Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

4ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Ασκήσεις 3.13 και 3.16).

(i) Δείξτε ότι $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(ii) Δείξτε ότι $\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$.

Άσκηση 2. Διατυπώστε αυστηρά τα αξιώματα του Δυναμοσυνόλου και της Ένωσης.

Άσκηση 3. Δίνονται αντικείμενα x, y, a, b. Αποδείξτε με βάση τα αξιώματα ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα x, y, a, b.

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x3.2). Δίνονται σύνολα A και B. Εξετάστε με βάση τα αξιώματα αν υπάρχουν σύνολα X_1, X_2, X_3 και X_4 με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} z \in X_1 &\iff (\exists x \in A)[z = \{\emptyset, x\}] \\ z \in X_2 &\iff \text{set}(z) \ \& \ z \neq \emptyset \\ z \in X_3 &\iff (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = \{x, y\}] \\ z \in X_4 &\iff (\exists X)[X \subseteq A \ \& \ z = \mathcal{P}(X)] \end{aligned}$$

όπου το z είναι αντικείμενο του κόσμου $\mathcal{W}$.

Υπόδειξη: Όπου δείχνετε ότι ορίζεται σύνολο εφαρμόστε το Αξίωμα Διαχωρισμού σε κατάλληλο σύνολο Y και κατάλληλη οριστική συνθήκη P.

Άσκηση 5 (Πρόβλημα x3.1 - Παραλλαγή). Δείξτε από τα αξιώματα ότι για κάθε σύνολο $\mathcal{E} \neq \emptyset$ υπάρχει ένα σύνολο T έτσι ώστε για κάθε x,

$$x \in T \iff (\forall A \in \mathcal{E})[x \in A].$$

Δηλαδή τα στοιχεία του T είναι τα αντικείμενα που είναι στοιχεία κάθε μέλους του $\mathcal{E}$. Εξηγείστε γιατί το T είναι μοναδικό.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τομής του $\mathcal{E}$ πρέπει να ανήκει και στην ένωση του $\mathcal{E}$ που γνωρίζουμε ότι είναι σύνολο από το Αξίωμα της Ένωσης.

Σχόλιο. Αυτό το μοναδικό σύνολο T ονομάζεται *τομή του* $\mathcal{E}$ και συμβολίζεται με $\bigcap \mathcal{E}$. Στην περίπτωση όπου $\mathcal{E} = \{A, B\}$ για κάποια σύνολα A, B συμβολίζουμε την τομή $\bigcap \mathcal{E}$ με $A \cap B$.

Σε απόμενη άσκηση δείχνουμε ότι είναι ουσιαστικό να θεωρήσουμε πως $\mathcal{E} \neq \emptyset$ για να ορίσουμε την τομή $\bigcap \mathcal{E}$.

Άσκηση 6. Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Δεν υπάρχει σύνολο V με την ιδιότητα

$$x \in V \iff \mathrm{set}(x)$$

για κάθε x. Δηλαδή δεν υπάρχει το σύνολο όλων των συνόλων.

(ii) Δεν υπάρχει σύνολο T με την ιδιότητα $x \in T$ για κάθε αντικείμενο x. Η ερμηνεία που αποδίδουμε σε αυτό είναι ότι "ο κόσμος $\mathcal{W}$ δεν είναι σύνολο".

(iii) Δεν υπάρχει σύνολο T με την ιδιότητα

$$x \in T \iff (\forall A \in \emptyset)[\ x \in A\ ]$$

για κάθε x.

Σχόλιο. Αυτό δείχνει ότι η τομή με δείκτες από το κενό σύνολο δεν είναι σύνολο, με άλλα λόγια δεν ορίζεται η τομή $\bigcap \mathcal{E}$ όταν $\mathcal{E} = \emptyset$, σε αντιδιαστολή με την ένωση όπου ορίζεται το σύνολο $\bigcup \emptyset$ και μάλιστα είναι ίσο με το $\emptyset$.