Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Λήμμα 2.25). Δείξτε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Συμπεράνετε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Υπόδειξη: Κάθε πραγματικός αριθμός καθορίζεται από το σύνολο όλων των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροί του.

Λύση.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ με

$$\pi(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Από την πυκνότητα των ρητών αριθμών έχουμε ότι για κάθε $x < y$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $x < q < y$. Ειδικότερα $q \in \pi(y)$ και $q \notin \pi(x)$. Επομένως $\pi(x) \neq \pi(y)$ για κάθε $x < y$ και άρα η συνάρτηση π είναι ένα-προς-ένα.

Αφού $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$ έχουμε από γνωστή άσκηση ότι

$$\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Άσκηση 2 (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24). Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι ένα-προς-ένα και επί, όπου Δ είναι το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών.

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Λύση.

Δείχνουμε αρχικά ότι η f είναι ένα-προς-ένα. Υποθέτουμε ότι $f(A) = f(B)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \in A &\iff \chi_A(n) = 1 \\ &\iff f(A)(n) = 1 \\ &\iff f(B)(n) = 1 \\ &\iff \chi_B(n) = 1 \\ &\iff n \in B. \end{aligned}$$

Άρα $A = B$ και η f είναι ένα-προς-ένα. Δείχνουμε τώρα ότι είναι και επί. Αν $\alpha \in \Delta$ ορίζουμε

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\} \subseteq \mathbb{N}$$

και δείχνουμε ότι $f(A) = \alpha$. Έχουμε

$$f(A)(n) = 1 \iff \chi_A(n) = 1 \iff n \in A \iff \alpha(n) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή οι ακολουθίες $f(A)$ και α παίρνουν τιμές μόνο 0 ή 1 προκύπτει από την πιο πάνω ισοδυναμία ότι $f(A) = \alpha$.

Προκύπτει ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$. Είναι γνωστό ότι $\Delta =_c C =$ το σύνολο Cantor, και επιπλέον είναι σαφές ότι $C \leq_c \mathbb{R}$ αφού $C \subseteq \mathbb{R}$. Οπότε έχουμε

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta =_c C \leq_c \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση. Με βάση το Θεώρημα Schröder-Bernstein, τις προηγούμενες δύο ασκήσεις και τη γνωστή πρόταση $\Delta =_c C$ (το σύνολο Cantor) προκύπτει ότι

$$\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta =_c C.$$

Άσκηση 3 (Προβλήματα x2.1 και x2.2). Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a < b$.

(i) Ορίστε μία ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (a,b)$.

(ii) Ορίστε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $g : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι $(a,b] =_c (a,b)$ με τους ακόλουθους δύο τρόπους: α) με τη χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein, β) ορίζοντας κατευθείαν μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $h : (a,b] \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (a,b)$.

Συμπεράνετε ότι $(a,b) =_c (a,b] =_c \mathbb{R}$.

Λύση.

(i) Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = a+(b-a)\cdot x$, όπου $x \in (0,1)$. Προφανώς η f είναι ένα-προς-ένα. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι $f(x) \in (a,b)$ για κάθε $x \in (0,1)$ και πως για κάθε $y \in (a,b)$ υπάρχει $x \in (0,1)$, συγκεκριμένα το $x = (y-a)/(b-a)$, με $f(x) = y$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ είναι ένα-προς-ένα και επί. Από το (i) η συνάρτηση

$$x \in (0,1) \mapsto -\frac{\pi}{2} + \pi \cdot x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι ένα-προς-ένα και επί. Επομένως μπορούμε να πάρουμε τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων $g : (0,1) \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot x\right)$$

που είναι φυσικά ένα-προς-ένα και επί.

(iii) **1ος τρόπος.** Με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein. Προφανώς $(a,b) \leq_c (a,b] \leq_c \mathbb{R}$. Από τα (i) και (ii) έχουμε $\mathbb{R} =_c (0,1) =_c (a,b)$, επομένως

$$(a,b) \leq_c (a,b] \leq_c \mathbb{R} =_c (a,b)$$

οπότε από το Θεώρημα Schröder-Bernstein έχουμε το ζητούμενο.

2ος τρόπος. Ορίζουμε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $h : (a,b] \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (a,b)$. Αναφέρουμε συνοπτικά την ιδέα. Το b πρέπει να απεικονιστεί σε κάποιο $b_1 \in (a,b)$. Τότε όμως το b_1 δεν μπορεί να απεικονιστεί στον εαυτό του γιατί αλλιώς η h δεν θα ήταν ένα-προς-ένα. Άρα θα πρέπει το b_1 να απεικονιστεί σε κάποιο $b_2 \neq b_1$. Μετά το b_2 πρέπει να απεικονιστεί σε κάποιο $b_3 \notin \{b_1, b_2\}$ και ούτω καθεξής. Τα $x \in (a,b]$ που δεν είναι της μορφής b_n απεικονίζονται στον εαυτό τους.

Με βάση το πιο πάνω θεωρούμε μια ένα-προς-ένα ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(a,b]$ με $b_0 = b$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $h : (a,b] \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = \begin{cases} b_{n+1}, & \text{αν } x = b_n \text{ για κάποιο (αναγκαστικά μοναδικό) } n, \\ x, & \text{αν } x \notin \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Δεδομένου ότι $b = b_0$ είναι άμεσο από τον ορισμό της h ότι $h(x) \in (a,b)$ για κάθε $x \in (a,b]$. Επιπλέον αν $y \in (a,b)$ και $y \notin \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ τότε $h(y) = y$, ενώ αν $y = b_m$ τότε $m > 0$ (αλλιώς $y = b_0 = b \notin (a,b)$ που είναι άτοπο) και άρα $y = b_m = h(b_{m-1})$. Επομένως η h είναι επί του (a,b).

Για να δούμε ότι η h είναι ένα-προς-ένα παρατηρούμε ότι η h απεικονίζει το $C = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ μέσα στο σύνολο C και το $(a,b] \setminus C$ μέσα στο $(a,b] \setminus C$. Επομένως αν έχουμε $h(x_1) = h(x_2)$ για $x_1, x_2 \in (a,b]$ τότε είτε $x_1, x_2 \in C$ είτε $x_1, x_2 \notin C$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $x_1 = b_n$, $x_2 = b_k$ και $b_{n+1} = b_{k+1}$. Άρα $n+1 = k+1$, οπότε $n = k$ και $x_1 = b_n = b_k = x_2$. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $x_1 = h(x_1) = h(x_2) = x_2$.

Άσκηση 4.

(i) Ορίστε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Λύση.

(i) Αν έχουμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών ορίζουμε την ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$c_n = \begin{cases} a_k, & \text{αν } n = 2k \\ \\ b_k, & \text{αν } n = 2k+1. \end{cases}$$

Η $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ αντιστοιχεί στο ζεύγος $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ την προηγούμενη ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η f είναι ένα-προς-ένα και επί.

(ii) Αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στο πλήθος n των παραγόντων. Για $n = 2$ έχουμε από το (i) ότι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$ επομένως $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι το γινόμενο n παραγόντων $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $A_1 =_c A_2$ και $B_1 =_c B_2$ τότε $A_1 \times B_1 =_c A_2 \times B_2$.

Θεωρούμε τώρα το γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που αποτελείται από $n+1$ παράγοντες. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &=_c \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\ &=_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{(μέσω της } (a, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto (a, x_0, x_1, x_2, \dots)) \\ &=_c \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5 (Άσκηση 2.23 plus). Αν $A_1 \leq_c A_2$ και αν $B_1 \leq_c B_2$ δείξτε ότι

$$(A_1 \to B_1) \leq_c (A_2 \to B_2)$$

Με χρήση του συμβολισμού $(A \to B) \equiv B^A$ το παραπάνω γράφεται ως εξής:

$$B_1^{A_1} \leq_c B_2^{A_2}.$$

Συμπεράνετε το ζητούμενο της Άσκησης 2.23 του βιβλίου:

Αν $A_1 =_c A_2$ και αν $B_1 =_c B_2$ τότε $(A_1 \to B_1) =_c (A_2 \to B_2)$ ή αλλιώς $B_1^{A_1} =_c B_2^{A_2}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ζητούμενο θεωρήστε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $\tau : A_1 \rightarrowtail A_2$ και (με εφαρμογή γνωστής άσκησης) μια συνάρτηση $\pi : A_2 \twoheadrightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$.

Λύση.

Σύμφωνα με την υπόδειξη θεωρούμε συναρτήσεις $\tau : A_1 \rightarrowtail A_2$ και $\pi : A_2 \twoheadrightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$. Θεωρούμε επίσης μια συνάρτηση $\rho : B_1 \rightarrowtail B_2$.

Θέλουμε να ορίσουμε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση H που να αντιστοιχεί μια τυχαία συναρτήση $f \in (A_1 \to B_1)$ σε μια συναρτήση $H(f) = g \in (A_2 \to B_2)$. Δοσμένης $f \in (A_1 \to B_1)$ ορίζουμε

$$H(f) : A_2 \to B_2 : H(f)(a_2) = (\rho \circ f \circ \pi)(a_2).$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[l, bend right, "\pi"'] \arrow[d, dashed, "H(f)"] \\ B_1 \arrow[r, "\rho"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

Δείχνουμε ότι η συνάρτηση $H : (A_1 \to B_1) \to (A_2 \to B_2) : f \mapsto H(f)$ είναι ένα-προς-ένα. Θεωρούμε $f, f' \in (A_1 \to B_1)$ με $H(f) = H(f')$ και δείχνουμε ότι $f = f'$.

Έστω $a_1 \in A_1$, πρέπει να δείξουμε ότι $f(a_1) = f'(a_1)$. Παίρνουμε το $a_2 = \tau(a_1) \in A_2$. Εφόσον οι συναρτήσεις $H(f)$ και $H(f')$ είναι ίσες, θα παίρνουν και την ίδια τιμή στο a_2. Επομένως

$$H(f)(a_2) = H(f')(a_2)$$

ισοδύναμα

$$(\rho \circ f \circ \pi)(a_2) = (\rho \circ f' \circ \pi)(a_2).$$

Παρατηρούμε ότι $\pi(a_2) = \pi(\tau(a_1)) = a_1$ από την ιδιότητα της π, επομένως η πιο πάνω ισότητα γίνεται

$$(\rho \circ f)(a_1) = (\rho \circ f')(a_1) \quad \text{δηλαδή} \quad \rho(f(a_1)) = \rho(f'(a_1)).$$

Εφόσον η ρ είναι ένα-προς-ένα προκύπτει $f(a_1) = f'(a_1)$ και έχουμε το ζητούμενο.

Το συμπέρασμα της Άσκησης 2.23 του βιβλίου προκύπτει από αυτό που μόλις αποδείξαμε και με τη χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein.

Μπορεί κανείς να λύσει την Άσκηση 2.23 και κατευθείαν. Η μέθοδος είναι ίδια με πιο πάνω και μάλιστα πιο απλή: αν έχουμε αντιστοιχίες $\tau : A_1 \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow A_2$ και $\rho : B_1 \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow B_2$ τότε μπορούμε να πάρουμε $\pi = \tau^{-1}$. Η συνάρτηση H όπως πιο πάνω είναι τότε ένα-προς-ένα και (μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ότι είναι και) επί.

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x2.7). Δείξτε ότι

$$(A \times B \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

Με τον άλλο συμβολισμό:

$$C^{A\times B} =_c (C^B)^A.$$

Λύση.

Θέλουμε να ορίσουμε μια αντιστοιχία π από το σύνολο $(A\times B \to C)$ στο σύνολο $(A \to (B \to C))$. Για κάθε $p \in (A \times B \to C)$ το $\pi(p)$ είναι μια συνάρτηση από το A στο σύνολο $(B \to C)$ έτσι ώστε για κάθε $a \in A$:

$$\pi(p)(a) : B \to C : \pi(p)(a)(b) = p(a, b).$$

Δείχνουμε ότι η συνάρτηση $p \mapsto \pi(p)$ είναι ένα-προς-ένα και επί.

Έστω $\pi(p) = \pi(p')$, πρέπει να δείξουμε ότι $p = p'$. Θεωρούμε $(a, b) \in A \times B$. Τότε $\pi(p)(a)(b) = \pi(p')(a)(b)$ δηλαδή $p(a, b) = p'(a, b)$. Επομένως $p = p'$ και η π είναι ένα-προς-ένα.

Για το "επί" θεωρούμε $h \in (A \to (B \to C))$ και ορίζουμε $p : A \times B \to C$ με $p(a, b) = h(a)(b)$, δηλαδή το $p(a, b)$ είναι η τιμή της συνάρτησης $h(a) : B \to C$ στο b. Δείχνουμε ότι $\pi(p) = h$. Έστω $a \in A$, πρέπει να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\pi(p)(a)$ και $h(a)$ από το B στο C είναι ίσες. Για κάθε $b \in B$ έχουμε

$$\pi(p)(a)(b) = p(a, b) = h(a)(b)$$

επομένως $\pi(p)(a) = h(a)$.

Άσκηση 7 (Προβλήματα x2.5 και x2.6). Δείξτε ότι

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Συμπεράνετε ότι όλα τα πιο πάνω είναι ισότητες κατά Cantor.

Λύση.

Εφόσον $\{0, 1\} \leq_c \mathbb{N} \leq_c \mathbb{R}$ έχουμε από γνωστή άσκηση ότι

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Επιπλέον δείξαμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \Delta$ και επομένως

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}. \tag{1}$$

Επειδή $\mathbb{R} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, έχουμε

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \left(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} =_c \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R},$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_c \mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}$ και από την (1) προκύπτει

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Τέλος, αφού $\mathbb{R} =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτουν οι ισότητες κατά Cantor.

Άσκηση 8. Βρείτε με ποιο από τα $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ είναι ισοπληθικό το κάθε ένα από τα ακόλουθα σύνολα:

$$\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1), \quad \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad [0,1]^{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

Λύση.

Προφανώς ισχύει $\mathbb{R} \leq_c \mathbb{R}^n \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ μέσω των συναρτήσεων

$$x \mapsto (x, 0, \ldots, 0) \quad \text{και} \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Εφόσον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$ προκύπτει από το Θεώρημα Schröder-Bernstein ότι $\mathbb{R}^n =_c \mathbb{R}$.

Για το επόμενο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ έχουμε προφανώς

$$\mathbb{R} \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{R} \leq_c \mathbb{R} \times \mathbb{R} =_c \mathbb{R},$$

άρα $\mathbb{N} \times \mathbb{R} =_c \mathbb{R}$.

Για το $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ χρησιμοποιούμε ότι $\mathbb{R} =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} =_c \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{R}} =_c \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}} =_c \{0,1\}^{\mathbb{R}} =_c \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Στην προτελευταία από τις πιο πάνω ισότητες κατά Cantor χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{R} =_c \mathbb{R}$. Η τελευταία προκύπτει με τον ίδιο τρόπο που δείξαμε ότι $\{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ - γενικά ισχύει $\{0,1\}^A =_c \mathcal{P}(A)$ για κάθε σύνολο A.

Για τα τελευταία δύο σύνολα υπενθυμίζουμε ότι $[0,1] =_c \mathbb{R}$ επομένως

$$[0,1]^{\mathbb{R}} =_c \mathbb{R}^{\mathbb{R}} =_c \mathbb{R}^{[0,1]}$$

και άρα

$$[0,1]^{\mathbb{R}} =_c \mathbb{R}^{[0,1]} =_c \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Άσκηση 9 (Πρόβλημα x2.9). Δείξτε ότι το σύνολο $C([0,1])$ όλων των **συνεχών** πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ καθορίζεται από τις τιμές της στους ρητούς αριθμούς του $[0,1]$.

Λύση.

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ τότε $f = g$. (Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε $x \in [0,1]$ είναι το όριο μια ακολουθίας ρητών $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $[0,1]$, επομένως λόγω συνέχειας έχουμε $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(q_n) = \lim_{n \to \infty} g(q_n) = g(x)$.)

Θεωρούμε μια απαρίθμηση των ρητών αριθμών στο $[0,1]$,

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : C([0,1]) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f \mapsto (f(r_n))_{n \in \mathbb{N}} .$$

Με άλλα λόγια η π απεικονίζει τη συνεχή συνάρτηση f στην ακολουθία των τιμών της στους ρητούς αριθμούς του $[0,1]$.

Δείχνουμε ότι η π είναι ένα-προς-ένα. Έστω $\pi(f) = \pi(g)$, τότε $f(r_n) = g(r_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή η $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι απαρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ έχουμε $f(q) = g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Σύμφωνα με τα πιο πάνω έχουμε $f = g$.

Επειδή η π είναι ένα-προς-ένα προκύπτει ότι $C([0,1]) \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$, η τελευταία ισότητα κατά Cantor είναι γνωστή από τα προηγούμενα.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathbb{R} \leq_c C([0,1])$: σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούμε τη σταθερή συνάρτηση $c_x : [0,1] \to \mathbb{R} : y \mapsto x$ η οποία είναι φυσικά συνεχής. Είναι σαφές ότι η συνάρτηση $(x \in \mathbb{R} \mapsto c_x)$ είναι ένα-προς-ένα.

Με χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι $\mathbb{R} <_c ([0,1] \to \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]} =$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Λύση.

Από ένα θεώρημα του Cantor έχουμε $\mathbb{R} <_c \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}^{[0,1]}$.

Αρχικά θεωρούμε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $\tau : \mathbb{R} \rightarrowtail (0,1)$ - γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοια και μάλιστα μπορεί κανείς να την ορίσει με έναν σχετικά απλό τύπο.

Σε κάθε υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ αντιστοιχούμε τη συνάρτηση $f_A : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \tau[A] \\ \\ 0, & \text{αν } x \notin \tau[A] \end{cases}$$

(Η ιδέα είναι η συνάρτηση f_A να διατηρεί όλη την πληροφορία για το σύνολο A. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την τ είναι επειδή θέλουμε η συνάρτηση f_A να ορίζεται στο $[0,1]$. Αν οι συναρτήσεις ορίζονταν σε όλο το $\mathbb{R}$ θα μπορούσαμε να πάρουμε απλά τη χαρακτηριστική συνάρτηση του A.)

Είναι σαφές ότι $f_A \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $(A \mapsto f_A)$ είναι ένα-προς-ένα. Αν έχουμε $f_A = f_B$ όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τότε έχουμε για κάθε $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z \in A &\iff \tau(z) \in \tau[A] \quad \text{(χρησιμοποιούμε ότι η } \tau \text{ είναι ένα-προς-ένα)} \\ &\iff f_A(\tau(z)) = 1 \\ &\iff f_B(\tau(z)) = 1 \\ &\iff \tau(z) \in \tau[B] \\ &\iff z \in B. \end{aligned}$$

Άρα $A = B$ και η απεικόνιση $(A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto f_A \in \mathbb{R}^{[0,1]})$ είναι ένα-προς-ένα. Επομένως $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}^{[0,1]}$.