# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

**Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

# 5ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1** (Άσκηση 4.4 plus σελ. 39).

(i) Αν $(x, y, z) = (x', y', z')$ δείξτε ότι $x = x'$, $y = y'$ και $z = z'$.

(ii) Δίνονται σύνολα $A, B$ και $C$. Εξηγήστε γιατί το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ είναι σύνολο.

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε αυτά που ξέρετε για τα ζεύγη αντικειμένων και το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων.

**Άσκηση 2.** Δίνεται μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ όπου το $I$ είναι μη κενό σύνολο. Δείξτε ότι ορίζονται σύνολα $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} A_i$, και $\prod_{i\in I} A_i$ που ικανοποιούν τα εξής:

$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I\ (x \in A_i)$

$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I\ (x \in A_i)$

$y \in \prod_{i\in I} A_i \iff$ το $y$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $I$ και $\forall i \in I\ (y(i) \in A_i)$.

Αναφερθείτε στα Αξιώματα που χρησιμοποιήσατε.

**Άσκηση 3.** Δίνεται ένα μη κενό σύνολο $I$ και μια οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ με δείκτες στο $I$. Τότε υπάρχει σύνολο $E$ και συνάρτηση $g : I \to \mathcal{P}(E)$ με $A_i = g(i)$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα $A_i$ είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου.

**Ορισμός.** Η **ξένη ένωση** $A \uplus B$ των συνόλων $A, B$ ορίζεται ως εξής:

$$A \uplus B = (\{\emptyset\} \times A) \bigcup (\{\{\emptyset\}\} \times B).$$

Παρατηρήστε ότι $(\{\emptyset\} \times A) \bigcap (\{\{\emptyset\}\} \times B) = \emptyset$ ακριβώς επειδή $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Η ιδέα στον ορισμό της ξένης ένωσης είναι να δημιουργήσουμε δύο ξένα "αντίγραφα" των $A$, $B$ και μετά να πάρουμε την ένωσή τους.

Κάπως πιο γλαφυρά θεωρούμε ότι βάφουμε τα στοιχεία των $A, B$ με διαφορετικά χρώματα και μετά τα τοποθετούμε μαζί σε ένα σύνολο. Ας καλέσουμε το ένα χρώμα **κόκκινο** και το άλλο **μπλε**. Το βάψιμο επιτυγχάνεται μέσω των απεικονίσεων $a \mapsto (\textbf{κόκκινο}, a)$ και $b \mapsto (\textbf{μπλε}, b)$, έτσι που το $\{\textbf{κόκκινο}\} \times A$ είναι το $A$ με τα στοιχεία του βαμμένα κόκκινα και το $\{\textbf{μπλε}\} \times B$ είναι το $B$ με τα στοιχεία του βαμμένα μπλε. Για να διατυπωθεί αυτό στη γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων παίρνουμε για **κόκκινο** να είναι το $\emptyset$ και για **μπλε** να είναι το $\{\emptyset\}$ και παρατηρούμε ότι **κόκκινο** $\neq$ **μπλε**.

**Άσκηση 4** (Άσκηση 4.18 σελ. 45). Δείξτε ότι αν $A =_c A'$ και $B =_c B'$ τότε

(i) $A \uplus B =_c A' \uplus B'$

(ii) $A \times B =_c A' \times B'$

(iii) $(A \to B) =_c (A' \to B')$.

**Σχόλιο.** Στα (i) και (ii) να ορίσετε μόνο τις ζητούμενες συναρτήσεις χωρίς να δείξετε ότι είναι ένα-προς-ένα και επί. Το (iii) το έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση. Εδώ εξηγήστε γιατί η αντιστοιχία
$H : (A \to B) \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow (A' \to B')$ που ορίσαμε είναι σύνολο.

**Άσκηση 5** (Άσκηση 4.28 σελ. 49). Δείξτε ότι για κάθε σύνολα $K, L, M$ με $L \cap M = \emptyset$ ισχύει

$$(L \cup M \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K).$$

Συμπεράνετε ότι για κάθε σύνολα $K, A, B$ ισχύει

$$(A \uplus B \to K) =_c (A \to K) \times (B \to K).$$

Με τον "εκθετικό" συμβολισμό $Y^X$ του συνόλου όλων των συναρτήσεων από το $X$ στο $Y$ το πιο πάνω λαμβάνει τη μορφή

$$K^{A \uplus B} =_c K^A \times K^B.$$