Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση). Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx, \qquad I_2 = \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx,$$
$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx, \qquad I_4 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$
$$I_5 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx, \quad (x > \sqrt{2}).$$

όπου πιο πάνω $a > 0$. Όλες οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις θεωρούνται ότι ορίζονται σε κατάλληλα διαστήματα.

Υπόδειξη. Το I_5, μετά από κατάλληλη αντικατάσταση, ανάγεται στο I_4 με $a = 1$.

Λύση - υποδείξεις.

Στο I_1 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$, έτσι που $du = 2xdx$ και άρα

$$I_1 = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2+1)} + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Στο I_2 αναλύουμε το κλάσμα $1/(x^2 - a^2)$ και μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

Άρα

$$I_2 = \frac{1}{2a}\cdot\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right) = \frac{1}{2a}\cdot(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + c = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Στο I_3 έχουμε

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{((x/a)^2+1)\cdot a^2}\,dx.$$

Οπότε με την αντικατάσταση $u = x/a$ παίρνουμε $du = dx/a$ και

$$I_3 = \int \frac{1}{(u^2+1)\cdot a}\,du = \frac{1}{a}\cdot\arctan(u) + c = \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Στο I_4 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = x/a$ καθώς και τον τύπο $\arcsin'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$:

$$I_4 = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}\cdot|a|}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(u) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ –υπενθυμίζουμε ότι $a > 0$ άρα $dx/|a| = dx/a = du$.

Τέλος έχουμε

$$I_5 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2\cdot\left(1-(\sqrt{2}/x)^2\right)}}\ dx = \int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{1-(\sqrt{2}/x)^2}}\ dx,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται στα $x > \sqrt{2}$ και συνεπώς $\sqrt{x^2} = x$. Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{2}/x$, έτσι που $du = (-\sqrt{2}/x^2)dx$. Άρα

$$\begin{aligned} I_5 = & \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ du = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du \\ = & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arcsin(u) + c = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + c, \end{aligned}$$

όπου $c\in\mathbb{R}$.

Σχόλιο. Επίσης σωστό είναι ότι

$$I_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\int -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arccos(u) + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + c,$$

γιατί $\arccos'(u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Φαίνεται ότι οι δύο απαντήσεις για το I_5 διαφέρουν αρκετά γιατί η μία εκφράζεται με τη βοήθεια του arcsin και η άλλη με του arccos. Αυτό δεν πρέπει να μας προβληματίζει γιατί ισχύει η ταυτότητα

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2, \quad x\in[-1,1].$$

Από αυτό προκύπτει ότι οι δύο διαφορετικές απαντήσεις που έχουμε για το I_5 διαφέρουν κατά μία σταθερά, κάτι που είναι εντάξει όταν έχουμε αόριστο ολοκλήρωμα.

Άσκηση 2. Με εφαρμογή της αντικατάστασης $u = \pi - x$ δείξτε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi f(\sin x)\ dx.$$

Χρησιμοποιήστε το πιο πάνω για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx.$$

Λύση - υποδείξεις.

Θέτουμε $I = \displaystyle\int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\ dx$ και εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \pi - x$, έτσι που $du = -dx$. Προφανώς $x = 0 \Rightarrow u = \pi$ και $x = \pi \Rightarrow u = 0$.

Με χρήση της ταυτότητας $\sin(\pi - u) = \sin u$ έχουμε

$$\begin{aligned} I = & \int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\ dx = \int_\pi^0 (\pi-u)\cdot f(\sin(\pi-u))\cdot(-1)\ du \\ = & \int_0^\pi (\pi-u) f(\sin u)\ du = \pi\cdot\int_0^\pi f(\sin u)\ du - \int_0^\pi u\cdot f(\sin u)\ du \\ = & \ \pi\cdot\int_0^\pi f(\sin x)\ dx - \int_0^\pi x\cdot f(\sin x)\ dx \\ = & \ \pi\cdot\int_0^\pi f(\sin x)\ dx - I, \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα απλά αντικαταστήσαμε το σύμβολο u με το σύμβολο x. Καταλήγουμε λοιπόν στην ισότητα

$$I = \pi\cdot\int_0^\pi f(\sin x)\ dx - I,$$

ισοδύναμα

$$2I = \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin x)\ dx, \quad \text{άρα} \quad I = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(\sin x)\ dx.$$

Για το ολοκλήρωμα J εφαρμόζουμε τον πιο πάνω τύπο για κατάλληλη επιλογή συνεχούς συνάρτησης $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} = x \cdot \frac{\sin x}{2-\sin^2 x} = x \cdot f(\sin x)$$

όπου $f(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$, $t \in [0,1]$. Επομένως από τον τύπο για το I έχουμε

$$J = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} = \int_0^\pi x \cdot f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε αντικατάσταση $t = \cos x$: έχουμε $dt = -\sin x\ dx$ και $x = 0 \Rightarrow t = 1$ καθώς και $x = \pi \Rightarrow t = -1$. Επομένως

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^{-1} \frac{-1}{1+t^2}\ dt = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \arctan t \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \cdot (\pi/4 - (-\pi/4)) \\ &= \frac{\pi^2}{4}\ . \end{aligned}$$

Άσκηση 3 (Ολοκληρώματα και αναδρομικός τύπος). Θεωρούμε $x > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I_k = \int_0^x \sin^k t\ dt,$$

όπου $\sin^k t$ σημαίνει $(\sin t)^k$ (ύψωση σε δύναμη). Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 2$ ισχύει ο αναδρομικός τύπος

$$I_k = -\frac{1}{k} \cdot \cos x \cdot \sin^{k-1} x + \frac{k-1}{k} \cdot I_{k-2}\ .$$

Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες,

$$\begin{aligned} I_k = \int_0^x \sin^k t\ dt = & \int_0^x \sin^{k-1} t \cdot \sin t\ dt \\ = &\ \sin^{k-1} t \cdot (-\cos t)\Big|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (\sin^{k-1} t)' \cdot (-\cos t)\ dt \\ = &\ -(\sin^{k-1} x \cdot \cos x - \sin^{k-1} 0 \cdot \cos 0) + \int_0^x (k-1) \sin^{k-2} t \cdot (\sin t)' \cdot \cos t\ dt \\ = &\ -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot \int_0^x \sin^{k-2} t \cdot \cos^2 t\ dt \\ = &\ -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot \int_0^x \sin^{k-2} t \cdot (1-\sin^2 t)\ dt \\ = &\ -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot \left(\int_0^x \sin^{k-2} t\ dt - \int_0^x \sin^{k-2} t \cdot \sin^2 t\ dt \right) \\ = &\ -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot I_{k-2} - (k-1) \cdot I_k. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση

$$I_k = -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot I_{k-2} - (k-1) \cdot I_k$$

απ' όπου λύνοντας ως προς I_k λαμβάνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x-3}\ dx \qquad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)}\ dx.$$

Λύση - υποδείξεις.
Το πολυώνυμο x^2+2x-3 έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x=1$ και $x=-3$, επομένως $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$. Αναλύουμε το κλάσμα $1/(x^2+2x-3)$ σε πιο απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}\ .$$

Έχουμε $A(x+3)+B(x-1) = Ax+3A+Bx-B = (A+B)x+3A-B$. Προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 3A-B &= 1. \end{aligned}$$

Τότε $B=-A$ και

$$3A-(-A)=1 \iff 4A=1 \iff A=\frac{1}{4}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x-1}\ dx - \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x+3}\ dx = \frac{1}{4}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\ln|x+3| + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ο παρονομαστής είναι παραγοντοποιημένος. Απαλείφουμε τον x από τον αριθμητή με τον εξής απλό τρόπο,

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} - \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x+1)(x-2)}\ .$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα,

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\ .$$

Άρα

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

και συνεπώς

$$J = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{x-2}\ dx + \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{x+1}\ dx = \frac{2}{3}\cdot\ln|x-2| + \frac{1}{3}\cdot\ln|x+1| + c.$$

Άσκηση 5 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int\frac{1}{x^2+4}\ dx \qquad I_2 = \int\frac{1}{3x^2+1} \qquad I_3 = \int\frac{1}{x^2-4x+7}\ dx.$$

Λύση - υποδείξεις.
Έχουμε

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x/2)^2+1}\ .$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u=x/2$ και έχουμε $dx=2du$. Οπότε

$$I_1 = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\cdot 2\ du = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\ du = \arctan(u)+c = \frac{1}{2}\cdot\arctan(x/2)+c.$$

Σχόλιο. Στο πιο πάνω ολοκλήρωμα (όπως και σε αρκετά επόμενα) θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον τύπο

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

όπου $a \neq 0$.

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$\frac{1}{3x^2+1} = \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1}\ .$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{3}x$ και έχουμε $dx = 1/\sqrt{3}du$. Οπότε

$$I_2 = \int \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1}\ dx = \int \frac{1}{u^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\ du = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(\sqrt{3}x) + c.$$

Τέλος στο τρίτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε αρχικά ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-4x+7 είναι αρνητική, επομένως μπορούμε να το φέρουμε στη μορφή $(ax-b)^2+c^2$ ή πιο απλά $(x-b)^2+c^2$ γιατί ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι η μονάδα. Έχουμε

$$x^2-4x+7 = x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2+3 = (x-2)^2+3.$$

Επομένως

$$I_3 = \int \frac{1}{(x-2)^2+3}\ dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\ dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \dfrac{x-2}{\sqrt{3}}$ και έχουμε $dx = \sqrt{3}du$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u^2+1} \cdot \sqrt{3}\ du = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Άσκηση 6 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\ dx \qquad J = \int \frac{x+5}{4x^2+4x+10}\ dx.$$

Λύση - υποδείξεις.

Στο πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι το τριώνυμο x^2+2x+2 έχει αρνητική διακρίνουσα και ότι

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1.$$

Επομένως

$$I = \int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\ dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (x+1)^2$ οπότε $du = 2(x+1)dx$. Επομένως

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u+1}\ du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u+1| + c = \frac{1}{2} \cdot \ln((x+1)^2+1) + c = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+2x+2) + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα βλέπουμε πάλι ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2+4x+10$ είναι αρνητική και πως

$$4x^2+4x+10 = (2x)^2+2\cdot 2x+1+9 = (2x+1)^2+9.$$

Άρα

$$J = \int \frac{x+5}{(2x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+10}{(2x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+1+9}{(2x+1)^2+9}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9}\,dx \;+\; \frac{1}{2}\cdot\int \frac{9}{(2x+1)^2+9}\,dx.$$

Συμβολίζουμε τα πιο πάνω ολοκληρώματα με J_1 και J_2 αντίστοιχα και έχουμε

(1) $$J = \frac{1}{2}\cdot(J_1+J_2)$$

Υπολογίζουμε το κάθε ένα ολοκλήρωμα ξεχωριστά. Στο J_1 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u=(2x+1)^2$, οπότε $du = 2(2x+1)\cdot 2dx = 4(2x+1)dx$. Επομένως

$$J_1 = \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{u+9}\,du = \frac{1}{4}\cdot \ln|u+9| + c_1 = \frac{1}{4}\cdot\ln((2x+1)^2+9)+c_1.$$

Υπολογίζουμε το J_2,

$$J_2 = \int \frac{9}{(2x+1)^2+9} = \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2+1}\,dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \dfrac{2x+1}{3}$ και έχουμε $du = \dfrac{2}{3}dx$ ή αλλιώς $dx = \dfrac{3}{2}du$. Άρα

$$J_2 = \int \frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{3}{2}\,du = \frac{3}{2}\cdot\arctan(u)+c_2 = \frac{3}{2}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right)+c_2.$$

Από την (1) προκύπτει

$$J = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln((2x+1)^2+9) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right)+c$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\ln(4x^2+4x+10)+\frac{3}{4}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right)+c.$$

Άσκηση 7 (Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης). Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)}\,dx.$$

Λύση - υποδείξεις.
Αρχικά αναλύουμε το κλάσμα. Επειδή η διακρίνουσα του πολυωνύμου x^2+x+1 είναι αρνητική έχουμε

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε $C=2/7$, $B=-1/7$ και $A=1/7$. Άρα

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{7}\cdot\frac{x-2}{x^2+x+1}.$$

Συμβολίζουμε με I το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Τότε

$$I = \frac{1}{7}\cdot\int\frac{1}{x+3}\,dx - \frac{1}{7}\cdot\int\frac{x-2}{x^2+x+1}\,dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_1 και I_2 αντίστοιχα, έτσι που

$$I = \frac{1}{7}\cdot I_1 - \frac{1}{7}\cdot I_2.$$

Έχουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{x+3}\, dx = \ln|x+3| + c_1.$$

Σχετικά με το I_2 έχουμε

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = (x+1/2)^2 + 3/4.$$

Άρα

$$I_2 = \int \frac{x-2}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx = \int \frac{x+1/2}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx - \frac{5}{2}\cdot\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με I_3 και I_4 αντίστοιχα, έτσι που $I_2 = I_3 - (5/2)\cdot I_4$. Για τον υπολογισμό του I_3 εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = (x+1/2)^2$ οπότε $du = 2(x+1/2)dx$. Άρα

$$I_3 = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u+3/4}\, du = \frac{1}{2}\cdot\ln|u+3/4| + c_2 = \frac{1}{2}\cdot\ln((x+1/2)^2+3/4) + c_2 = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+x+1) + c_2.$$

Για το I_4 έχουμε

$$I_4 = \int\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\, dx = \frac{4}{3}\cdot\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(x+1/2)\right)^2+1}\, dx.$$

Με αντικατάσταση $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(x+1/2)$ προκύπτει $du = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx$ και άρα

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan(u) + c_3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(x+1/2)\right) + c_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_3. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε

$$I_2 = I_3 - \frac{5}{2}\cdot I_4 = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+x+1) - \frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_4$$

και

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7}\cdot I_1 - \frac{1}{7}\cdot I_2 \\ &= \frac{1}{7}\cdot\ln|x+3| - \frac{1}{14}\cdot\ln(x^2+x+1) + \frac{5\sqrt{3}}{21}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$

Άσκηση 8 (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα). Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}\, dx \qquad \text{και} \qquad J = \int\frac{1}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}\, dx.$$

(i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.

(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $R(u,v) = \dfrac{1}{u^2 \cdot v}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\ dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$R(u,-v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -R(u,v)$$

δηλαδή η R είναι περιττή ως προς v. (Προσοχή μην μπερδευτείτε με το ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι άρτια - αυτό δεν έχει σχέση σε αυτό το σημείο.)

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\ dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \sin x$.

Έχουμε $dt = \cos x dx$ και

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x}\ dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\ dx = \int \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)}\ dt,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Επομένως έχουμε εκφράσει το I ως αόριστο ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης $f(t) = \dfrac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)}$, $t \neq 0$.

Στο ολοκλήρωμα J παίρνουμε $Q(u,v) = \dfrac{1}{u^4 \cdot v^2}$, $u, v \neq 0$, έτσι που

$$J = \int Q(\sin x, \cos x)\ dx.$$

Παρατηρούμε ότι η Q είναι άρτια ως προς το ζεύγος (u,v), δηλαδή

$$Q(-u,-v) = \frac{1}{(-u)^4 \cdot (-v)^2} = \frac{1}{u^4 \cdot v^2} = Q(u,v).$$

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int Q(\sin x, \cos x)\ dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t = \tan x$.

Έχουμε $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$ και

$$J = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\ dx,$$

άρα θέλουμε να εκφράσουμε την ποσότητα $1/\sin^4 x$ συναρτήσει του t. Αφού $t = \tan x$ έχουμε

$$\begin{aligned} & \sin^2 x = t^2 \cos^2 x \implies \sin^2 x = t^2(1 - \sin^2 x) \\ \implies & \sin^2 x = t^2 - t^2 \sin^2 x \implies \sin^2 x(1+t^2) = t^2 \\ \implies & \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \implies \sin^4 x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \\ \implies & \frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1+t^2)^2}{t^4}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\ dt.$$

(ii) Υπολογίζουμε το $I = \displaystyle\int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\ dt$ ως συνάρτηση του t και μετά αντικαθιστούμε $t = \sin x$. Παρατηρούμε ότι το κλάσμα είναι έκφραση του t^2, δηλαδή αν θέσουμε $s = t^2$ τότε το κλάσμα μετατρέπεται σε $\dfrac{1}{s(1-s)}$, το οποίο αναλύεται εύκολα ως εξής:

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \ .$$

Άρα

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} \ dt = \int \frac{1}{t^2} \ dt + \int \frac{1}{1-t^2} \ dt = -\frac{1}{t} + \int \frac{1}{1-t^2} \ dt.$$

Για να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε ακόμα μία ανάλυση κλάσματος,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t} \ .$$

Καταλήγουμε

$$I = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1-t} \ dt + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+t} \ dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \ln|1-t| + \frac{1}{2} \cdot \ln|1+t| + c.$$

(Το προτελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει με αντικατάσταση $u = -t$.) Θέτοντας πίσω $t = \sin x$ έχουμε

$$I = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) - \frac{2}{\sin x} \right) + c.$$

Τέλος υπολογίζουμε το J. Εδώ δεν χρειάζεται να αναλύσουμε το κλάσμα γιατί ο παρονομαστής αποτελείται μόνο από έναν όρο, το t^4.

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \ dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} \ dt = \int \frac{1}{t^4} \ dt + \int \frac{2}{t^2} \ dt + \int 1 \ dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c.$$

Αφού $t = \tan x$ προκύπτει

$$J = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + c.$$

Άσκηση 9 (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} \ dx = \frac{1}{\rho - 1} \ ,$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Λύση - υποδείξεις.

Υποθέτουμε ότι $\rho > 1$ και θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} \ dx = \int_1^R x^{-\rho} \ dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \Big|_1^R = \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(R^{-\rho+1} - 1\right) = \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right).$$

Επειδή $\rho > 1$ έχουμε $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\rho-1} = \infty$ και συνεπώς

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\rho-1}} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} \ dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right) = \frac{1}{\rho-1} \cdot (1-0) = \frac{1}{\rho-1} \ .$$

Καταλήγουμε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} \ dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} \ dx = \frac{1}{\rho-1} \ .$$

Αν $\rho < 1$ τότε $1 - \rho > 0$ και $\lim\limits_{R\to\infty} R^{-\rho+1} = +\infty$. Όπως πιο πάνω έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} \ dx = \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(R^{-\rho+1} - 1\right)$$

για κάθε $R > 1$ και άρα

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} \ dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(R^{-\rho+1} - 1\right) = +\infty.$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$ δεν ορίζεται για $\rho < 1$. (Κάποια συγγράμματα αναφέρουν $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx = +\infty$ όταν $\rho < 1$.)

Τέλος αν $\rho = 1$,

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\rho}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \ln(x)\,\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty}\ln(R) = \infty.$$

Συνεπώς πάλι δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$.

Άσκηση 10 (Γενικευμένα ολοκληρώματα).

(i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση να τα υπολογίσετε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

(ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια $\rho \in \mathbb{R}$ περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα να το υπολογίσετε.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\,dx$ (Άσκηση 9);

Λύση - υποδείξεις.

(i) Για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\,\Big|_r^1 = -1 + \frac{1}{r}$$

$$\int_r^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,\big|_r^1 = \ln 1 - \ln r = -\ln r$$

$$\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_r^1 x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2}\,\Big|_r^1 = 2\sqrt{x}\,\big|_r^1 = 2(\sqrt{1}-\sqrt{r}) = 2 - 2\sqrt{r}.$$

.

Παίρνοντας το όριο όταν το r τείνει στο 0 από δεξιά έχουμε

$$\lim_{r\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{r}\right) = +\infty, \qquad \lim_{r\to 0^+}(-\ln r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to 0^+}(2-2\sqrt{r})) = 2.$$

Άρα τα δύο πρώτα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ και $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ δεν ορίζονται, ενώ το τρίτο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ορίζεται και είναι ίσο με 2.

(ii) Από το πιο πάνω ερώτημα βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx$ δεν ορίζεται για $\rho = 1, 2$ ενώ ορίζεται για $\rho = 1/2$. Ισχυριζόμαστε ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\,dx$ ορίζεται αν και μόνο αν $\rho < 1$.

Παρατηρούμε ότι αυτό λειτουργεί συμπληρωματικά σε σχέση με το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\ dx$: σύμφωνα με την Άσκηση 9 το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\ dx$ ορίζεται αν και μόνο $\rho > 1$. (Για $\rho = 1$ δεν ορίζεται κανένα από αυτά τα ολοκληρώματα.)

Για να δείξουμε τον ισχυρισμό μας θεωρούμε $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho \neq 1$. (Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα το $\int_r^1 \frac{1}{x^\rho}\ dx$ δεν ορίζεται για $\rho = 1$.) Τότε για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\rho}\ dx = \int_r^1 x^{-\rho}\ dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1}\Big|_r^1 = \frac{1}{1-\rho}\cdot\left(1 - r^{1-\rho}\right).$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ για $\alpha > 0$ και $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ για $\alpha < 0$. Επομένως αν $1-\rho > 0$, δηλαδή αν $\rho < 1$, ισχύει $\lim_{r\to 0^+} r^{1-\rho} = 0$ και άρα

$$\lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \frac{1}{x^\rho}\ dx = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{1-\rho}\cdot\left(1 - r^{1-\rho}\right) = \frac{1}{1-\rho},$$

Επομένως

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\ dx = \frac{1}{1-\rho}, \qquad \rho < 1.$$

Από την άλλη αν $1-\rho < 0$, δηλαδή αν $\rho > 1$, ισχύει $\lim_{r\to 0^+} r^{1-\rho} = +\infty$ και άρα το $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\ dx$ δεν ορίζεται. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Άσκηση 11 (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\ dx.$$

(ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\ dx$ αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ να μην ορίζεται.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Εφόσον ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ορίζονται τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_c^\infty f(x)\ dx$, $\int_{-\infty}^c f(x)\ dx$ και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_c^{\infty} f(x)\ dx.$$

Τότε υπάρχουν τα όρια $\lim_{R_1\to-\infty}\int_{R_1}^{c} f(x)\ dx$ και $\lim_{R_2\to\infty}\int_{c}^{R_2} f(x)\ dx$. Παίρνουμε $R_2 = R$ και $R_1 = -R$ (δηλαδή θεωρούμε ότι $R_1 = -R_2$) και έχουμε από πιο πάνω

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{c} f(x)\ dx + \lim_{R\to\infty}\int_{c}^{R} f(x)\ dx\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{R} f(x)\ dx\right)\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\ dx.\end{aligned}$$

(ii) Για κάθε $R > 0$ έχουμε

$$\int_{-R}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\ dx = \int_{-R}^{R}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\ dx = \ln(x^2+1)\ \Big|_{-R}^{R} = \ln(R^2+1) - \ln(R^2+1) = 0,$$

άρα υπάρχει το όριο $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\ dx$ και είναι ίσο με 0.

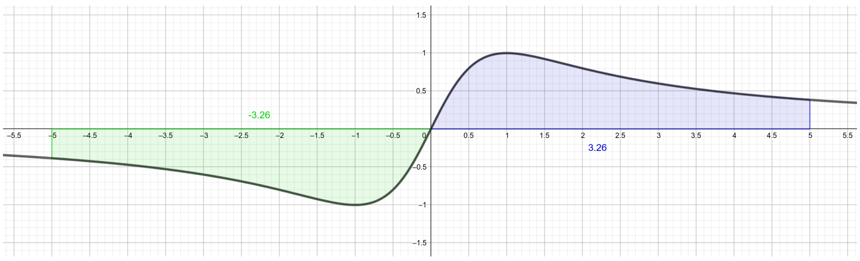
Από την άλλη για κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{c}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\ dx = \ln(x^2+1)\ \Big|_{c}^{R} = \ln(R^2+1) - \ln(c^2+1) \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Άρα δεν ορίζεται το $\int_{c}^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}\ dx$ και επομένως ούτε το $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}\ dx$.

(Όμοια μπορεί να δείξει κανείς ότι $\lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{c}\frac{2x}{x^2+1}\ dx = -\infty$ και άρα επίσης δεν ορίζεται το $\int_{-\infty}^{c}\frac{2x}{x^2+1}\ dx$).

Σχήμα:



Πιο πάνω δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι περιττή συνάρτηση, επομένως τα εμβαδά στην πράσινη και στην μπλε περιοχή είναι ίσα και στο ολοκλήρωμα προσμετρώνται με διαφορετικό πρόσημο. Με άλλα λόγια $\int_{-R}^{0}\frac{2x}{x^2+1}\ dx = -\int_{0}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\ dx$, ειδικότερα έχουμε $\int_{-R}^{R}\frac{2x}{x^2+1}\ dx = 0$.

Από την άλλη το εμβαδόν που καθορίζεται από τον θετικό ημιάξονα Ox και τη γραφική παράσταση της f είναι άπειρο και γι' αυτό δεν ορίζεται το $\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}\ dx$. Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα $\lim_{R_1\to-\infty}\int_{R_1}^{0} f(x)\ dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_{0}^{R_2} f(x)\ dx$ οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$.

Άσκηση 12 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Δείξτε με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Κριτηρίου ότι για κάθε $\rho > 0$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\rho}}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε $\rho > 0$ και τη συνάρτηση $f : [1, \infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{x^\rho}$. Η f παίρνει θετικές τιμές και είναι συνεχής. Επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα: έχουμε $x^\rho = e^{\rho \cdot \ln x}$, οι συναρτήσεις exp και ln είναι γνησίως αύξουσες και $\rho > 0$, άρα η $x \mapsto x^\rho$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\ dx.$$

Από την Άσκηση 9 το προηγούμενο ολοκλήρωμα υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\rho > 1$. Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

Άσκηση 13 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόζουμε το Ολοκληρωτικό Κριτήριο. Στην πρώτη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : [2, \infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}\ .$$

Οι συναρτήσεις $x \mapsto x$ και $x \mapsto \ln x$ είναι γνησίως αύξουσες και θετικές στο $[2, \infty)$, συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα και θετική.

Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\ dx$.

Θεωρούμε $R > 2$. Τότε

$$\int_2^R f(x)\ dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln x}\ dx.$$

Παρατηρούμε ότι $1/x = (\ln x)'$. Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \ln x$ και έχουμε $du = \dfrac{1}{x}dx$ αλλιώς $dx = xdu$.

Άρα

$$\int_2^R f(x)\ dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u}\ du = \ln u\ \Big|_2^{\ln R} = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2).$$

Έχουμε

$$\lim_{R\to\infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R\to\infty} \ln(\ln R) = \infty.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R\to\infty} \int_2^R f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty} (\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Επομένως δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\ dx$ και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

αποκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g : [2, \infty) \to \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \ .$$

Όπως και με την f η συνάρτηση g είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και θετική. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} g(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} g(x)\ dx$.

Θεωρούμε $R > 2$. Τότε

$$\int_2^R g(x)\ dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}\ dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \ln x$ και έχουμε $du = \frac{1}{x} dx$ αλλιώς $dx = x du$.

Άρα

$$\int_2^R g(x)\ dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u^2}\ du = -\frac{1}{u} \Big|_{\ln 2}^{\ln R} = -\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{\ln 2} \ .$$

Έχουμε

$$\lim_{R \to \infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\ln R} = 0.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R \to \infty} \int_2^R g(x)\ dx = \lim_{R \to \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R} \right) = \frac{1}{\ln 2} \ .$$

Επομένως ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} g(x)\ dx$ και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} g(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

συγκλίνει.