Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Πολυώνυμα Taylor

Άσκηση 1 (Βέλτιστη γραμμική προσέγγιση). Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(a,b)$. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_\lambda(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0),\quad x\in(a,b).$$

Δείξτε ότι αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ με

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g_\lambda(x)}{x-x_0}=0,$$

όπου η g_λ είναι όπως πιο πάνω, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 και μάλιστα $f'(x_0)=\lambda$. (Επομένως η γραμμικοποίηση $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ είναι η μοναδική "καλή γραμμική" προσέγγιση της f κοντά στο x_0.)

Λύση - υποδείξεις.
Παρατηρούμε ότι $f(x)-g_\lambda(x)=f(x)-[f(x_0)+\lambda(x-x_0)]=f(x)-f(x_0)-\lambda(x-x_0)$. Άρα αν υπάρχει τέτοιο λ τότε

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g_\lambda(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\lambda(x-x_0)}{x-x_0}=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)-\lambda.$$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lambda,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=\lambda$.

Άσκηση 2 (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς $(1,0002)^{50}$ και $\sqrt[3]{1,009}$.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Η γραμμικοποίηση της $f(x)=(1+x)^{50}$, γύρω από το $x_0=0$ είναι

$$L(x)=1+50x\,.$$

Επομένως

$$(1,0002)^{50}=f(0,0002)\approx L(0,0002)=1,01\,.$$

(ii) Αντίστοιχα η γραμμικοποίηση της $f(x)=(1+x)^{1/3}$, γύρω από το $x_0=0$ είναι

$$L(x)=1+1/3x\,.$$

Επομένως

$$\sqrt[3]{1,009}=f(0,009)\approx L(0,009)=1,003\,.$$

Άσκηση 3 (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό $\tan 42^\circ$, δηλαδή για τον $\tan \frac{7\pi}{30}$.

Λύση - υποδείξεις.
Γραμμικοποιούμε την $f(x) = \tan x$ στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ και έχουμε

$$L(x) = f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) .$$

Οπότε

$$\tan 42^\circ \equiv \tan \frac{7\pi}{30} \approx L(\frac{7\pi}{30}) = 1 + 2(-\frac{\pi}{60}) = \frac{30-\pi}{30} .$$

Άσκηση 4 (Εκθετική Συνάρτηση - Παράγωγοι στο $x_0 = 0$). Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση - υποδείξεις.
Δείχνουμε την ισχυρότερη σχέση $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εφαρμόζουμε την Αρχής της Επαγωγής: για $n = 0$ έχουμε προφανώς $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και δείχνουμε ότι $f^{(n+1)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(f^{(n)}(x)\Big)' = (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου στη δεύτερη ισότητα πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος για να δείξουμε ότι $f^{(n)}(0) = 1$ παίρνουμε την ισότητα $f^{(n)}(x) = e^x$ και θέτουμε $x = 0$.

Άσκηση 5 (Πολυνώνυμα Taylor Εκθετικής Συνάρτησης). Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της f τάξης $n \in \mathbb{N}$ στο σημείο $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση - υποδείξεις.
Αφού $f^{(k)}(0) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k \qquad \text{(από τον ορισμό)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k . \end{aligned}$$

Άσκηση 6 (Παράγωγοι Συνάρτησης Λογαρίθμου στο $x_0 = 1$). Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (-1,1) \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{1}{1+x} , \qquad f(x) = \ln(1+x).$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}} , \quad x \in (-1,1),$$

καθώς και ότι

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε $k \geq 1$.

Λύση - υποδείξεις.

Ο ισχυρισμός για τη g αποδεικνύεται με επαγωγή. Για $n=0$ έχουμε προφανώς $g^{(0)}(x) = g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ και

$$\frac{(-1)^0 \cdot 0!}{(1+x)^{0+1}} = \frac{1\cdot 1}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x} = g^{(0)}(x), \quad x \in (-1,1).$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$, όπου $x \in (-1,1)$. Δείχνουμε ότι

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

Για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= \left(g^{(n)}(x)\right)' \\
&= \left(\frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\right)' \\
&= (-1)^n \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right)' \\
&= (-1)^n \cdot n! \cdot [-(n+1)] \cdot (1+x)^{-(n+2)} \cdot (1+x)' \\
&= (-1)^n \cdot (-1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+2}} \cdot 1 \\
&= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}} .
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $g = f'$ οπότε $g^{(n)} = f^{(n+1)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ή αλλιώς $f^{(k)} = g^{(k-1)}$ για κάθε $k \geq 1$. Ειδικότερα για $x = 0$ έχουμε $f^{(k)}(0) = g^{(k-1)}(0)$, δηλαδή

$$f^{(k)}(0) = g^{(k-1)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}\cdot (k-1)!}{(1+0)^{k-1+1}} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}\cdot (k-1)!$$

για κάθε $k \geq 1$.

Άσκηση 7 (Πολυνώνυμα Taylor Λογαρίθμου). Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της συνάρτησης

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x)$$

τάξης n στο σημείο 0 δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} .$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.

Λύση - υποδείξεις.

Από προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$ για κάθε $k \geq 1$. Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k && (\text{ορισμός } P_n) \\
&= f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k && (\text{διαχωρίζουμε περιπτώσεις } k=0 \text{ και } k \geq 1)
\end{aligned}$$

$$= \ln 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} \cdot x^k \qquad \text{(από τα προηγούμενα)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \qquad \text{(ισχύει } k! = (k-1)! \cdot k\text{)}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \ .$$

Άσκηση 8 (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης). Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

(1)

$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f^{(m)}(x)$ είναι η παράγωγος της f τάξης $m \in \mathbb{N}$. (Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f.) Συμπεράνετε ότι

(2)
$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Λύση - υποδείξεις.
Δείχνουμε τις ισότητες (1) με επαγωγή στο n. Ορίζουμε την ιδιότητα P ως εξής: ένας φυσικός αριθμός n ικανοποιεί την P ακριβώς όταν ικανοποιούνται **και οι τέσσερις** ισότητες στην (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $n = 0$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(0)}(x) = \sin(x), \qquad \sin^{(1)} x = (\sin(x))' = \cos(x)$$
$$\sin^{(2)}(x) = (\cos(x))' = -\sin(x), \quad \sin^{(3)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x).$$

Υποθέτουμε ότι κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί την ιδιότητα P και δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$\sin^{(4(n+1))}(x) = \sin^{(4n+4)}(x) = (\sin^{(4n+3)})'(x) = (-\cos(x))' = +\sin(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την *τέταρτη ισότητα* της (1). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\sin^{(4(n+1)+1)}(x) = \sin^{(4n+5)}(x) = (\sin^{(4n+4)}(x))' = (\sin(x))' = \cos(x)$$
$$\sin^{(4(n+1)+2)}(x) = \sin^{(4n+6)}(x) = (\sin^{(4n+5)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$$

και

$$\sin^{(4(n+1)+3)}(x) = \sin^{(4n+7)}(x) = (\sin^{(4n+6)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x).$$

Επομένως το $n+1$ ικανοποιεί την ιδιότητα P και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για την (2) θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j$. Αν ο j είναι άρτιος τότε $j = 2n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $k = 4n$, ενώ αν ο j είναι περιττός τότε $j = 2n+1$ για κάποιο n και τότε $k = 2(2n+1) = 4n+2$. Από την (1) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = \pm \sin(0) = 0$.

Τέλος θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j+1$. Αν $j = 2n$ τότε $k = 4n+1$ οπότε από την (1) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$, και αν $j = 2n+1$ τότε $k = 2\cdot(2n+1)+1 = 4n+3$ οπότε από την (1) έχουμε $\sin^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\sin^{(k)}(0) = (-1)^j$, όταν $k = 2j+1$.

Άσκηση 9 (Πολυώνυμα Taylor ημιτόνου). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

Λύση - υποδείξεις.
Έστω P_m τα ζητούμενα πολυώνυμα, $m \in \mathbb{N}$. Αρχικά βρίσκουμε τα P_{2n+1} και μετά τα P_{2n}, όπου $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad (\text{γιατί για } k = 2j \text{ η παράγωγος είναι } 0) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \quad (\text{από τον τύπο}). \end{aligned}$$

Προφανώς το $P_{2n+2}(x)$ διαφέρει από το $P_{2n+1}(x)$ κατά τον παράγοντα $\dfrac{\sin^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}$. Αφού όμως $\sin^{(2n+2)}(0) = 0$ προκύπτει ότι $P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απομένει να βρούμε το P_0. Αυτό όμως είναι άμεσο: $P_0(x) = \dfrac{\sin^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 = \sin(0) \cdot x^0 = 0$.

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \\ P_{2n+2}(x) &= P_{2n+1}(x) \\ P_0 &= 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 10 (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης). Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες με την Άσκηση 8 ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου cos.

Λύση - υποδείξεις.
Οι αντίστοιχες ισότητες για τη συνάρτηση cos είναι

(3)
$$\cos^{(4n)}(x) = \cos(x), \quad \cos^{(4n+1)}(x) = -\sin(x), \quad \cos^{(4n+2)}(x) = -\cos(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = \sin(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Στο $x = 0$ έχουμε

(4)
$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Δείχνουμε τις ισότητες της (3) με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 0$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos^{(0)}(x) &= \cos(x), & \cos^{(1)} x &= (\cos(x))' = -\sin(x) \\ \cos^{(2)}(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x), & \cos^{(3)}(x) &= (-\cos(x))' = +\sin(x). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι οι ισότητες της (3) ισχύουν για κάποιο n και δείχνουμε ότι ισχύουν και για το $n+1$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\cos^{(4(n+1))}(x) = \cos^{(4n+4)}(x) = (\cos^{(4n+3)})'(x) = (\sin(x))' = \cos(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την τέταρτη ισότητα της (3). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\cos^{(4(n+1)+1)}(x) = \cos^{(4n+5)}(x) = (\cos^{(4n+4)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$\cos^{(4(n+1)+2)}(x) = \cos^{(4n+6)}(x) = (\cos^{(4n+5)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$$

και

$$\cos^{(4(n+1)+3)}(x) = \cos^{(4n+7)}(x) = (\cos^{(4n+6)}(x))' = (-\cos(x))' = \sin(x).$$

Επομένως οι ισότητες ικανοποιούνται για το $n+1$ και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για τη (4) θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j+1$. Αν $j = 2n$ τότε $k = 4n+1$ οπότε από την (3) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = -\sin(0) = 0$, και αν $j = 2n+1$ τότε $k = 2\cdot(2n+1)+1 = 4n+3$ οπότε από την (3) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = \sin(0) = 0$. Άρα $\sin^{(k)}(0) = 0$.

Τέλος θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{N}$ και $j \in \mathbb{N}$ με $k = 2j$. Αν ο j είναι άρτιος τότε $j = 2n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $k = 4n$. Από την (3) έχουμε $\cos^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$. Αν ο j είναι περιττός τότε $j = 2n+1$ για κάποιο n και τότε $k = 2(2n+1) = 4n+2$. Επομένως από την (3) $\cos^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$.

Άσκηση 11 (Πολυώνυμα Taylor συνημιτόνου). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του συνημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Λύση - υποδείξεις.

Έστω P_m τα ζητούμενα πολυώνυμα, $m \in \mathbb{N}$. Αρχικά βρίσκουμε τα P_{2n} και μετά τα P_{2n+1}, όπου $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\cos^{(2j)}(0)}{(2j)!} \cdot x^{2j} \quad \text{(γιατί για } k = 2j+1 \text{ η παράγωγος είναι 0)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \cdot x^{2j} \quad \text{(από τον τύπο).} \end{aligned}$$

Προφανώς το $P_{2n+1}(x)$ διαφέρει από το $P_{2n}(x)$ κατά τον παράγοντα $\dfrac{\cos^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$. Αφού όμως $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$ προκύπτει ότι $P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απομένει να βρούμε το P_0. Αυτό όμως είναι άμεσο: $P_0(x) = \dfrac{\cos^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 = \cos(0)\cdot x^0 = 1$.

Συνοψίζοντας έχουμε

$$P_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \cdot x^{2j}$$
$$P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$$
$$P_0 = 1.$$

Άσκηση 12 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor).

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Το πολυώνυμο Taylor P_n της e^x στο 0 είναι το

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ .$$

Συμβολίζουμε με R_n το αντίστοιχο υπόλοιπο. Παίρνουμε $x = 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

και άρα

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - P_n(1) = R_n(1).$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (1-0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

όπου $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $f^{(m)}(x) = f(x)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$R_n(1) = \frac{f(\xi)}{(n+1)!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

και συνεπώς

(5)
$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \ .$$

Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $\xi < 1$ έχουμε

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e^{1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \ .$$

Ειδικότερα από την (5) έχουμε

(6)
$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$. Ισοδύναμα $(n+1)! > 30000$. Υπολογίζουμε

$$5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 720 \cdot 7 = 5040, \quad 8! = 5040 \cdot 8 = 40320 > 30000.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε $n + 1 = 8$ δηλαδή $n = 7$.

Προσοχή. Θέτοντας $n = 6$ στην (6) βλέπουμε ότι $e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040}$. Η τελευταία ανισότητα δεν μπορεί να αποκλείσει το ενδεχόμενο η προσέγγιση του $\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}$ στο e να είναι πολύ μικρότερη του $3 \cdot 5040^{-1}$, ίσως και μικρότερη του 10^{-4}. Επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ακόμα ότι το $n = 7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός n με $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}$. Αυτό ουσιαστικά είναι το ζητούμενο του επόμενου ερωτήματος.

(ii) Από την (5) και το γεγονός ότι η e^x είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} > \frac{e^0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \ .$$

Για $n = 6$ έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} > \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \ .$$

Αλλά $5040 < 10000 = 10^4$, άρα $e - \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} > \frac{1}{5040} > 10^{-4}$.

Επομένως ο $n = 7$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $e - \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} < 10^{-4}$.

Άσκηση 13 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση - υποδείξεις.

Αρχικά δείχνουμε μια ανισότητα με βάση το $\cos x$ και το πολυώνυμο Taylor P_5 της $\cos x$ στο 0 - έπειτα αντικαθιστούμε το x με το $2x$. Το 5 υπαγορεύεται από την εκφώνηση όπου το σφάλμα στην προσέγγιση είναι $64x^6/6!$, με άλλα λόγια **το υπόλοιπο Taylor πρέπει να έχει τάξη** 6. Αυτό συμβαίνει όταν το πολυώνυμο Taylor είναι το P_5.

Υπενθυμίζουμε ότι τα πολυώνυμα Taylor της $\cos x$ στο 0 δίνονται από

$$1, \quad 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \quad \ldots$$

Για να βρούμε το πολυώνυμο Taylor P_5 στο 0 παίρνουμε τις δυνάμεις όπου ο εκθέτης φτάνει το πολύ μέχρι 5, δηλαδή

$$P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ .$$

(Δεν πειράζει που ο συντελεστής του x^5 είναι 0.)

Θεωρούμε $x \in \mathbb{R}$. Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6 = \frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6$$

όπου $R_5(x) = \cos(x) - P_5(x)$. Έχουμε $|\cos^{(6)}(\xi)| \leq 1$ (οι παράγωγοι του συνημιτόνου κάθε τάξης είναι της μορφής $\pm \sin$ ή $\pm \cos$), άρα

$$|\cos x - P_5(x)| = |R_5(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot |x^6|$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \right| \leq \frac{x^6}{6!} \ .$$

Το πιο πάνω ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με το $2x$ και παίρνουμε

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}\right) \right| \leq \frac{(2x)^6}{6!} \ .$$

Δηλαδή

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!} \ .$$

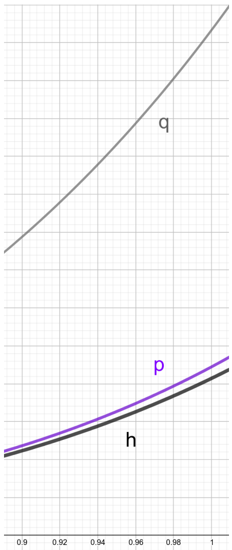
Σχόλιο: Επειδή ο συντελεστής του x^5 στο $P_5(x)$ είναι 0 έχουμε ότι $P_5(x) = P_4(x)$. Άρα το $|\cos x - P_5(x)|$ παραμένει το ίδιο με το $|\cos x - P_4(x)| = |R_4(x)|$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ίδια παίρνοντας το υπόλοιπο R_4 αντί του R_5. Όπως με πριν καταλήγουμε στο $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$. Τέλος αντικαθιστώντας το x με το $2x$ παίρνουμε

$$\left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right| = |\cos(2x) - P_4(2x)| = |R_4(2x)| \leq \frac{|2x|^5}{5!} = \frac{32|x|^5}{5!}.$$

Με άλλα λόγια η προσέγγιση με σφάλμα το πολύ $\frac{32|x|^5}{5!}$ είναι επίσης σωστή. Όμως η προσέγγιση της εκφώνησης, δηλαδή με σφάλμα το πολύ $\frac{64|x|^6}{6!}$, είναι ακριβέστερη όταν $0 < |x| < 3$. Για να δούμε το τελευταίο παρατηρούμε ότι

$$\frac{64|x|^6}{6!} < \frac{32|x|^5}{5!} \iff \frac{2|x|^6}{6} < |x|^5 \iff |x| < 3, \qquad \text{όπου } x \neq 0.$$

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $h(x) = \left|\cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right)\right|$, $p(x) = \frac{64x^6}{6!}$ και $q(x) = \frac{32|x|^5}{5!}$ γύρω από το $x = 0,96$ για να δούμε την τάξη μεγέθους στη διαφορά των σφαλμάτων:



Όπως βλέπουμε στην περιοχή του $x = 0,96$ η συνάρτηση p είναι αρκετά καλύτερη προσέγγιση της h σε σχέση με την q.

Άσκηση 14 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι

$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\right| < 10^{-2}.$$

Λύση - υποδείξεις.
Το πολυώνυμο Taylor P_4 της συνάρτησης ημίτονο στο 0 είναι το

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}\ .$$

Για το $x = 1$ υπάρχει από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου ένα $\xi \in (0, 1)$ με

$$R_4(1) = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot 1^5 = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\ ,$$

όπου

$$R_4(1) = \sin 1 - P_4(1) = \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right).$$

Τότε

$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\right| = |R_4(1)| = \left|\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\right| \le \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 10^{-2}.$$

Άσκηση 15 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Τι τάξης πολυώνυμο Taylor κέντρου 0 χρειάζεται, ώστε να προσεγγίσουμε το $\sin 1$ με σφάλμα (κατά απόλυτη τιμή) μικρότερο από $0,001$; Ποιος είναι ο τύπος αυτού του πολυωνύμου;

Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor για την f στο 0 τάξης n έχουμε

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,,$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$, όπου το $f^{(n+1)}(\xi)$ είναι $\sin\xi$ ή $\cos\xi$. Συνεπώς

$$|R_n(1)| \le \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Θέλουμε να έχουμε $1/(n+1)! < 0,001 = 10^{-3}$, ισοδύναμα $(n+1)! > 1000$. Ο ελάχιστος $m \in \mathbb{N}$ με $m! > 1000$ είναι ο $m = 7$. Άρα παίρνουμε $n = 6$ και έχουμε $(n+1)! = 7! > 1000$, δηλαδή η ζητούμενη προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί για $n = 6$. Επομένως χρειαζόμαστε το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης ημίτονο στο 0 τάξης 6. Αυτό το πολυώνυμο δίνεται από τον τύπο

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,.$$

(Ο συντελεστής του x^6 είναι 0.)

Άσκηση 16 (Εύρεση διαστήματος προσέγγισης). Βρείτε ένα ανοικτό διάστημα I με κέντρο το 0 έτσι ώστε για κάθε $x \in I$ να ισχύει

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| < 10^{-4}.$$

Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με P_4 το πολυώνυμο Taylor της f στο 0 τάξης 4 και με R_4 το αντίστοιχο υπόλοιπο.

Θεωρούμε ένα $x \in \mathbb{R}$. Τότε $P_4(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$, επομένως

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = f(x) - P_4(x) = R_4(x).$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x έτσι ώστε

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x-0)^5.$$

Ισχύει $|f^{(5)}(\xi)| \le 1$ άρα

$$|R_4(x)| \le \frac{1}{5!} \cdot |x|^5.$$

Άρα αν έχουμε

$$\frac{|x|^5}{5!} < 10^{-4} \tag{7}$$

τότε θα ισχύει

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| = |R_4(x)| \le \frac{|x|^5}{5!} < 10^{-4}. \tag{8}$$

Επιλύουμε την ανίσωση (7):

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{|x|^5}{5!} < 10^{-4} \\
&\iff |x|^5 < 10^{-4} \cdot 5! \\
&\iff |x|^5 < 120 \cdot 10^{-4} \\
&\iff |x|^5 < 1,2 \cdot 10^{-2} \\
&\iff |x| < \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}} \\
&\iff -\sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}} < x < \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}.
\end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $x \in \left(-\sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}, \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}\right)$ έχουμε από την (8) ότι ισχύει

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| < 10^{-4},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Οπότε **ένα κατάλληλο** διάστημα είναι το

$$I = \left(-\sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}, \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}\right).$$

Άσκηση 17 (Taylor και φραγμένη συνάρτηση). Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη και $f(0) = f'(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| \leq 1$ ισχύει

$$|f''(x)| \leq 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε $|x| \leq 1$ έχουμε

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Λύση - υποδείξεις.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του 0, τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

Όμως, από υπόθεση, $|f''(\xi)| \leq 1$ και επομένως αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $|x| \leq 1$ παίρνουμε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 18 (Taylor και ανισώσεις). Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα Taylor της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1+x}$ στο 0 μέχρι 3ης τάξης και να δείξετε ότι

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Λύση - υποδείξεις.

Υπολογίζουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad \text{για } x > 0,$$

και επομένως

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}, \quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$P_1(x) = 1 + \frac{x}{2}, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = P_2(x) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\,.$$

Παίρνουμε ένα $x > 0$. Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου για $n = 1$ έχουμε

$$\sqrt{1+x} = P_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}x^2$$

για κάποιο $\xi \in (0, x)$. Αφού $x, \xi > 0$ προκύπτει από πιο πάνω ότι $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

Αντίστοιχα για $n = 2$ έχουμε

$$\sqrt{1+x} = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = P_2(x) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8}(1+c)^{-\frac{5}{2}}x^3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1+c)^{-\frac{5}{2}}x^3\,,$$

για κάποιο $c \in (0, x)$. Αφού $x, c > 0$ προκύπτει από πιο πάνω ότι $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

Άσκηση 19 (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι

$$0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}\,, \text{ για κάθε } x > 0\,.$$

Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x)$. Επίσης παίρνουμε το πολυώνυμο P_n και το υπόλοιπο R_n Taylor της f στο 0 τάξης n.

Έστω $x > 0$. Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor για $n = 1$ έχουμε

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x-0)^2 = -\frac{1}{2(1+\xi)} \cdot x^2.$$

για κάποιο $\xi \in (0, x)$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι $P_1(x) = x$. Άρα

$$\ln(1+x) = P_1(x) + R_1(x) = x - \frac{1}{2(1+\xi)} \cdot x^2$$

και

$$x - \ln(1+x) = \frac{1}{2(1+\xi)} \cdot x^2 > 0$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιούμε ότι $\xi > 0$ και $x \neq 0$.

Αντίστοιχα για $n = 2$ έχουμε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2(1+c)^{-3}}{3!} \cdot x^3$$

για κάποιο $c \in (0, x)$ και επομένως

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2(1+c)^{-3}}{3!} \cdot x^3 < \frac{x^2}{2}\,,$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιούμε ότι $c, x > 0$.

Άσκηση 20 (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, για κάθε $x \in [-\pi, 0]$.

Λύση - υποδείξεις.

Το πολυώνυμο Taylor P_5 της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sin(x)$ στο 0 τάξης 5 είναι το $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

Σύμφωνα με τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του 0, τέτοιο ώστε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin \xi}{6!}x^6\,.$$

Πιο πάνω χρησιμοποιούμε ότι $f^{(6)}(x) = f^{(2)}(x) = -\sin(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $x \in [-\pi, 0]$, τότε $\xi \in (-\pi, 0)$ και συνεπώς $-\sin\xi > 0$. Οπότε έχουμε από πιο πάνω ότι

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,,$$

(Η ισότητα ισχύει για $x = 0$.)

Σχόλιο. Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο Taylor P_6 της πιο πάνω f (στο 0) είναι το ίδιο με το P_5. Θα μπορούσε επομένως κανείς να χρησιμοποιήσει τη μορφή Lagrange για το υπόλοιπο τάξης 6. Αυτό δίνει για κάθε $x \in [-\pi, 0]$ κάποιο $\xi \in (x, 0) \subseteq (-\pi, 0)$, για το οποίο ισχύει

$$\sin x = P_6(x) + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}x^7 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\cos\xi}{7!}x^7\,.$$

(Χρησιμοποιούμε ότι $f^{(7)}(x) = f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.)

Τώρα όμως δεν έχουμε τρόπο να καταλήξουμε στο συμπέρασμα γιατί η συνάρτηση του συνημιτόνου δεν διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-\pi, 0)$. Συγκεκριμένα, για να προκύπτει το ζητούμενο πρέπει πιο πάνω να έχουμε ότι $-\frac{\cos\xi}{7!}x^7 \geq 0$, ισοδύναμα $\cos\xi \geq 0$ (γιατί $x < 0$), ισοδύναμα $\xi \in [-\pi/2, 0)$.

Το τελευταίο δεν προκύπτει από τα δεδομένα μας: εμείς γνωρίζουμε ότι $\xi \in (x, 0)$ αλλά στην περίπτωση όπου το x είναι μικρότερο από το $-\pi/2$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\xi \in [-\pi/2, 0)$. Με άλλα λόγια η επιλογή του P_6 δίνει τη ζητούμενη ανισότητα μόνο για τα x στο διάστημα $[-\pi/2, 0]$, σε αντιδιαστολή με την επιλογή του P_5 που επιτυγχάνει για τα x στο $[-\pi, 0]$.

Βλέπουμε λοιπόν σε αυτό το παράδειγμα ότι η επιλογή του πολυωνύμου Taylor τάξης 5 *είναι προτιμότερη από την επιλογή του πολυωνύμου Taylor τάξης* 6.(!)

Άσκηση 21 (Taylor και τοπικό ελάχιστο - Απαιτητική). Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη και

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0\,,$$

για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $f^{(2n)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της f καθώς και ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση h, αν $h(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $h(x) > 0$.

Λύση - υποδείξεις.

Η υπόθεσή μας για τις μηδενικές παραγώγους συνεπάγεται ότι το πολυώνυμο Taylor P_{2n-1} της f στο x_0 τάξης $2n - 1$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f(2n-1)}{(2n-1)!} \cdot (x - x_0)^{2n-1} \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

(ειδικότερα είναι σταθερό πολυώνυμο).

Αφού η $f^{(2n)}$ είναι συνεχής (ως διαφορίσιμη) και $f^{(2n)}(x_0) > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f^{(2n)}(x) > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι αυτό το δ υλοποιεί ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0, δηλαδή ότι για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$.

Θεωρούμε λοιπόν ένα $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $x \neq x_0$ και δείχνουμε ότι $f(x) \geq f(x_0)$ (η περίπτωση $x = x_0$ είναι προφανής). Σύμφωνα με τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor R_{2n-1}, υπάρχει ξ μεταξύ του x_0 και του x, τέτοιο ώστε

$$f(x) = P_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}\,.$$

Αφού το ξ βρίσκεται ανάμεσα στο x_0 και στο x και αφού $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε επίσης ότι $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Σύμφωνα με τα πιο πάνω ισχύει $f^{(2n)}(\xi) > 0$. Επίσης $(x - x_0)^{2n} > 0$ γιατί ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός. Επομένως

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} > 0\,, \quad \text{άρα } f(x) > f(x_0).$$

Άσκηση 22 (Taylor και σταθερή συνάρτηση - Απαιτητική). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0\,, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0\,, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $f'(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της f στο σημείο x_0.

Λύση - υποδείξεις.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο P_1 και το υπόλοιπο R_1 Taylor της f στο σημείο x_0 τάξης 1. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

ειδικότερα για κάθε $h \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$P_1(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h.$$

Σύμφωνα με τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor έχουμε ότι για κάθε $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x_0 και του $x_0 + h$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = P_1(x_0 + h) + R_1(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_0 + h - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2\,. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση έχουμε ότι

$$0 \leq f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 \leq f(x_0) + f'(x_0)h\,.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$f(x_0) + f'(x_0)h \geq 0 \quad \text{για κάθε } h \neq 0.$$

Αν ήταν $f'(x_0) \neq 0$ τότε θα υπήρχε κατάλληλη επιλογή $h \neq 0$ έτσι ώστε $f(x_0) + f'(x_0)h < 0$, πράγμα που αντιβαίνει στο πιο πάνω. Επομένως $f'(x_0) = 0$. Δεδομένου ότι το x_0 είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός προκύπτει ότι $f' = 0$ και άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Παρατήρηση. Η υπόθεση $f'' \leq 0$ μας λέει ότι η f είναι κοίλη. Με βάση αυτό μπορεί κανείς να διαπιστώσει με ένα πρόχειρο σχήμα ότι αν η f ήταν μη σταθερή τότε θα έπαιρνε αρνητικές τιμές.

Δυναμοσειρές

Άσκηση 23 (Ερωτήσεις Κατανόησης). Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\displaystyle\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Δίνεται μια δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (3, 8)$ και αποκλίνει για $x = 8$. Ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Λύση - υποδείξεις.

(i) Είναι **Σωστό** γιατί από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών η παράγωγος μιας δυναμοσειράς σε ένα ανοικτό διάστημα I είναι επίσης δυναμοσειρά στο I και επομένως παραγωγίζεται ξανά.

(ii) Είναι **Σωστό** γιατί τα μερικά αθροίσματα των δύο δυναμοσειρών διαφέρουν κατά ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, συγκεκριμένα διαφέρουν κατά $\displaystyle\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό s_x τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $s_x - \displaystyle\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$. Ισχύει και το αντίστροφο: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό t_x τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνει στον αριθμό $t_x + \displaystyle\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$.

Επομένως οι δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Όχι απαραίτητα. Ας πάρουμε τις δυναμοσειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ και $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$. Η πρώτη συγκλίνει ακριβώς για κάθε $x \in (-1, 1)$ ενώ η δεύτερη ακριβώς για κάθε $x \in [-1, 1)$. Άρα οι δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης $r = 1$ αλλά για $x = -1$ η μία συγκλίνει ενώ η άλλη όχι.

(iv) Το κέντρο της δυναμοσειράς είναι ο αριθμός $\dfrac{3+8}{2} = \dfrac{11}{2}$ και η ακτίνα σύγκλισης ο αριθμός $r = \dfrac{8-3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Εξήγηση: μια δυναμοσειρά είτε (α) θα συγκλίνει ακριβώς για ένα x (το κέντρο της δυναμοσειράς), είτε (β) θα συγκλίνει για τα x σε ένα διάστημα της μορφής $(c - r, c + r)$ και θα αποκλίνει για τα $x \notin [c - r, c + r]$ ενώ για τα $x = c - r, c + r$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, είτε (γ) θα συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

Από τα δεδομένα μας δεν βρισκόμαστε στις περιπτώσεις (α) και (γ). Επομένως είμαστε στη (β). Τότε το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το μέσο του μεγαλύτερου διαστήματος I στο εσωτερικό του οποίου έχουμε σύγκλιση ενώ η ακτίνα σύγκλισης είναι το μισό του μήκους του. Από τα δεδομένα μας το προηγούμενο I είναι το $(3, 8)$.

Άσκηση 24 (Αναγνώριση δυναμοσειράς). Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές a_n, $n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Λύση - υποδείξεις.

Στην πρώτη δυναμοσειρά έχουμε $a_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = 0$.

Στη δεύτερη: $a_n = \dfrac{1}{n!}$ και $c = 1$.

Σχετικά με την τρίτη δυναμοσειρά πρέπει να φέρουμε τους όρους μέσα στο άθροισμα στη μορφή $a_n \cdot (x-c)^n$. Υπολογίζουμε

$$2^{-n} \cdot (7x-1)^n = 2^{-n} \cdot 7^n \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n = \frac{7^n}{2^n} \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n.$$

Άρα $a_n = \dfrac{7^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = \dfrac{1}{7}$.

Τέλος στην τέταρτη δυναμοσειρά υπολογίζουμε

$$\frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n = \frac{1}{n+1} \cdot 5^n \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right)^n = \frac{5^n}{n+1} \cdot (x - (-3/5))^n.$$

Άρα $a_n = \dfrac{5^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ και $c = -\dfrac{3}{5}$.

Άσκηση 25 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης).

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 24 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Λύση - υποδείξεις.

(i) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου. Σχετικά με την πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ θεωρούμε $x \neq 0$. Τότε έχουμε

$$\left| \frac{3^{n+1} \cdot x^{n+1}}{3^n \cdot x^n} \right| = 3 \cdot |x|$$

Αν $3 \cdot |x| < 1$, ισοδύναμα $|x| < 1/3$ ή αλλιώς $x \in (-1/3, 1/3)$ τότε η σειρά συγκλίνει. Αν $3 \cdot |x| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/3, 1/3]$ η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = 1 \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = -1/3$ τότε $3^n \cdot x^n = (-1)^n \not\to 0$ άρα η σειρά αποκλίνει επίσης.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/3, 1/3)$.

(Πιο πάνω υποθέσαμε ότι $x \neq 0 =$ το κέντρο της δυναμοσειράς αλλά όπως έχουμε πει η δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα για $x =$ κέντρο.)

Περνάμε στη δεύτερη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ έχουμε

$$\left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-1)^n} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot |x-1| \longrightarrow 0 < 1.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προχωράμε στην τρίτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $7x-1 \neq 0$, ισοδύναμα $x \neq 1/7$ (που είναι το κέντρο της δυναμοσειράς) έχουμε

$$\left| \frac{2^{-(n+1)} \cdot (7x-1)^{n+1}}{2^{-n} \cdot (7x-1)^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot |7x-1|.$$

Προφανώς

$$\frac{1}{2} \cdot |7x-1| < 1 \iff |7x-1| < 2 \iff 7x \in (1-2, 1+2) \iff 7x \in (-1, 3) \iff x \in (-1/7, 3/7).$$

Άρα για $x \in (1/7, 3/7)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για τα x με $\frac{1}{2} \cdot |7x-1| > 1$, ισοδύναμα $x \notin [-1/7, 3/7]$ η σειρά αποκλίνει. Εξετάζουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Για $x = 3/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (3-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

και άρα η σειρά αποκλίνει.

Για $x = -1/7$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

που επίσης αποκλίνει. Ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι $(-1)^n \not\to 0$.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1/7, 3/7)$.

Σχόλιο: Για να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου δεν χρειάζεται να φέρουμε τη δυναμοσειρά στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Δηλαδή δεν απαιτείται να έχουμε λύσει πρώτα την Άσκηση 24. Βοηθάει όμως να αναγνωρίσουμε το κέντρο της δυναμοσειράς.

Τέλος θεωρούμε την τέταρτη δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -3/5$ (το κέντρο της δυναμοσειράς). Τότε

$$\left| \frac{(5x+3)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(5x+3)^n} \right| = \frac{n+1}{n+2} \cdot |5x+3| \longrightarrow 1 \cdot |5x+3| = |5x+3|.$$

Υπολογίζουμε

$$|5x+3| < 1 \iff 5x \in (-3-1, -3+1) \iff 5x \in (-4, -2) \iff x \in (-4/5, -2/5).$$

Οπότε για $x \in (-4/5, -2/5)$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $x \notin [-4/5, -2/5]$ αποκλίνει. Για $x = -2/5$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

που αποκλίνει (αρμονική σειρά). Ενώ για $x = -4/5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

που συγκλίνει από το Κριτήριο Leibniz. Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-4/5, -2/5)$.

(ii) Στην πρώτη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\sqrt{n+1} \cdot x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n} \cdot x^n} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| \longrightarrow \sqrt{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \frac{1}{2} \cdot |x|.$$

Έχουμε $1/2 \cdot |x| < 1 \iff |x| < 2 \iff x \in (-2, 2)$. Επομένως η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-2, 2)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [-2, 2]$. Για $x = 2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$$

και η σειρά αποκλίνει γιατί $\sqrt{n} \to \infty$. Για $x = -2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n}$$

που πάλι αποκλίνει γιατί $(-1)^n \cdot \sqrt{n} \not\to 0$. (Αν συνέκλινε στο 0 τότε και η απόλυτη τιμή της ακολουθίας θα συνέκλινε στο 0 που είναι άτοπο.)

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-2, 2)$.

Περνάμε στην επόμενη δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow |x| \cdot \frac{e}{e} = |x|$$

Οπότε για $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει ενώ για $|x| > 1$ αποκλίνει. Για $|x| = 1$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x|^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \neq 0.$$

Ειδικότερα η ακολουθία που βρίσκεται μέσα στη σειρά δεν συγκλίνει στο 0 και επομένως η σειρά αποκλίνει. Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in (-1, 1)$.

Στην επόμενη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$ έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$,

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \geq |x| \cdot (n+1) \longrightarrow \infty.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

Τέλος θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$. Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+5}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+5}}{x^n} \right| = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}} = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{n^2+2n+6}} \longrightarrow |x| \cdot \sqrt{1} = |x|.$$

Επομένως αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει και αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Για $x = 1$ έχουμε

$$\frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}} .$$

Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}$ και $b_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2+5}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+5}} \longrightarrow 1 > 0.$$

Επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση του κριτηρίου, που λέει ότι είτε και οι δύο σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν. Η $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ όμως αποκλίνει (αρμονική σειρά) επομένως και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $x = -1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5}} \ .$$

Η ακολουθία $(\sqrt{n^2+5})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η πιο πάνω σειρά συγκλίνει. (Δεν κάνει διαφορά που τα αθροίσματα ξεκινάνε από το 0.) Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$ συγκλίνει ακριβώς για $x \in [-1, 1)$.

Άσκηση 26 (Δυναμοσειρά Εκθετικής συνάρτησης). Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(ii) Βρείτε την παράγωγο f'. Τι παρατηρείτε;

(iii) Δείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Έστω $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \ \to 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

(ii) Από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών έχουμε

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f' = f$.

(iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{f(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = 0.$$

Επομένως η g είναι σταθερή συνάρτηση. (Θεώρημα Μέσης Τιμής.)

Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c θέτουμε $x = 0$ και έχουμε

$$f(0) = \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1.$$

Είναι γνωστό ότι $e^0 = 1$. Άρα $c = g(0) = 1$. Επομένως $\dfrac{f(x)}{e^x} = g(x) = 1$ και $f(x) = e^x$ για $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 27 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και υπόλοιπο Taylor). Με χρήση του υπολοίπου Taylor αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης καθώς και τον τύπο των πολυωνύμων Taylor της συνάρτησης ημίτονο (βλ. Άσκηση 11):

$$P_{2n+1}(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right).$$

Λύση - υποδείξεις.
Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$\sin x = P_{2n+1}(x) + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}.$$

Έχουμε

$$\left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Το τελευταίο όριο το βρήκαμε με το Κριτήριο του Λόγου:

$$\frac{x^{2(n+1)+2}}{(2(n+1)+2)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Παίρνοντας όριο $n \to \infty$ στην πιο πάνω ισότητα με το $\sin x$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin x &= \lim_{n\to\infty} P_{2n+1}(x) + \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \\
\implies \quad \sin x &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right) + 0 \\
\implies \quad \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+1)!} \cdot x^{2n+1} \ ,
\end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο για τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης ημίτονο που αναφέρεται στην εκφώνηση.

Άσκηση 28 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα I:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad x \neq -1, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3-x} \quad x \neq 3,$$

$$f_3(x) = \frac{x}{2+5x} \quad x \neq -\frac{2}{5}\ , \qquad f_4(x) = x \cdot \sin(x^2) \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έστω $x \neq 0$. Εκφράστε την παράσταση $x \cdot \sin(1/x)$ σε μορφή σειράς.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Σχετικά με την f_1 η ιδέα είναι να πάρουμε τη δυναμοσειρά της συνάρτησης $x \mapsto 1/(1-x)$ και να αντικαστατήσουμε το x με το $-x$. Για $x \in (-1,1)$ έχουμε επίσης $-x \in (-1,1)$, επομένως

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n.$$

Άρα $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n$ για $x \in (-1,1)$.

Σχετικά με την f_2 παρατηρούμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

Αν έχουμε $|x/3| < 1$, ισοδύναμα $|x| < 3$ τότε $\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$. Καταλήγουμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n \quad x \in (-3,3).$$

Στη συνάρτηση f_3 προχωρούμε ανάλογα. Πρώτα παρατηρούμε ότι $2+5x = 2\cdot(1-(-5/2)x)$, άρα θέλουμε να έχουμε $|-(5/2)x| = |(5/2)x| < 1$, ισοδύναμα $-1 < 5/2 \cdot x < 1$ ή αλλιώς $-2/5 < x < 2/5$. Επομένως

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{(1-(-5/2)\cdot x)} = \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{2}\cdot x\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{5^n}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{5^n}{2^{n+1}} \cdot x^{n+1} \quad x \in \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Σχετικά με τη συνάρτηση f_4 παίρνουμε τον τύπο για το ημίτονο και αντικαθιστούμε το x με το x^2. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το x,

$$\begin{aligned} f_4(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (x^2)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{4n+3} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Όπως και προηγουμένως με τη συνάρτηση f_4 παίρνουμε τον τύπο για το ημίτονο (που ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$) και αντικαθιστούμε το x με το $1/x$, όπου $x \neq 0$. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το x,

$$x \cdot \sin(1/x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{x^{2n}} \quad x \neq 0.$$

Σχόλιο. Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα δεν είναι δυναμοσειρά ως προς x γιατί οι δυνάμεις του x έχουν αρνητικό εκθέτη. Αυτού του είδους οι σειρές είναι γνωστές ως **σειρές Laurent** και χρησιμοποιούνται εκτενώς στη Μιγαδική Ανάλυση.

Άσκηση 29 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και παραγώγιση). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x|<1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε δυναμοσειρά σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα.

$$g_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1, \qquad g_2(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \quad x \neq 1,$$

$$g_3(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g_4(x) = \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση - υποδείξεις.
Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1 \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} \quad x \neq 1.$$

Επομένως

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' \quad x \neq -1 \qquad \text{και} \qquad g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'' \quad x \neq 1.$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 28 έχουμε $1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1) \cdot x^n$ για $|x| < 1$. Από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Όμοια βρίσκουμε

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα

$$g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^{n-2}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Σχετικά με την g_3 παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{και άρα} \qquad g_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παίρνουμε τον τύπο της δυναμοσειράς για την $1/(1+x)$ και αντικαθιστούμε το x με το x^2. Παρατηρούμε ότι $|x| < 1 \iff |x^2| < 1$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} g_3(x) = & -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x^2)^n\right)' \\ = & -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \dots\right)' \\ = & -\frac{1}{2} \cdot \left(-2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots + (-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1} + \dots\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2n\cdot x^{2n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{2n-1}
\end{aligned}
$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Τέλος σχετικά με τη συνάρτηση g_4 χρησιμοποιούμε τον δοσμένο τύπο για το ημίτονο sin και το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών. Αφού η συνάρτηση ημίτονο αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά σε όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει το ίδιο και για τη συνάρτηση συνημίτονο.

Άρα

$$
\begin{aligned}
\cos(x) = (\sin(x))' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}\right)'\\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} - \ldots\right)'\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n} - \ldots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 30. Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό.

Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να βρούμε την παράγωγό της.

Για ευκολία γράφουμε τη δυναμοσειρά αναλυτικά ως άπειρο άθροισμα

$$
f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} - \ldots .
$$

Έπειτα παραγωγίζουμε όρο προς όρο (Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών):

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n} - \ldots\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n} - \ldots . \tag{9}
\end{aligned}
$$

Από την άλλη μπορούμε να παραγωγίσουμε κατευθείαν σύμφωνα με τον τύπο που μας δίνεται στο Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών, προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}\\
&= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n} - \ldots . \tag{10}
\end{aligned}
$$

Από τις (9) και (10) παίρνουμε **δύο διαφορετικές εκφράσεις** για την παράγωγο $f'(x)$. (!)

Αυτές οι εκφράσεις είναι όντως διαφορετικές γιατί για $x = 0$ η (9) δίνει την τιμή 1 ενώ η (10) την τιμή 0.

16 Μπορούμε επίσης να δούμε ότι οι (9) και (10) διαφέρουν αφαιρώντας την δεύτερη από την
17 πρώτη και βλέποντας ότι η διαφορά τους είναι ίση με 1.

Λύση - υποδείξεις.

Το λάθος βρίσκεται στις γραμμές 8 και 9 του συλλογισμού:

$$\text{“ προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από } n=1\text{: } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} \text{ ”} .$$

Εξήγηση. Ο κανόνας που λέει να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από $n = 1$ **ισχύει όταν η δυναμοσειρά δίνεται στη μορφή** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (όταν το κέντρο είναι ίσο με 0). Αυτό μπορούμε να το κάνουμε γιατί η παράγωγος του $a_0 \cdot x^0 = a_0$ είναι ίση με 0 και επομένως μπορεί να παραληφθεί από το άθροισμα.

Αν η δυναμοσειρά όμως δίνεται σε διαφορετική μορφή τότε μπορεί να μη γίνεται να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από $n = 1$. Στη δοσμένη δυναμοσειρά f οι εκθέτες του x είναι ίσοι με $2n + 1$ και όχι με n, δηλαδή η δυναμοσειρά είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$, όπου $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. Αυτό σημαίνει ότι ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι $a_0 \cdot x$, η παράγωγος του οποίου είναι $a_0 = 1 \neq 0$. Άρα αν στην παράγωγο ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n = 1$ τότε παραλείπουμε τον όρο $a_0 = 1$ που δεν είναι σωστό. Η σωστή έκφραση για την παράγωγο είναι αυτή που δίνεται από την (9). Δηλαδή

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} .$$

Συμπέρασμα:

> Όταν είναι να παραγωγίσουμε δυναμοσειρά που **δεν είναι** στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, **είναι καλύτερα** να γράψουμε πρώτα τη σειρά αναλυτικά και μετά να παραγωγίσουμε όρο προς όρο.

Σχόλια. 1) Το ίδιο πρέπει να προσέξουμε όταν η δυναμοσειρά που δίνεται ξεκινά από $n = 1$ (ή γενικότερα από $n = n_0$). Μπορεί πάλι ο πρώτος της όρος να μην έχει μηδενική παράγωγο και επομένως η σειρά της παραγώγου θα ξεκινά πάλι από $n = 1$ (αντίστοιχα πάλι από $n = n_0$).

2) *Πώς θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα όπου ξεκινάμε από* $n = 1$ *στην παράγωγο της πιο πάνω δυναμοσειράς* f*;* Πρέπει να φέρουμε την f στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ για κατάλληλα επιλεγμένα b_n και μετά όντως έχουμε $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$. Αυτή όμως η μέθοδος είναι αρκετά δύσχρηστη και καλό είναι να αποφεύγεται.

3) Όλες οι άλλες γραμμές στον προηγούμενο συλλογισμό είναι σωστές. Ειδικότερα δεν υπάρχει πρόβλημα να γράφουμε για ευκολία μια δυναμοσειρά ως άπειρο άθροισμα όπως κάνουμε π.χ. στη γραμμή 3.

Ούτε υπάρχει πρόβλημα να αφαιρέσουμε το ένα άπειρο άθροισμα από το άλλο όπως κάνουμε στις γραμμές 14-15. **Πρέπει** όμως οι **σειρές να συγκλίνουν**. Αν δεν συνέκλιναν αυτό θα ήταν όντως πρόβλημα αλλά στην προκειμένη περίπτωση οι δυναμοσειρές έχουν άπειρη ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4) Δεν σημαίνει πως όποτε οι δυνάμεις του x δεν είναι της μορφής x^n θα έχουμε το ίδιο φαινόμενο. Για παράδειγμα αν πάρουμε τη σειρά

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \ldots$$

και παραγωγίσουμε τους όρους έναν προς έναν παίρνουμε ως αποτέλεσμα

$$g(x)' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 2nx^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots = -x + \frac{x^3}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} - \ldots$$

που είναι το ίδιο με το

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} .$$

Με άλλα λόγια σε αυτό το παράδειγμα μπορούμε όντως να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από $n = 1$ παραγωγίζοντας όρο προς όρο. Ο λόγος που μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι επειδή η παράγωγος του πρώτου όρου του αθροίσματος $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$ είναι 0. Αυτό όμως έτυχε στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Άσκηση 31 (Παράγωγος δυναμοσειράς τάξης m). Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq 1$ κάθε δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ που συγκλίνει για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα I έχει παράγωγο m-τάξης στο I, η οποία δίνεται από του τύπους

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \cdots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-m+1) \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-m} \qquad x \in I. \end{aligned}$$

Λύση - υποδείξεις.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η ισότητα των δύο δυναμοσειρών

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \cdots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-m+1) \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-m}$$

προκύπτει εύκολα αντικαθιστώντας $k = n - m - 1$, το κάτω όριο από $k = 0$ γίνεται $n = m + 1$. Επομένως δείχνουμε μόνο την ισότητα με την πρώτη δυναμοσειρά.

Αυτό γίνεται με επαγωγή στο m. Για $m = 1$ το ζητούμενο είναι σαφές από το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \cdot a_{1+k} \cdot (x-c)^k.$$

Θεωρούμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιο $m \geq 1$ και το δείχνουμε με το $m + 1$.

Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $x \in I$, όπου I ανοικτό διάστημα. Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \left(f^{(m)}\right)'(x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \cdots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k\right)' \quad \text{(Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \cdots \cdot (1+k) \cdot k \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^{k-1} \end{aligned}$$

(Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k+1)\cdot(m-1+k+1)\cdot\dots\cdot(1+k+1)\cdot(k+1)\cdot a_{m+k+1}\cdot(x-c)^k$$

(αντικαθιστούμε το k με το $k+1$, το κάτω όριο ξεκινά από το 0)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} ((m+1)+k)\cdot(m+k)\cdot\dots\cdot(2+k)\cdot(1+k)\cdot a_{(m+1)+k}\cdot(x-c)^k.$$

Άσκηση 32 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και ολοκλήρωση). Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n, \quad |x|<1.$$

Λύση - υποδείξεις.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x|<1$ έχουμε

$$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n.$$

Από το Θεώρημα Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών προκύπτει

$$\ln(1+x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n\cdot x^n dx\right)+c = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)+c$$

για κάποιο $c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ έχουμε

$$0=\ln(1+0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{0^{n+1}}{n+1}\right)+c = 0+c=c.$$

Άρα για κάθε $|x|<1$, ισχύει

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε αντικαταστήσει το n με το $n-1$.

Άσκηση 33 (Εύρεση πολυωνύμων Taylor). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x\cdot e^{-x}, \qquad g(x)=e^{x^2}+\cos x \quad x\in\mathbb{R}.$$

Λύση - υποδείξεις.

Σε αντίθεση με την Άσκηση 27 όπου υπολογίσαμε τα πολυώνυμα Taylor στο 0 με βάση τις παραγώγους στο 0, τώρα θα αναπτύξουμε τις συναρτήσεις σε δυναμοσειρές με κέντρο το 0 με βάση τα γνωστά αναπτύγματα. Όπως έχουμε πει **τα πολυώνυμα Taylor στο 0 είναι τα μερικά αθροίσματα των δυναμοσειρών**.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+1}. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο Taylor P_n στο 0 είναι το μερικό άθροισμα μέχρι τη n-οστή δύναμη του x. Άρα πρέπει να πάρουμε το μερικό άθροισμα μέχρι το $n-1$. Επομένως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^{k+1} = x - \frac{x^2}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n.$$

Για την g, χρησιμοποιούμε τα γνωστά αναπτύγματα των e^x και $\cos x$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι το άθροισμα των συγκλινουσών σειρών δύο ακολουθιών είναι η σειρά του αθροίσματος των δύο ακολουθιών.

Αν συμβολίσουμε με Q_m τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης g, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$Q_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) \cdot x^{2k}.$$

Για το $Q_{2n+1}(x)$ παρατηρούμε ότι στο ανάπτυγμα της g δεν υπάρχουν δυνάμεις του x με περιττό εκθέτη ή αλλιώς ο συντελεστής των δυνάμεων του x με περιττό εκθέτη είναι 0. Επομένως $Q_{2n+1}(x) = Q_{2n}(x)$, για κάθε n, x.

Άσκηση 34 (Εύρεση σειράς MacLaurin και παραγώγων ανώτερης τάξης στο κέντρο).

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Βρείτε τις παραγώγους $f^{(6)}(0)$, $g^{(6)}(0)$, $h^{(6)}(0)$ και $h^{(7)}(0)$.

Λύση - υποδείξεις.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο ανάπτυξης σε δυναμοσειρά της συνάρτησης e^x και έχουμε

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n$$

$$g(x) = x \cdot e^{-x} = x \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$$

$$h(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}.$$

Για την εύρεση των παραγώγων έκτης τάξης στο 0 χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για x σε κάποιο ανοικτό διάστημα I κέντρου 0. Πιο απλά:

$$\boxed{\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \text{ ο συντελεστής του } x^n \text{ στο ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το } 0.}$$

Επομένως

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \text{συντελεστής του } x^6 = \frac{(-1)^6}{6!} = \frac{1}{6!}\ .$$

Άρα $f^{(6)}(0) = 1$.

Σχετικά με την τιμή $g^{(6)}(0)$ πρέπει να προσέξουμε ότι **δεν είναι σωστό** να πάρουμε την τιμή που προκύπτει από το $\frac{(-1)^n}{n!}$ για $n = 6$ και να την πολλαπλασιάσουμε με $6!$. Αυτό συμβαίνει γιατί για $n = 6$ στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$ θα πάρουμε το συντελεστή του x^7.

1ος τρόπος (ο πιο απλός): Για να βρούμε την τιμή $g^{(6)}(0)/6!$ παίρνουμε τον **συντελεστή του** x^6 στο ανάπτυγμα της g. Στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$ το x^6 επιτυγχάνεται για $n = 5$, οπότε

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = \frac{(-1)^5}{5!} \quad \text{και άρα} \quad g^{(6)}(0) = \frac{(-1)^5}{5!} \cdot 6! = -6.$$

2ος τρόπος: Φέρνουμε το ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$ στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ για κάποια b_n, $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} \\ &= \qquad \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \ldots \\ &= 0 \cdot x^0 + \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \ldots. \end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε $b_0 = 0$ και $b_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}$. Τότε

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \cdot x^0 + \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \ldots \\ &= b_0 \cdot x^0 + b_1 \cdot x^1 + \cdots + b_{n+1} \cdot x^{n+1} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = b_6 = \frac{(-1)^5}{5!} \quad \text{και επομένως} \quad g^{(6)}(0) = \frac{(-1)^5}{5!} \cdot 6! = -6.$$

Για την τιμή $h^{(6)}(0)$ παίρνουμε τον συντελεστή του x^6 στο ανάπτυγμα της h (ακολουθούμε τον πρώτο από τους πιο πάνω τρόπους). Το x^6 επιτυγχάνεται για $n = 3$ στο ανάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}$, άρα

$$\frac{h^{(6)}(0)}{6!} = \frac{(-1)^3}{3!} \quad \text{και άρα} \quad h^{(6)}(0) = \frac{(-1)^3}{3!} \cdot 6! = -4 \cdot 5 \cdot 6 = -120.$$

Τέλος για την τιμή $h^{(7)}(0)$ παρατηρούμε ότι στο πιο πάνω ανάπτυγμα προκύπτουν μόνο δυνάμεις με άρτιο εκθέτη. Επομένως η δύναμη x^7 δεν εμφανίζεται ή αλλιώς ο συντελεστής του x^7 είναι 0. Συνεπώς

$$\frac{h^{(7)}(0)}{7!} = 0 \quad \text{και} \quad h^{(7)}(0) = 0.$$