# Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

**Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

# 2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

**Άσκηση 1.** Δίνεται ένα άπειρο σύνολο $A$, $a_0, \dots, a_n \in A$, και ένας επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > n$ με $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$.

**Λύση.**

Θεωρούμε το σύνολο $B = \{a_0, \dots, a_n\} \cup \{\pi(0), \dots, \pi(n)\}$. Προφανώς το $B$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Επειδή $a_0, \dots, a_n \in A$ και η $\pi$ παίρνει τιμές στο $A$ έχουμε $B \subseteq A$. Επειδή το $A$ είναι άπειρο υπάρχει $x \in A \setminus B$. Επιπλέον η $\pi$ είναι επί, άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $x = \pi(m)$.

Αφού $\pi(m) \notin B$ θα έχουμε ειδικότερα ότι $\pi(m) \notin \{\pi(0), \dots, \pi(n)\}$ και άρα $m > n$. Πάλι από το $\pi(m) \notin B$ έχουμε ότι $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$.

**Άσκηση 2.** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

**Λύση.**

(i) Επειδή το σύνολο $B$ είναι αριθμήσιμο έχουμε $B \leq_c \mathbb{N}$, επομένως $A \leq_c B \leq_c \mathbb{N}$. Προκύπτει ότι $A \leq_c \mathbb{N}$ και άρα το $A$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν $A = \emptyset$ τότε το $A$ είναι αριθμήσιμο, επομένως υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Επειδή η $\tau$ είναι συνάρτηση από το $B$ στο $A$ έχουμε $B \neq \emptyset$ και εφόσον το $B$ είναι αριθμήσιμο υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow B$. Τότε η σύνθεση $\tau \circ \pi : \mathbb{N} \to A$ είναι επιμορφισμός και άρα το $A$ είναι αριθμήσιμο.

**Άσκηση 3.** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το $B$ είναι αριθμήσιμο τότε και το $A$ είναι αριθμήσιμο.

**Λύση.**

(i) Επειδή το σύνολο $B$ είναι αριθμήσιμο έχουμε $B \leq_c \mathbb{N}$, επομένως $A \leq_c B \leq_c \mathbb{N}$. Προκύπτει ότι $A \leq_c \mathbb{N}$ και άρα το $A$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν $A = \emptyset$ τότε το $A$ είναι αριθμήσιμο, επομένως υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Επειδή η $\tau$ είναι συνάρτηση από το $B$ στο $A$ έχουμε $B \neq \emptyset$ και εφόσον το $B$ είναι αριθμήσιμο υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow B$. Τότε η σύνθεση $\tau \circ \pi : \mathbb{N} \to A$ είναι επιμορφισμός και άρα το $A$ είναι αριθμήσιμο.

**Άσκηση 4.** Για κάθε σύνολα $A$, $B$ με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός $\pi$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

**Σχόλιο:** Είναι γνωστό ότι για κάθε σύνολα $A$, $B$ με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση της πιο πάνω ισοδυναμίας. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο θα αναφερθούμε αργότερα.

**Λύση.**
Θεωρούμε ένα $a_0 \in A$ και ορίζουμε $\pi : B \to A$ ως εξής:

$$\pi(y) = \begin{cases} \tau^{-1}(y), & \text{αν } y \in \tau[A] \\ a_0, & y \notin \tau[A]. \end{cases}$$

Αν $x \in A$ τότε $\pi(\tau(x)) = \tau^{-1}(\tau(x)) = x$. Παρατηρούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση $\pi$ είναι αναγκαστικά επί γιατί το τυχαίο $x \in A$ είναι της μορφής $\pi(y)$ για $y = \tau(x) \in B$.

**Άσκηση 5.** Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του $X$,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

**Λύση.**
Θεωρούμε μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) : C \subseteq A \mapsto \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Δηλαδή $\pi(C) = f[C]$. Δείχνουμε ότι η $\pi$ είναι 1-1 και επί.

Για το 1-1 υποθέτουμε ότι $\pi(C_1) = \pi(C_2)$, πρέπει να δείξουμε ότι $C_1 = C_2$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in C_1 &\iff f(x) \in f[C_1] \quad \text{(γιατί η } f \text{ είναι 1-1)} \\ &\iff f(x) \in \pi(C_1) = \pi(C_2) \\ &\iff f(x) \in f[C_2] \\ &\iff x \in C_2 \quad \text{(γιατί η } f \text{ είναι 1-1).} \end{aligned}$$

Επομένως $C_1 = C_2$ και η $\pi$ είναι 1-1.

Για το επί, θεωρούμε $D \subseteq B$ και παίρνουμε $C = f^{-1}[D]$. Δείχνουμε ότι $\pi(C) = D$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in \pi(C) &\iff y \in f[C] \\ &\iff f^{-1}(y) \in C \quad \text{(ορίζεται η συνάρτηση } f^{-1} : B \to A) \\ &\iff f^{-1}(y) \in f^{-1}[D] \\ &\iff f(f^{-1}(y)) \in D \\ &\iff y \in D. \end{aligned}$$

Άρα $\pi(C) = D$ και η $\pi$ είναι επί.

Για την ισότητα $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ παρατηρούμε ότι εφόσον τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι άπειρα αριθμήσιμα έχουμε από τον ορισμό ότι $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$. Οπότε με εφαρμογή του πιο πάνω έχουμε το ζητούμενο.