

Ολοκληρώματα

(Παρουσίαση εννοιών και βασικών τεχνικών ολοκλήρωσης)

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Κίνητρο. Εύρεση εμβαδών και όγκων (Εύδοξος - Αρχιμήδης).

Μοντέρνα διατύπωση. Εύρεση εμβαδού ανάμεσα στη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και του άξονα x' . Αυτό γίνεται μέσα από **προσεγγίσεις** από **εμβαδά ορθογωνίων**.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται και σε μη συνεχείς συναρτήσεις.

Αυστηρός ορισμός

Θεωρούμε ότι έχουμε μια **φραγμένη** συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $a < b$. Θεωρούμε σημεία $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ στο $[a, b]$ με $t_0 = a$ και $t_n = b$. Το σύνολο $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ καλείται **διαμέριση** του $[a, b]$.

Σε κάθε διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ θέτουμε

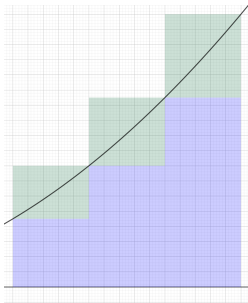
$$m_i = \sup\{ f(x) \mid x \in [t_i, t_{i+1}] \}, \quad M_i = \sup\{ f(x) \mid x \in [t_i, t_{i+1}] \}.$$

Έπειτα ορίζουμε

$$L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (t_{i+1} - t_i), \quad U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Το $L(f, P)$ αποκαλείται **κάτω άθροισμα** της f ως προς P και το $U(f, P)$ **άνω άθροισμα** της f ως προς P .

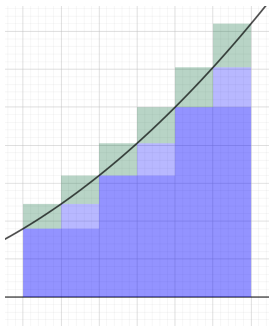
Παράδειγμα με $n = 3$ και συνεχή $f \geq 0$:



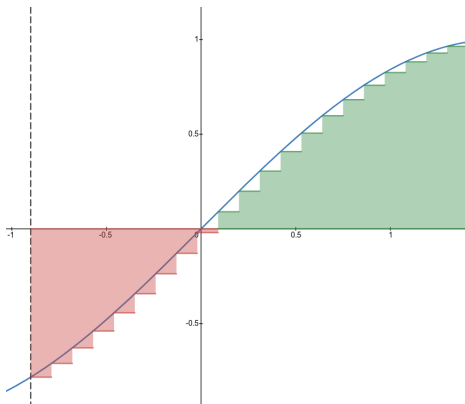
Έτσι επιτυγχάνουμε μια προσέγγιση του εμβαδού από κάτω (μπλε ορθογώνια) και από πάνω (μπλε και πράσινα ορθογώνια). Η **λεπτότητα** της διαμέρισης P είναι ο αριθμός

$$|P| = \max\{ t_{i+1} - t_i \mid i = 0, \dots, n-1 \}.$$

Όσο πιο μικρή είναι η λεπτότητα μιας διαμέρισης τόσο καλύτερη προσέγγιση έχουμε. Παράδειγμα:



Όπου η f είναι αρνητική μετράμε το εμβαδόν των ορθογωνίων με αρνητικό πρόσημο γιατί εκεί θα έχουμε $m_i < 0$.



Ισχύει $L(f, P) \leq U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P . Μάλιστα αν έχουμε δύο διαμερίσεις P, Q του $[a, b]$ με $P \subseteq Q$ τότε

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$

Η f ονομάζεται *Riemann ολοκληρώσιμη* αν

$$\sup\{ L(f, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a, b] \} = \inf\{ U(f, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a, b] \}.$$

Ισοδύναμη διατύπωση: Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν για κάθε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $|P_n| \rightarrow 0$ ισχύει $U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0$.

Το *ολοκλήρωμα Riemann* $\int_a^b f(x) dx$ της f είναι το πιο πάνω supremum (που είναι ίσο με το πιο πάνω infimum).

Θεώρημα. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση. Το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνάρτησης $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι επίσης γνωστό ως **ορισμένο ολοκλήρωμα** της f .

Συμβολισμοί. Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα σύνολο που περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $\int_a^b f(x) dx$ εννοούμε το ολοκλήρωμα του **περιορισμού της f** στο $[a, b]$.

Π.χ. αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορούμε πάλι να πάρουμε το $\int_0^1 f(x) dx$.

Θέτουμε

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

και

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

όταν $a < b$.

Ιδιότητες Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\min(f | [a, b]) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max(f | [a, b]) \cdot (b - a)$$

$$f \leq g \text{ στο } [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

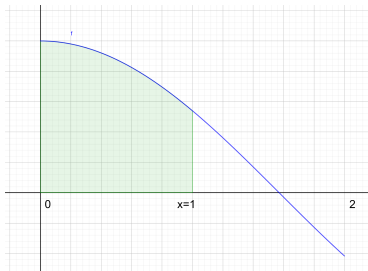
Θεωρούμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(x) dx$.

Παράδειγμα: δίνεται η πιο κάτω $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η τιμή $F(1)$ είναι το εμβαδόν της πράσινης περιοχής



Θεώρημα: (Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού - Fundamental Theorem of Calculus)

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και την $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε η F είναι συνεχής, διαφορίσιμη και

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Πόρισμα. Δίνονται δύο συναρτήσεις $F, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ με την f συνεχή και την F παραγωγίσιμη. Αν $F' = f$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Με άλλα λόγια αν μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση F με $F' = f$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)dx$.

Παρατηρήσεις. 1) Η διαφορά $F(b) - F(a)$ **συμβολίζεται** συνήθως με $F(x)|_a^b$ ή με $[F(x)]_a^b$.

2) Ο τύπος $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ισχύει και για $b \leq a$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τον κανονικό τύπο. Π.χ. για $b = 1$ και $a = 2$ έχουμε

$$\int_2^1 f(x)dx = - \int_1^2 f(x)dx = -(F(2) - F(1)) = F(1) - F(2).$$

Απόδειξη του Πορίσματος. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]. \quad \text{Τότε}$$

$$F_0'(x) = f(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Άρα $F_0' = F'$ ή αλλιώς $(F - F_0)' = 0$. Επομένως $F - F_0 = c \in \mathbb{R}$
και

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= F_0(b) = F_0(b) - F_0(a) \\ &= F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 dx$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{x^3}{3}$ για $x \in [0, 1]$ και

παρατηρούμε ότι $F'(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Άρα

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Μια συνάρτηση $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **παράγουσα** (anti-derivative) της $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αν $F' = f$. Π.χ. η $F(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$ είναι παράγουσα της $f(x) = 3x^2$.

Η παράγουσα εφόσον υπάρχει δεν είναι μοναδική, για την ακρίβεια **δύο** παράγουσες της **ίδιας** συνάρτησης **διαφέρουν** κατά μία **σταθερά**.

Με τον όρο **αόριστο ολοκλήρωμα** μιας συνάρτησης f εννοούμε μια **οποιαδήποτε παράγουσα** της f . Συμβολίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f με $\int f(x) dx$.

Αιτιολόγηση συμβολισμού. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$.

(Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν το αόριστο ολοκλήρωμα ως το **σύνολο** όλων των παραγουσών.)

Αν $F' = f$ γράφουμε

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αιτιολόγηση. Τα $\int f(x) dx$ και F είναι παράγουσες της συνάρτησης f επομένως διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Η σταθερά c είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός και ονομάζεται **σταθερά ολοκλήρωσης**.

Γενικά η σταθερά c παραμένει ως έχει χωρίς να την προσδιορίζουμε. Από την άλλη κάποια προβλήματα παρέχουν δεδομένα που μας επιτρέπουν τον προσδιορισμό της σταθεράς.

Στοιχειώδη αόριστα ολοκληρώματα

$$\int 0 dx = c$$

$$\int 1 dx = x + c$$

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ όπου } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad \text{ή} \quad \ln(-x) + c = \ln|x| + c$$

(ανάλογα με το αν το x είναι θετικό ή αρνητικό)

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

Ιδιότητες αορίστου ολοκληρώματος

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int f(x) dx$$

Παραδείγματα.

- 1) $\int 3\sqrt{x} + 5x + 1 dx = 3 \cdot \int x^{1/2} dx + 5 \cdot \int x dx + \int 1 dx$
 $= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + \frac{5}{2} \cdot x^2 + x + c = 2x^{3/2} + \frac{5}{2} \cdot x^2 + x + c$
- 2) $\int x^{-4} + 3 \cos x dx = \int x^{-4} dx + 3 \cdot \int \cos x dx = -\frac{x^{-3}}{3} + 3 \sin x + c.$

Οι ίδιες ιδιότητες χρησιμοποιούνται και για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}\int_0^1 5x^2 - 2 \cos x dx &= 5 \cdot \int_0^1 x^2 dx - 2 \cdot \int_0^1 \cos x dx \\ &= \frac{5}{3} \cdot x^3 - 2 \sin x \Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{3} \cdot 1^3 - 2 \sin 1 - (0 - \sin 0) = \frac{5}{3} - 2 \sin 1.\end{aligned}$$

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

(για την ακρίβεια: Τεχνικές εύρεσης παράγουσας)

A) Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Παράδειγμα. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int 2x \cos x^2 dx.$$

Παρατηρούμε ότι $(x^2)' = 2x$ και από τον κανόνα της αλυσίδας $(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$. Με άλλα λόγια

$$I = \sin x^2 + c.$$

Για να καταλήξουμε στη συνάρτηση \sin ολοκληρώσαμε τη συνάρτηση \cos .

Γενικότερα αν $F' = f$ ισχύει ο εξής κανόνας:

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση $u = g(x)$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du \quad \text{όπου } u = g(x) \\ = F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

Στην πράξη ο κανόνας εφαρμόζεται ως εξής:

- 1 "Αναγνωρίζουμε" τη $g(x)$ και αντικαθιστούμε $u = g(x)$.
- 2 **Δεν ξεχνάμε** να αντικαταστήσουμε το dx .

Μνημονικός κανόνας:

$$\text{“ } \frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x)dx \iff dx = \frac{du}{g'(x)} \text{ ”}$$

- 3 Προκύπτει ένα πιο απλό ολοκλήρωμα με μεταβλητή u . Δεν ξεχνάμε στο τέλος να αντικαταστήσουμε πίσω $u = g(x)$.

Εκτός από το αόριστο η τεχνική εφαρμόζεται και στο συνηθισμένο (ορισμένο) ολοκλήρωμα. Όμως πρέπει να **αντικαταστήσουμε** και τα **άκρα ολοκλήρωσης**.

Παράδειγμα: $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$. Αντικαθιστούμε $u = \sin x$ και έχουμε $du = \cos x \, dx$. Άκρα ολοκλήρωσης: όταν $x = 0$ έχουμε $u = 0$ και όταν $x = \pi/2$ έχουμε $u = 1$. Άρα

$$I = \int_0^1 u^3 \, du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} .$$

Αυστηρή διατύπωση. Αν το I είναι κλειστό διάστημα, η $g : [a, b] \rightarrow I$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du .$$

Η μέθοδος της αντικατάστασης μπορεί να εφαρμοστεί και αντίστροφα, δηλαδή να αντικαταστήσουμε $x = \varphi(u)$. Πρέπει όμως να ορίζεται η φ^{-1} τουλάχιστον σε κάποιο διάστημα (και το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να ληφθεί μόνο πάνω σε ένα τέτοιο διάστημα).

Παράδειγμα. $I = \int \sqrt{1-x^2} dx$, όπου $x \in [-1, 1]$.

Αντικαθιστούμε $x = \sin u$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, και έχουμε $dx = \cos u du$. Οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u du = \int \sqrt{\cos^2 u} \cdot \cos u du \\ &= \int \cos u \cdot \cos u du = \int \cos^2 u du. \end{aligned}$$

B) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Θεωρούμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g . Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παράγουσα της $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Με άλλα λόγια η $f \cdot g$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f' \cdot g + f \cdot g'$, δηλαδή

$$\int \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \right) dx = f(x) \cdot g(x)$$
$$\int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x)$$

οπότε καταλήγουμε:

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Η συγκεκριμένη τεχνική εφαρμόζεται κυρίως όταν η f είναι πολυώνυμο και η g' είναι η e^x ή γενικότερα $e^{\alpha x}$, ή $\sin(\alpha x)$ ή $\cos(\alpha x)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Σε αυτές τις περιπτώσεις η g προκύπτει εύκολα και δεν είναι πολύ "διαφορετική" από την g' .

Τότε το ολοκλήρωμα $\int f'(x) \cdot g(x) dx$ είναι απλούστερο από το $\int f(x) \cdot g'(x) dx$ γιατί οι συναρτήσεις g και g' είναι περίπου οι ίδιες και το πολυώνυμο f' είναι μειωμένο κατά ένα βαθμό από το f .

Παραδείγματα. 1) $I_1 = \int x e^x dx$. Τότε

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x - \int x' \cdot e^x dx \quad \text{παράγωγος(κόκκινου)} = \text{μπλε} \\ &= x \cdot e^x - \int e^x dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + c. \end{aligned}$$

$$2) I_2 = \int x^2 \cdot e^x dx. \text{ Τότε}$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int (2x) \cdot e^x dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.$$

$$3) I_3 = \int x \cdot \sin(3x) dx. \text{ Τότε}$$

$$\int x \cdot \sin(3x) dx = x \cdot \frac{-\cos(3x)}{3} - \int x' \cdot \frac{-\cos(3x)}{3} dx$$

$$= -x \cdot \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx$$

$$= -x \cdot \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(3x)}{3} + c$$

$$= -x \cdot \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + c.$$

Η τεχνική εφαρμόζεται και στο συνηθισμένο (ορισμένο) ολοκλήρωμα ως εξής:

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες με άκρα

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{2x} dx &= x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx \\ &= \left(1 \cdot \frac{e^2}{2} - 0 \right) - \frac{e^{2x}}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{e^0}{4} \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} . \end{aligned}$$