Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x1.2 - Οι νόμοι του De Morgan)**.**
Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύει

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Λύση.
Για κάθε στοιχείο x έχουμε:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in C \text{ και} (x \notin A \text{ και } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ και } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
Επιπλέον:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in C \text{ και } (x \notin A \textbf{ ή } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ ή } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x1.3)**.** Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύουν

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$$
$$f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B].$$

Αν η f είναι 1-1 δείξτε ότι οι πιο πάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες. Βρείτε επίσης παραδείγματα όπου οι ισότητες δεν ισχύουν αν η f δεν είναι 1-1.

Λύση.
Θεωρούμε $y \in f[A \cap B]$. Τότε υπάρχει $x \in A \cap B$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in A$ έχουμε $y = f(x) \in f[A]$ και αφού $x \in B$ έχουμε $y = f(x) \in f[B]$. Άρα $y \in f[A] \cap f[B]$.

Για τον άλλο εγκλεισμό θεωρούμε $y \in f[A] \setminus f[B]$ και $x \in A$ με $y = f(x)$. Αν ήταν $x \in B$ τότε θα είχαμε $y = f(x) \in f[B]$, άτοπο. Άρα $x \notin B$ και επομένως $x \in A \setminus B$. Καταλήγουμε ότι $y = f(x) \in f[A \setminus B]$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1. Δείχνουμε αρχικά ότι $f[A] \cap f[B] \subseteq f[A \setminus B]$. Έστω $y \in f[A] \cap f[B]$, και $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ με $y = f(x_1) = f(x_2)$. Αφού η f είναι 1-1 θα έχουμε $x_1 = x_2 \in A \cap B$. Άρα $y = f(x_1) \in f[A \cap B]$.

Τώρα δείχνουμε ότι $f[A \setminus B] \subseteq f[A] \setminus f[B]$. Έστω $y \in f[A \setminus B]$ και $x \in A \setminus B$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in A$ έχουμε $y = f(x) \in f[A]$. Αν ήταν $y \in f[B]$ τότε θα υπήρχε $x' \in B$ με $y = f(x')$. Επειδή η f είναι 1-1 θα είχαμε $x = x' \in A \cap B$ που είναι άτοπο γιατί $x \notin B$. Επομένως $y \notin f[B]$ και άρα $y \in f[A] \setminus f[B]$.

Δίνουμε τώρα τα παραδείγματα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Παίρνουμε $A = \{-2\}$ και $B = \{2\}$. Τότε $A \cap B = \emptyset$ και άρα $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset$. Από την άλλη $f[A] = f[B] = \{4\}$ και άρα $f[A] \cap f[B] = \{4\}$.

Για τον δεύτερο εγκλεισμό θεωρούμε πάλι την $f(x) = x^2$. Παίρνουμε $A = \{-2, 2\}$ και $B = \{2\}$. Τότε $A \setminus B = \{-2\}$ και $f[A \setminus B] = \{4\}$. Από την άλλη $f[A] \setminus f[B] = \{4\} \setminus \{4\} = \emptyset$.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x1.4 plus)**.** Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq Y$. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cup B] &= f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \cap B] &= f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \setminus B] &= f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Αν $C, D \subseteq X$ δείξτε ότι

$$f[C \cup D] = f[C] \cup f[D].$$

Λύση.

Για την πρώτη ισότητα έχουμε για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A \cup B] &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \ \vee \ f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \ \vee \ x \in f^{-1}[B] \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \ \cup f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το "$\vee$" είναι ο λογικός τελεστής της *διάζευξης* προτάσεων και παίζει τον ρόλο του διαζευτικού "ή". Όμοια προκύπτουν και οι επόμενες δύο ισότητες. Για την τελευταία ισότητα έχουμε για κάθε $y \in Y$,

$$\begin{aligned} y \in f[C \cup D] &\iff (\exists x)[x \in C \cup D \ \&\ y = f(x)] \\ &\iff (\exists x)[x \in C \ \&\ y = f(x)] \ \vee \ (\exists x)[x \in D \ \&\ y = f(x)] \\ &\iff y \in f[C] \ \vee y \in f[D] \\ &\iff y \in f[C] \cup f[D]. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Δίνεται ένα άπειρο σύνολο A, $a_0, \dots, a_n \in A$, και ένας επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > n$ με $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$.

Λύση.

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{a_0, \dots, a_n\} \cup \{\pi(0), \dots, \pi(n)\}$. Προφανώς το B είναι πεπερασμένο σύνολο. Επειδή $a_0, \dots, a_n \in A$ και η π παίρνει τιμές στο A έχουμε $B \subseteq A$. Επειδή το A είναι άπειρο υπάρχει $x \in A \setminus B$. Επιπλέον η π είναι επί, άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $x = \pi(m)$.

Αφού $\pi(m) \notin B$ θα έχουμε ειδικότερα ότι $\pi(m) \notin \{\pi(0), \dots, \pi(n)\}$ και άρα $m > n$. Πάλι από το $\pi(m) \notin B$ έχουμε ότι $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$.

Άσκηση 5. Για κάθε σύνολα A, B ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Λύση.

(i) Επειδή το σύνολο B είναι αριθμήσιμο έχουμε $B \leq_c \mathbb{N}$, επομένως $A \leq_c B \leq_c \mathbb{N}$. Προκύπτει ότι $A \leq_c \mathbb{N}$ και άρα το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν $A = \emptyset$ τότε το A είναι αριθμήσιμο, επομένως υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Επειδή η τ είναι συνάρτηση από το B στο A έχουμε $B \neq \emptyset$ και εφόσον το B είναι αριθμήσιμο υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow B$. Τότε η σύνθεση $\tau \circ \pi : \mathbb{N} \to A$ είναι επιμορφισμός και άρα το A είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 6. Για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός π μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

Σχόλιο: Είναι γνωστό ότι για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση της πιο πάνω ισοδυναμίας. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο θα αναφερθούμε αργότερα.

Λύση.
Θεωρούμε ένα $a_0 \in A$ και ορίζουμε $\pi : B \to A$ ως εξής:

$$\pi(y) = \begin{cases} \tau^{-1}(y), & \text{αν } y \in \tau[A] \\ a_0, & y \notin \tau[A]. \end{cases}$$

Αν $x \in A$ τότε $\pi(\tau(x)) = \tau^{-1}(\tau(x)) = x$. Παρατηρούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση π είναι αναγκαστικά επί γιατί το τυχαίο $x \in A$ είναι της μορφής $\pi(y)$ για $y = \tau(x) \in B$.

Άσκηση 7. Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του X,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Λύση.
Θεωρούμε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) : C \subseteq A \mapsto \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Δηλαδή $\pi(C) = f[C]$. Δείχνουμε ότι η π είναι 1-1 και επί.

Για το 1-1 υποθέτουμε ότι $\pi(C_1) = \pi(C_2)$, πρέπει να δείξουμε ότι $C_1 = C_2$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in C_1 &\iff f(x) \in f[C_1] \quad (\text{γιατί η } f \text{ είναι 1-1}) \\ &\iff f(x) \in \pi(C_1) = \pi(C_2) \\ &\iff f(x) \in f[C_2] \\ &\iff x \in C_2 \quad (\text{γιατί η } f \text{ είναι 1-1}). \end{aligned}$$

Επομένως $C_1 = C_2$ και η π είναι 1-1.

Για το επί, θεωρούμε $D \subseteq B$ και παίρνουμε $C = f^{-1}[D]$. Δείχνουμε ότι $\pi(C) = D$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in \pi(C) &\iff y \in f[C] \\ &\iff f^{-1}(y) \in C \quad (\text{ορίζεται η συνάρτηση } f^{-1} : B \to A) \\ &\iff f^{-1}(y) \in f^{-1}[D] \\ &\iff f(f^{-1}(y)) \in D \\ &\iff y \in D. \end{aligned}$$

Άρα $\pi(C) = D$ και η π είναι επί.

Για την ισότητα $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ παρατηρούμε ότι εφόσον τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα έχουμε από τον ορισμό ότι $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$. Οπότε με εφαρμογή του πιο πάνω έχουμε το ζητούμενο.