

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις
Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



1ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Πρόβλημα x1.2 - Οι νόμοι του De Morgan).

Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα A, B, C ισχύει

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Άσκηση 2 (Πρόβλημα x1.3). Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ και κάθε $A, B \subseteq X$ ισχύουν

$$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$$

$$f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B].$$

Αν η f είναι ένα-προς-ένα δείξτε ότι οι πιο πάνω εγκλεισμοί είναι ισότητες. Βρείτε επίσης παραδείγματα όπου οι ισότητες δεν ισχύουν αν η f δεν είναι ένα-προς-ένα.

Άσκηση 3 (Πρόβλημα x1.4 plus). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ και $A, B \subseteq Y$. Δείξτε ότι

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

$$f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B].$$

Αν $C, D \subseteq X$ δείξτε ότι

$$f[C \cup D] = f[C] \cup f[D].$$

Άσκηση 4 (Πρόβλημα x1.7). Δοσμένων συναρτήσεων $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$, ορίζουμε τη σύνθεση

$$h = g \circ f : X \rightarrow Z : x \mapsto g(f(x)).$$

Δείξτε ότι η σύνθεση ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι ένα-προς-ένα συνάρτηση και ότι η σύνθεση επί συναρτήσεων είναι επί συνάρτηση. Συμπεράνετε ότι η σύνθεση αντιστοιχιών (δηλαδή ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεων) είναι αντιστοιχία.