Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

1ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x1.2 - Οι νόμοι του De Morgan)**.**
Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύει

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Λύση.
Για κάθε στοιχείο x έχουμε:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in C \text{ και} (x \notin A \text{ και } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ και } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
Επιπλέον:

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \text{ και } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in C \text{ και } (x \notin A \textbf{ ή } x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \text{ ή } x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x1.3)**.** Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύουν

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$$
$$f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B].$$

Αν η f είναι ένα-προς-ένα δείξτε ότι οι πιο πάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες. Βρείτε επίσης παραδείγματα όπου οι ισότητες δεν ισχύουν αν η f δεν είναι ένα-προς-ένα.

Λύση.
Θεωρούμε $y \in f[A \cap B]$. Τότε υπάρχει $x \in A \cap B$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in A$ έχουμε $y = f(x) \in f[A]$ και αφού $x \in B$ έχουμε $y = f(x) \in f[B]$. Άρα $y \in f[A] \cap f[B]$.

Για τον άλλο εγκλεισμό θεωρούμε $y \in f[A] \setminus f[B]$ και $x \in A$ με $y = f(x)$. Αν ήταν $x \in B$ τότε θα είχαμε $y = f(x) \in f[B]$, άτοπο. Άρα $x \notin B$ και επομένως $x \in A \setminus B$. Καταλήγουμε ότι $y = f(x) \in f[A \setminus B]$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα. Δείχνουμε αρχικά ότι $f[A] \cap f[B] \subseteq f[A \cap B]$. Έστω $y \in f[A] \cap f[B]$, και $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ με $y = f(x_1) = f(x_2)$. Αφού η f είναι ένα-προς-ένα θα έχουμε $x_1 = x_2 \in A \cap B$. Άρα $y = f(x_1) \in f[A \cap B]$.

Τώρα δείχνουμε ότι $f[A \setminus B] \subseteq f[A] \setminus f[B]$. Έστω $y \in f[A \setminus B]$ και $x \in A \setminus B$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in A$ έχουμε $y = f(x) \in f[A]$. Αν ήταν $y \in f[B]$ τότε θα υπήρχε $x' \in B$ με $y = f(x')$. Επειδή η f είναι ένα-προς-ενα θα είχαμε $x = x' \in A \cap B$ που είναι άτοπο γιατί $x \notin B$. Επομένως $y \notin f[B]$ και άρα $y \in f[A] \setminus f[B]$.

Δίνουμε τώρα τα παραδείγματα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Παίρνουμε $A = \{-2\}$ και $B = \{2\}$. Τότε $A \cap B = \emptyset$ και άρα $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset$. Από την άλλη $f[A] = f[B] = \{4\}$ και άρα $f[A] \cap f[B] = \{4\}$.

Για τον δεύτερο εγκλεισμό θεωρούμε πάλι την $f(x) = x^2$. Παίρνουμε $A = \{-2, 2\}$ και $B = \{2\}$. Τότε $A \setminus B = \{-2\}$ και $f[A \setminus B] = \{4\}$. Από την άλλη $f[A] \setminus f[B] = \{4\} \setminus \{4\} = \emptyset$.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x1.4 plus)**.** Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq Y$. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cup B] &= f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \cap B] &= f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \\ f^{-1}[A \setminus B] &= f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Αν $C, D \subseteq X$ δείξτε ότι

$$f[C \cup D] = f[C] \cup f[D].$$

Λύση.

Για την πρώτη ισότητα έχουμε για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A \cup B] &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \ \vee \ f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \ \vee \ x \in f^{-1}[B] \\ &\iff x \in f^{-1}[A] \ \cup f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το "$\vee$" είναι ο λογικός τελεστής της *διάζευξης* προτάσεων και παίζει τον ρόλο του διαζευτικού "ή". Όμοια προκύπτουν και οι επόμενες δύο ισότητες. Για την τελευταία ισότητα έχουμε για κάθε $y \in Y$,

$$\begin{aligned} y \in f[C \cup D] &\iff (\exists x)[x \in C \cup D \ \& \ y = f(x)] \\ &\iff (\exists x)[x \in C \ \& \ y = f(x)] \ \vee \ (\exists x)[x \in D \ \& \ y = f(x)] \\ &\iff y \in f[C] \ \vee y \in f[D] \\ &\iff y \in f[C] \cup f[D]. \end{aligned}$$

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x1.7)**.** Δοσμένων συναρτήσεων $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$, ορίζουμε τη *σύνθεση*

$$h = g \circ f : X \to Z : x \mapsto g(f(x)).$$

Δείξτε ότι η σύνθεση ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι ένα-προς-ένα συνάρτηση και ότι η σύνθεση επί συναρτήσεων είναι επί συνάρτηση. Συμπεράνετε ότι η σύνθεση αντιστοιχιών (δηλαδή ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεων) είναι αντιστοιχία.

Λύση.

Θεωρούμε τη σύνθεση $h : X \to Z : h(x) = g(f(x))$, όπου $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ένα-προς-ένα και ότι $h(x_1) = h(x_2)$, όπου $x_1, x_2 \in X$. Τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ και αφού η g είναι ένα-προς-ένα έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$. Όμοια, αφού η f είναι ένα-προς-ένα προκύπτει ότι $x_1 = x_2$. Επομένως η h είναι ένα-προς-ένα.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι f και g είναι επί και δείχνουμε ότι ισχύει το ίδιο και για την h. Έστω $z \in Z$, Αφού η g είναι επί υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $g(y) = z$. Όμοια, αφού η f είναι επί υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επομένως $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, άρα η h είναι επί.