Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση). Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx, \qquad I_2 = \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx,$$

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx, \qquad I_4 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

$$I_5 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx, \quad (x > \sqrt{2}).$$

όπου πιο πάνω $a > 0$. Όλες οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις θεωρούνται ότι ορίζονται σε κατάλληλα διαστήματα.

Υπόδειξη. Το I_5, μετά από κατάλληλη αντικατάσταση, ανάγεται στο I_4 με $a = 1$.

Άσκηση 2. Με εφαρμογή της αντικατάστασης $u = \pi - x$ δείξτε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^\pi x \cdot f(\sin x)\;dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(\sin x)\;dx.$$

Χρησιμοποιήστε το πιο πάνω για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Άσκηση 3 (Ολοκληρώματα και αναδρομικός τύπος). Θεωρούμε $x > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I_k = \int_0^x \sin^k t\;dt,$$

όπου $\sin^k t$ σημαίνει $(\sin t)^k$ (ύψωση σε δύναμη). Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 2$ ισχύει ο αναδρομικός τύπος

$$I_k = -\frac{1}{k} \cdot \cos x \cdot \sin^{k-1} x + \frac{k-1}{k} \cdot I_{k-2}\,.$$

Άσκηση 4 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx \qquad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)}\,dx.$$

Άσκηση 5 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \qquad I_2 = \int \frac{1}{3x^2+1} \qquad I_3 = \int \frac{1}{x^2-4x+7}\,dx.$$

Άσκηση 6 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\, dx \qquad J = \int \frac{x+5}{4x^2+4x+10}\, dx.$$

Άσκηση 7 (Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης). Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)}\, dx.$$

Άσκηση 8 (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα). Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x}\, dx \qquad \text{και} \qquad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}\, dx.$$

(i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.

(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J.

Άσκηση 9 (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\, dx = \frac{1}{\rho - 1}\ ,$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Άσκηση 10 (Γενικευμένα ολοκληρώματα).

(i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση να τα υπολογίσετε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

(ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια $\rho \in \mathbb{R}$ περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho}\, dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα να το υπολογίσετε.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho}\, dx$ (Άσκηση 9);

Άσκηση 11 (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\, dx.$$

(ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\, dx$ αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ να μην ορίζεται.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1},\ \ x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 12 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Δείξτε με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Κριτηρίου ότι για κάθε $\rho > 0$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

Άσκηση 13 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

ως προς τη σύγκλιση.