# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

**Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

# 5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1** (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39).

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα $A, B$ και $C$. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

**Λύση.**
(i) Έχουμε
$$(x, y, z) = (x, (y, z)) = (x', (y, z')) = (x', y', z').$$
Τότε $x = x'$ και $(y, z) = (y', z')$. Από το τελευταίο προκύπτει $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ δύο συνόλων $X_1$ και $X_2$ είναι σύνολο. Επομένως έχουμε τα σύνολα $B \times C$ και $A \times (B \times C) = A \times B \times C$.

**Σχόλιο.** Αν επιλέξουμε να ορίσουμε το $(x, y, z)$ ως $((x, y), z)$ τότε η άσκηση επιλύεται με τον ανάλογο τρόπο.

**Άσκηση 2.** Δίνεται μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ όπου το $I$ είναι μη κενό σύνολο. Δείξτε ότι ορίζονται σύνολα $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} A_i$, και $\prod_{i\in I} A_i$ που ικανοποιούν τα εξής:

$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I \ (x \in A_i)$

$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I \ (x \in A_i)$

$y \in \prod_{i\in I} A_i \iff$ το $y$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $I$ και $\forall i \in I \ (y(i) \in A_i)$.

Αναφερθείτε στα Αξιώματα που χρησιμοποιήσατε.

**Λύση.**
Αφού η $(A_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια συνόλων υπάρχει σύνολο $\mathcal{E}$ και συνάρτηση $f : I \to \mathcal{E}$ με $f(i) = A_i$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε
$$\begin{aligned}
\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \in \textstyle\bigcup \mathcal{E} \mid \exists i \in I \ (x \in f(i))\},\\
\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in \textstyle\bigcup \mathcal{E} \mid \forall i \in I \ (x \in f(i))\},\\
\textstyle\prod_{i\in I} A_i &= \{y \in (I \to \textstyle\bigcup \mathcal{E}) \mid \forall i \in I \ (y(i) \in f(i))\}.
\end{aligned}$$

Από το Αξίωμα της Ένωσης το $\bigcup \mathcal{E}$ είναι σύνολο. Όπως έχουμε δείξει (με χρήση του Αξιώματος του Δυναμοσυνόλου και του Αξιώματος Διαχωρισμού) ορίζεται το σύνολο $(I \to \bigcup \mathcal{E})$ όλων των συναρτήσεων από το $I$ στο $\bigcup \mathcal{E}$. Από το Αξίωμα Διαχωρισμού τα πιο πάνω είναι σύνολα.

Για να δούμε ότι ικανοποιούνται οι ζητούμενες ισοδυναμίες παρατηρούμε πως αν $x \in f(i)$ για κάποιο $i \in I$, επειδή $f(i) = A_i \in \mathcal{E}$ θα έχουμε $x \in \bigcup \mathcal{E}$. Άρα αν το $x$ (ή το $y$) ικανοποιεί μία από τις τρεις οριστικές συνθήκες της εκφώνησης τότε θα ανήκει και στο αντίστοιχο σύνολο. Το αντίστροφο, δηλαδή αν το $x$ (ή το $y$) ανήκει σε κάποιο από τα τρία πιο πάνω σύνολα, τότε θα ικανοποιεί και την αντίστοιχη οριστική συνθήκη της εκφώνησης.

**Άσκηση 3.** Δίνεται ένα μη κενό σύνολο $I$ και μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ με δείκτες στο $I$. Τότε υπάρχει σύνολο $E$ και συνάρτηση $g : I \to \mathcal{P}(E)$ με $A_i = g(i)$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα $A_i$ είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου.

**Λύση.**

Εφόσον η $(A_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια συνόλων υπάρχει σύνολο $\mathcal{E}$ και συνάρτηση $f : I \to \mathcal{E}$ με $A_i = f(i)$ για κάθε $i \in I$. Παίρνουμε $E = \bigcup_{i \in I} A_i$, έτσι που $A_i \subseteq E$ και άρα $A_i \in \mathcal{P}(E)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε $g = f : I \to \mathcal{P}(E) : g(i) = f(i) = A_i$.

**Ορισμός.** Η **ξένη ένωση** $A \uplus B$ των συνόλων $A, B$ ορίζεται ως εξής:

$$A \uplus B = (\{\emptyset\} \times A) \bigcup (\{\{\emptyset\}\} \times B).$$

Παρατηρήστε ότι $(\{\emptyset\} \times A) \bigcap (\{\{\emptyset\}\} \times B) = \emptyset$ ακριβώς επειδή $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Η ιδέα στον ορισμό της ξένης ένωσης είναι να δημιουργήσουμε δύο ξένα "αντίγραφα" των $A$, $B$ και μετά να πάρουμε την ένωσή τους.

Κάπως πιο γλαφυρά θεωρούμε ότι βάφουμε τα στοιχεία των $A, B$ με διαφορετικά χρώματα και μετά τα τοποθετούμε μαζί σε ένα σύνολο. Ας καλέσουμε το ένα χρώμα **κόκκινο** και το άλλο **μπλε**. Το βάψιμο επιτυγχάνεται μέσω των απεικονίσεων $a \mapsto (\textbf{κόκκινο}, a)$ και $b \mapsto (\textbf{μπλε}, b)$, έτσι που το $\{\textbf{κόκκινο}\} \times A$ είναι το $A$ με τα στοιχεία του βαμμένα κόκκινα και το $\{\textbf{μπλε}\} \times B$ είναι το $B$ με τα στοιχεία του βαμμένα μπλε. Για να διατυπωθεί αυτό στη γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων παίρνουμε για **κόκκινο** να είναι το $\emptyset$ και για **μπλε** να είναι το $\{\emptyset\}$ και παρατηρούμε ότι **κόκκινο** $\neq$ **μπλε**.

**Άσκηση 4** (Άσκηση 4.18 σελ. 45). Δείξτε ότι αν $A =_c A'$ και $B =_c B'$ τότε

(i) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$

(ii) $A \times B =_c A' \times B'$

(iii) $(A \to B) =_c (A' \to B')$.

**Σχόλιο.** Στα (i) και (ii) να ορίσετε μόνο τις ζητούμενες συναρτήσεις χωρίς να δείξετε ότι είναι ένα-προς-ένα και επί. Το (iii) το έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση. Εδώ εξηγήστε γιατί η αντιστοιχία
$H : (A \to B) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (A' \to B')$ που ορίσαμε είναι σύνολο.

**Λύση.**

Θεωρούμε $\tau : A \to A'$ και $\rho : B \to B'$ ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι

$$X \uplus Y = (\{\emptyset\} \times X) \bigcup (\{\{\emptyset\}\} \times Y).$$

(i) Ορίζουμε $g : (\{\emptyset\} \times A) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B) \longrightarrow (\{\emptyset\} \times A') \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B')$ ως εξής:

$$g(\emptyset, x) = (\emptyset, \tau(x)), \quad \text{όπου } x \in A \qquad \text{και} \qquad g(\{\emptyset\}, x) = (\{\emptyset\}, \rho(x)) \quad \text{όπου } x \in B.$$

Προκύπτει εύκολα ότι η $g$ είναι ένα-προς-ένα και επί.

(ii) Ορίζουμε $h : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ με $h(a, b) = (\tau(a), \rho(b))$. Τότε η $h$ είναι ένα-προς-ένα και επί.

(iii) Όπως έχουμε δει η ζητούμενη ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$H : (A \to B) \to (A' \to B') : H(f)(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[l, bend right, "\tau^{-1}"'] \arrow[d, dashed, "H(f)"] \\ B \arrow[r, "\rho"'] & B' \end{tikzcd}$$

Όλα οι προηγούμενες συναρτήσεις ορίζονται και αποδεικνύεται ότι είναι ένα-προς-ένα και επί με βάση τα αξιώματα. Για παράδειγμα η $H$ ορίζεται ως το σύνολο

$$\{(f,g) \in (A \to B) \times (A' \to B') \mid (\forall a' \in A')[g(a') = (\rho \circ f \circ \tau^{-1})(a')]\}.$$

**Άσκηση 5** (Άσκηση 4.28 σελ. 49). Δείξτε ότι για κάθε σύνολα $K, L, M$ με $L \cap M = \emptyset$ ισχύει

$$(L \cup M \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K).$$

Συμπεράνετε ότι για κάθε σύνολα $K, A, B$ ισχύει

$$(A \uplus B \to K) =_c (A \to K) \times (B \to K).$$

Με τον "εκθετικό" συμβολισμό $Y^X$ του συνόλου όλων των συναρτήσεων από το $X$ στο $Y$ το πιο πάνω λαμβάνει τη μορφή

$$K^{A \uplus B} =_c K^A \times K^B.$$

**Λύση.**

Ορίζουμε $H : (L \cup M \to K) \longrightarrow (L \to K) \times (M \to K)$ ως εξής: αν $f \in (L \cup M \to K)$ τότε $H(f) = (g_1, g_2)$ όπου

$$g_1 : L \to K : g_1(x) = f(x) \quad g_2 : M \to K : g_2(x) = f(x).$$

(Παρατηρήστε ότι η $f$ ορίζεται σε κάθε $x \in L$ και σε κάθε $x \in M$, επομένως οι $g_1, g_2$ είναι καλά ορισμένες.) Προφανώς $H(f) \in (L \to K) \times (M \to K)$.

Δείχνουμε ότι η $H$ είναι ένα-προς-ένα. Έστω $H(f) = (g_1, g_2)$ και $H(f') = (g'_1, g'_2)$ με $H(f) = H(f')$. Τότε $g_1 = g'_1$ και $g_2 = g'_2$. Θεωρούμε $x \in L \cup M$. Αν $x \in L$ τότε $f(x) = g_1(x) = g'_1(x) = f'(x)$. Όμοια αν $x \in M$ τότε $f(x) = g_2(x) = g'_2(x) = f'(x)$. Άρα $f(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in L \cup M$ και $f = f'$.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $L \cap M = \emptyset$. Θα το χρειαστούμε για να δείξουμε ότι η $H$ είναι επί. Έστω τυχαίες συναρτήσεις $h_1 : L \to K$ και $h_2 :\to K$. Ορίζουμε $f : L \cup M \to K$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{αν } x \in L, \\ h_2(x), & \text{αν } x \in M. \end{cases}$$

Επειδή $L \cap M = \emptyset$ ακριβώς μία από τις περιπτώσεις $x \in L$ και $x \in M$ συμβαίνει για κάθε $x \in L \cup M$. Επομένως η $f$ είναι καλά ορισμένη.

Τέλος δείχνουμε ότι $H(f) = (h_1, h_2)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_1, g_2$ με $H(f) = (g_1, g_2)$. Έστω $x \in L$, τότε $g_1(x) = f(x) = h_1(x)$, άρα $g_1 = h_1$. Όμοια δείχνουμε ότι $g_2 = h_2$.

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα κατά Cantor,

$$\begin{aligned}
(A \uplus B \to K) &= ((\{\emptyset\} \times A) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times B) \to K) && \text{(από τον ορισμό)} \\
&=_c (\{\emptyset\} \times A \to K) \times (\{\{\emptyset\}\} \times B \to K) && \text{(από το πιο πάνω αφού τα σύνολα} \\
& && \{\emptyset\} \times A \text{ και } \{\{\emptyset\}\} \times B \text{ είναι ξένα)} \\
&=_c (A \to K) \times (B \to K) && \text{(από την Άσκηση 4 αφού} \\
& && \{\emptyset\} \times A =_c A \text{ και } \{\{\emptyset\}\} \times B =_c B).
\end{aligned}$$