Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δίνεται ένα άπειρο σύνολο A, $a_0, \dots, a_n \in A$, και ένας επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$. Δείξτε ότι υπάρχει $m > n$ με $\pi(m) \notin \{a_0, \dots, a_n\}$.

Άσκηση 2. Για κάθε σύνολα A, B ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 3. Για κάθε σύνολα A, B ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $A \leq_c B$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

(ii) Αν υπάρχει επιμορφισμός $\tau : B \twoheadrightarrow A$ και το B είναι αριθμήσιμο τότε και το A είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 4. Για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ αν ισχύει $A \leq_c B$ τότε υπάρχει συνάρτηση $\pi : B \twoheadrightarrow A$ επί. Μάλιστα αν $\tau : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός τότε ο επιμορφισμός π μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

Σχόλιο: Είναι γνωστό ότι για κάθε σύνολα A, B με $A \neq \emptyset$ ισχύει

$$A \leq_c B \iff \text{υπάρχει επιμορφισμός } \pi : B \twoheadrightarrow A.$$

Αυτή η άσκηση δείχνει την ευθεία κατεύθυνση της πιο πάνω ισοδυναμίας. Για την αντίστροφη κατεύθυνση χρειαζόμαστε το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο θα αναφερθούμε αργότερα.

Άσκηση 5. Αν $A =_c B$ δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ είναι το **δυναμοσύνολο** του X,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Συμπεράνετε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Z}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.