.

(i) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναδρομής στο σύνολο $E = \mathcal{P}(X)$ με $a = \{x_0\}$ και $h : E \to E : A \mapsto g[A]$. Από το Θεώρημα Αναδρομής υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με $f(0) = a = \{x_0\}$ και $f(Sn) = h(f(n)) = g[f(n)]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε παίρνουμε $A_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Θεωρούμε την πιο πάνω ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και παίρνουμε $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Προφανώς $x_0 \in A_0 \subseteq B$, άρα $x_0 \in B$. Αν $x \in B$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in A_n$ και άρα $g(x) \in g[A_n] = A_{Sn} \subseteq B$, επομένως $g(x) \in B$.

Τέλος δείχνουμε ότι το B είναι αριθμήσιμο. Από γνωστό θεώρημα (αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n είναι αριθμήσιμο. Για την ακρίβεια δείχνουμε ότι κάθε A_n είναι μονοσύνολο.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Για $n = 0$ έχουμε $A_0 = \{x_0\}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n είναι μονοσύνολο, $A_n = \{a\}$. Τότε $A_{Sn} = g[A_n] = g[\{a\}] = \{g(a)\}$ και επομένως το A_{Sn} είναι μονοσύνολο.

Σχόλιο: Το σύνολο B που κατασκευάζεται με τον πιο πάνω τρόπο αποτελείται από τα στοιχεία x_0, $g(x_0)$, $g(g(x_0))$, ..., και συνήθως αποκαλείται η **τροχιά** του x_0 ως προς τη συνάρτηση g.

Άσκηση 3. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της συνάρτησης f στο Θεώρημα Αναδρομής: για κάθε συνόλο E, κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \to E$ υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ με τις ιδιότητες $f(0) = a$ και $f(Sn) = h(f(n))$ για κάθε n, όπου $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι ένα σύστημα φυσικών αριθμών.

Λύση.

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to E$ και $g : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θεωρήματος Αναδρομής και δείχνουμε με επαγωγή ότι $f(n) = g(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε $f(0) = a = g(0)$. Υποθέτουμε ότι $f(n) = g(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$f(Sn) = h(f(n)) = h(g(n)) = g(Sn)$$

και από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος α ʹ). Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ και μια συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ με τις ιδιότητες:

$$\pi(0_1) = 0_2$$
$$\pi(S_1 n) = S_2 \pi(n) \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

(i) Δείξτε ότι η π είναι επί.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $X = \{m \in \mathbb{N}_2 \mid (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)]\}$.

(ii) Δείξτε ότι η π είναι $1 - 1$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $Y = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(n) = \pi(m)] \implies n = m\}$.

Λύση.

(i) Θεωρούμε το σύνολο X της υπόδειξης. Έχουμε $0_2 = \pi(0_1)$ επομένως $0_2 \in X$. Έστω $m \in X$, θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}_1$ με $m = \pi(n)$. Τότε $S_2 m = S_2 \pi(n) = \pi(S_1 n)$ επομένως $S_2 m = \pi(n')$ για κάποιο $n' \in \mathbb{N}_1$ (συγκεκριμένα το $n' = S_1 n$) και άρα $S_2 m \in X$.

Από την Αρχή Επαγωγής στο σύστημα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ έχουμε $X = \mathbb{N}_2$ και άρα η π είναι επί.

(ii) Θεωρούμε το σύνολο Y της υπόδειξης. Δείχνουμε αρχικά ότι $0_1 \in Y$. Έστω $m \in \mathbb{N}_1$ με $\pi(0_1) = \pi(m)$. Έπεται ότι $\pi(m) = 0_2$. Αν είχαμε $m \neq 0_1$ τότε από γνωστό Λήμμα $m = S_1 k$ για κάποιο $k \in N_1$. Αλλά τότε

$$0_2 = \pi(m) = \pi(S_1 k) = S_2 \pi(k)$$

και τότε το 0_2 θα ανήκε στην εικόνα της S_2 που είναι άτοπο. Άρα $m = 0_1$ και έχουμε επομένως $0_1 \in Y$.

Θεωρούμε τώρα $n \in Y$ και (για να δείξουμε ότι $S_1 n \in Y$) θεωρούμε επίσης $m \in \mathbb{N}_1$ με $\pi(S_1 n) = \pi(m)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $m = S_1 n$. Αρχικά εξασφαλίζουμε ότι $m \neq 0_2$. Έχουμε

$$\pi(m) = \pi(S_1 n) = S_2 \pi(n) \neq 0_2.$$

Αφού $\pi(0_1) = 0_2$ προκύπτει ότι $m \neq 0_1$. Από γνωστό Λήμμα υπάρχει $k \in \mathbb{N}_1$ με $m = S_1 k$. Δείχνουμε ότι $k = n$. Έχουμε

$$S_2 \pi(n) = \pi(m) = \pi(S_1 k) = S_2 \pi(k).$$

Επειδή η συνάρτηση S_2 είναι $1-1$ προκύπτει $\pi(n) = \pi(k)$ και αφού $n \in Y$ έχουμε $n = k$. Επομένως $m = S_1 k = S_1 n$ και $S_1 n \in Y$.

Άσκηση 5 (Μοναδικότητα φυσικών αριθμών - μέρος β). Θεωρούμε δύο συστήματα φυσικών αριθμών $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2 \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Σχόλιο: Με βάση την προηγούμενη άσκηση αυτή η μοναδική συνάρτηση π είναι αντιστοιχία. Από αυτές τις δύο ασκήσεις προκύπτει ότι στην ουσία έχουμε μόνο ένα σύστημα φυσικών αριθμών, δηλαδή για κάθε δύο συστήματα η δομή του ενός μεταφέρεται στο άλλο μέσω μιας αντιστοιχίας.

Λύση.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναδρομής παίρνοντας για σύστημα φυσικών αριθμών το $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, $E = \mathbb{N}_2$, $a = 0_2$, και $h : E \to E : h(m) = S_2 m$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to E = \mathbb{N}_2$ ώστε $\pi(0_1) = 0_2$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}_1$ ισχύει:

$$\pi(S_1 n) = h(\pi(n)) = S_2 \pi(n).$$

Για τη μοναδικότητα θεωρούμε μια συνάρτηση $\pi' : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί: $\pi'(0_1) = 0_2$ και

$$\pi'(S_1 n) = S_2 \pi'(n) \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Τότε η π' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Αναδρομής για τις συγκεκριμένες επιλογές $E = \mathbb{N}_2$, $a = 0_2$, και $h = S_2$:

$$\pi'(0_1) = a, \qquad \pi'(S_1 n) = h(\pi'(n)) \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Από τη μοναδικότητα της συνάρτησης που προκύπτει στο Θεώρημα Αναδρομής έχουμε $\pi = \pi'$.