Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

3ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Λήμμα 2.25). Δείξτε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Συμπεράνετε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Υπόδειξη: Κάθε πραγματικός αριθμός καθορίζεται από το σύνολο όλων των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροί του.

Άσκηση 2 (Σελ. 16 και Λήμμα 2.24). Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta : f(A) = \chi_A$$

είναι ένα-προς-ένα και επί, όπου Δ είναι το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών.

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Παρατήρηση. Με βάση το Θεώρημα Schröder-Bernstein, τις προηγούμενες δύο ασκήσεις και τη γνωστή πρόταση $\Delta =_c C$ (το σύνολο Cantor) προκύπτει ότι

$$\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \Delta =_c C.$$

Άσκηση 3 (Προβλήματα x2.1 και x2.2). Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a < b$.

(i) Ορίστε μία ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (a,b)$.

(ii) Ορίστε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $g : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι $(a,b] =_c (a,b)$ με τους ακόλουθους δύο τρόπους: α) με τη χρήση του Θεωρήματος Schröder-Bernstein, β) ορίζοντας κατευθείαν μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $h : (a,b] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (a,b)$.

Συμπεράνετε ότι $(a,b) =_c (a,b] =_c \mathbb{R}$.

Άσκηση 4.

(i) Ορίστε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(ii) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5 (Άσκηση 2.23 plus). Αν $A_1 \leq_c A_2$ και αν $B_1 \leq_c B_2$ δείξτε ότι

$$(A_1 \to B_1) \leq_c (A_2 \to B_2)$$

Με χρήση του συμβολισμού $(A \to B) \equiv B^A$ το παραπάνω γράφεται ως εξής:

$$B_1^{A_1} \leq_c B_2^{A_2}.$$

Συμπεράνετε το ζητούμενο της Άσκησης 2.23 του βιβλίου:

Αν $A_1 =_c A_2$ και αν $B_1 =_c B_2$ τότε $(A_1 \to B_1) =_c (A_2 \to B_2)$ ή αλλιώς $B_1^{A_1} =_c B_2^{A_2}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ζητούμενο θεωρήστε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $\tau : A_1 \rightarrowtail A_2$ και (με εφαρμογή γνωστής άσκησης) μια συνάρτηση $\pi : A_2 \twoheadrightarrow A_1$ με $\pi(\tau(a_1)) = a_1$ για κάθε $a_1 \in A_1$.

Άσκηση 6 (Πρόβλημα x2.7). Δείξτε ότι

$$(A \times B \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

Με τον άλλο συμβολισμό:

$$C^{A\times B} =_c (C^B)^A.$$

Άσκηση 7 (Προβλήματα x2.5 και x2.6). Δείξτε ότι

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq_c \mathbb{R}.$$

Συμπεράνετε ότι όλα τα πιο πάνω είναι ισότητες κατά Cantor.

Άσκηση 8. Βρείτε με ποιο από τα $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ είναι ισοπληθικό το κάθε ένα από τα ακόλουθα σύνολα:

$$\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1), \quad \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad [0,1]^{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

Άσκηση 9 (Πρόβλημα x2.9). Δείξτε ότι το σύνολο $C([0,1])$ όλων των **συνεχών** πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ καθορίζεται από τις τιμές της στους ρητούς αριθμούς του $[0,1]$.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι $\mathbb{R} <_c ([0,1] \to \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]} =$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.