Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

4ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39).

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα A, B και C. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

Λύση.

(i) Έχουμε
$$(x, y, z) = (x, (y, z)) = (x', (y, z')) = (x', y', z').$$
Τότε $x = x'$ και $(y, z) = (y', z')$. Από το τελευταίο προκύπτει $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ δύο συνόλων X_1 και X_2 είναι σύνολο. Επομένως έχουμε τα σύνολα $B \times C$ και $A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

Σχόλιο. Αν επιλέξουμε να ορίσουμε το (x, y, z) ως $((x, y), z)$ τότε η άσκηση επιλύεται με τον ανάλογο τρόπο.

Ορισμός. Η **ξένη ένωση** $A \uplus B$ των συνόλων A, B ορίζεται ως εξής:
$$A \uplus B = (\{\emptyset\} \times A) \bigcup (\{\{\emptyset\}\} \times B).$$

Παρατηρήστε ότι $(\{\emptyset\} \times A) \bigcap (\{\{\emptyset\}\} \times B) = \emptyset$ ακριβώς επειδή $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Η ιδέα στον ορισμό της ξένης ένωσης είναι να δημιουργήσουμε δύο ξένα "αντίγραφα" των A, B και μετά να πάρουμε την ένωσή τους.

Κάπως πιο γλαφυρά θεωρούμε ότι βάφουμε τα στοιχεία των A, B με διαφορετικά χρώματα και μετά τα τοποθετούμε μαζί σε ένα σύνολο. Ας καλέσουμε το ένα χρώμα **κόκκινο** και το άλλο **μπλε**. Το βάψιμο επιτυγχάνεται μέσω των απεικονίσεων $a \mapsto (\textbf{κόκκινο}, a)$ και $b \mapsto (\textbf{μπλε}, b)$, έτσι που το $\{\textbf{κόκκινο}\} \times A$ είναι το A με τα στοιχεία του βαμμένα κόκκινα και το $\{\textbf{μπλε}\} \times B$ είναι το B με τα στοιχεία του βαμμένα μπλε. Για να διατυπωθεί αυτό στη γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων παίρνουμε για **κόκκινο** να είναι το $\emptyset$ και για **μπλε** να είναι το $\{\emptyset\}$ και παρατηρούμε ότι $\textbf{κόκκινο} \neq \textbf{μπλε}$.

Άσκηση 2 (Άσκηση 4.18 σελ. 45). Δείξτε ότι αν $A =_c A'$ και $B = B'$ τότε

(i) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$

(ii) $A \times B =_c A' \times B'$

(iii) $(A \to B) =_c (A' \to B')$.

Σχόλιο. Στα (i) και (ii) να ορίσετε μόνο τις ζητούμενες συναρτήσεις χωρίς να δείξετε ότι είναι $1-1$ και επί. Το (iii) το έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση. Εδώ εξηγήστε γιατί η αντιστοιχία $H : (A \to B) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (A' \to B')$ που ορίσαμε είναι σύνολο.

Λύση.

Θεωρούμε $\tau : A \to A'$ και $\rho : B \to B'$ $1-1$ και επί συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X \uplus Y = (\{\emptyset\} \times X) \bigcup (\{\{\emptyset\}\} \times Y).$$

(i) Ορίζουμε $g : (\{\emptyset\} \times A) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B) \longrightarrow (\{\emptyset\} \times A') \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B')$ ως εξής:

$$g(\emptyset, x) = (\emptyset, \tau(x)), \quad \text{όπου } x \in A \qquad \text{και} \qquad g(\{\emptyset\}, x) = (\{\emptyset\}, \rho(x)) \quad \text{όπου } x \in B.$$

Προκύπτει εύκολα ότι η g είναι $1-1$ και επί.

(ii) Ορίζουμε $h : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ με $h(a,b) = (\tau(a), \rho(b))$. Τότε η h είναι $1-1$ και επί.

(iii) Όπως έχουμε δει η ζητούμενη $1-1$ και επί συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$H : (A \to B) \to (A' \to B') : H(f)(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[l, bend right, "\tau^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "H(f)"] \\ B \arrow[r, "\rho"'] & B' \end{tikzcd}$$

Όλα οι προηγούμενες συναρτήσεις ορίζονται και αποδεικνύεται ότι είναι 1-1 και επί με βάση τα αξιώματα. Για παράδειγμα η H ορίζεται ως το σύνολο

$$\{(f, g) \in (A \to B) \times (A' \to B') \mid (\forall a' \in A')[g(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')]\}.$$

Άσκηση 3. Δίνεται μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ όπου το I είναι μη κενό σύνολο. Δείξτε ότι ορίζονται σύνολα $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$, και $\prod_{i \in I} A_i$ που ικανοποιούν τα εξής:

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I \ (x \in A_i)$

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I \ (x \in A_i)$

$y \in \prod_{i \in I} A_i \iff$ το y είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το I και $\forall i \in I \ (y(i) \in A_i)$.

Αναφερθείτε στα Αξιώματα που χρησιμοποιήσατε.

Λύση.

Αφού η $(A_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια συνόλων υπάρχει σύνολο $\mathcal{E}$ και συνάρτηση $f : I \to \mathcal{E}$ με $f(i) = A_i$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \in \textstyle\bigcup \mathcal{E} \mid \exists i \in I \ (x \in f(i))\}, \\ \textstyle\bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \in \textstyle\bigcup \mathcal{E} \mid \forall i \in I \ (x \in f(i))\}, \\ \textstyle\prod_{i \in I} A_i &= \{y \in (I \to \textstyle\bigcup \mathcal{E}) \mid \forall i \in I \ (y(i) \in f(i))\}. \end{aligned}$$

Από το Αξίωμα της Ένωσης το $\bigcup \mathcal{E}$ είναι σύνολο. Όπως έχουμε δείξει (με χρήση του Αξιώματος του Δυναμοσυνόλου και του Αξιώματος Διαχωρισμού) ορίζεται το σύνολο $(I \to \bigcup \mathcal{E})$ όλων των συναρτήσεων από το I στο $\bigcup \mathcal{E}$. Από το Αξίωμα Διαχωρισμού τα πιο πάνω είναι σύνολα.

Για να δούμε ότι ικανοποιούνται οι ζητούμενες ισοδυναμίες παρατηρούμε πως αν $x \in f(i)$ για κάποιο $i \in A_i$, επειδή $f(i) = A_i \in \mathcal{E}$ θα έχουμε $x \in \bigcup \mathcal{E}$. Άρα αν το x (ή το y) ικανοποιεί μία από τις τρεις οριστικές συνθήκες της εκφώνησης τότε θα ανήκει και στο αντίστοιχο σύνολο. Το αντίστροφο, δηλαδή αν το x (ή το y) ανήκει σε κάποιο από τα τρία πιο πάνω σύνολα, τότε θα ικανοποιεί και την αντίστοιχη οριστική συνθήκη της εκφώνησης.

Άσκηση 4. Δίνεται ένα μη κενό σύνολο I και μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ με δείκτες στο I. Τότε υπάρχει σύνολο E και συνάρτηση $g : I \to \mathcal{P}(E)$ με $A_i = g(i)$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα A_i είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου.

Λύση.

Εφόσον η $(A_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια συνόλων υπάρχει σύνολο $\mathcal{E}$ και συνάρτηση $f : I \to \mathcal{E}$ με $A_i = f(i)$ για κάθε $i \in I$. Παίρνουμε $E = \bigcup_{i\in I} A_i$, έτσι που $A_i \subseteq E$ και άρα $A_i \in \mathcal{P}(E)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε $g = f : I \to \mathcal{P}(E) : g(i) = f(i) = A_i$.