Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Πολυώνυμα Taylor

Άσκηση 1 (Βέλτιστη γραμμική προσέγγιση). Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(a,b)$. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_\lambda(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0),\quad x\in(a,b).$$

Δείξτε ότι αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ με

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g_\lambda(x)}{x-x_0}=0,$$

όπου η g_λ είναι όπως πιο πάνω, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 και μάλιστα $f'(x_0)=\lambda$. (Επομένως η γραμμικοποίηση $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ είναι η μοναδική "καλή γραμμική" προσέγγιση της f κοντά στο x_0.)

Άσκηση 2 (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς $(1,0002)^{50}$ και $\sqrt[3]{1,009}$.

Άσκηση 3 (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό $\tan 42^\circ$, δηλαδή για τον $\tan\frac{7\pi}{30}$.

Άσκηση 4 (Εκθετική Συνάρτηση - Παράγωγοι στο $x_0=0$). Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=e^x$. Δείξτε ότι $f^{(n)}(0)=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Άσκηση 5 (Πολυνώνυμα Taylor Εκθετικής Συνάρτησης). Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=e^x$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της f τάξης $n\in\mathbb{N}$ στο σημείο $x_0=0$ δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση 6 (Παράγωγοι Συνάρτησης Λογαρίθμου στο $x_0=1$). Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(-1,1)\to\mathbb{R}$:

$$g(x)=\frac{1}{1+x}\ ,\qquad f(x)=\ln(1+x).$$

Δείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\ ,\quad x\in(-1,1),$$

καθώς και ότι

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

για κάθε $k\geq 1$.

Άσκηση 7 (Πολυνώνυμα Taylor Λογαρίθμου). Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της συνάρτησης

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x)$$

τάξης n στο σημείο 0 δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} .$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.

Άσκηση 8 (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης). Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

(1)

$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f^{(m)}(x)$ είναι η παράγωγος της f τάξης $m \in \mathbb{N}$. (Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f.) Συμπεράνετε ότι

(2)
$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Άσκηση 9 (Πολυώνυμα Taylor ημιτόνου). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του ημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \\ 0, & k = 2j. \end{cases}$$

Άσκηση 10 (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης). Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες με την Άσκηση 8 ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου cos.

Άσκηση 11 (Πολυώνυμα Taylor συνημιτόνου). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης του συνημιτόνου με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου:

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Άσκηση 12 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor).

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Άσκηση 13 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!}\right) \right| \le \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 14 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι
$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\right| < 10^{-2}.$$

Άσκηση 15 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Τι τάξης πολυώνυμο Taylor κέντρου 0 χρειάζεται, ώστε να προσεγγίσουμε το $\sin 1$ με σφάλμα (κατά απόλυτη τιμή) μικρότερο από $0,001$; Ποιος είναι ο τύπος αυτού του πολυωνύμου;

Άσκηση 16 (Εύρεση διαστήματος προσέγγισης). Βρείτε ένα ανοικτό διάστημα I με κέντρο το 0 έτσι ώστε για κάθε $x \in I$ να ισχύει
$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| < 10^{-4}.$$

Άσκηση 17 (Taylor και φραγμένη συνάρτηση). Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη και $f(0) = f'(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| \leq 1$ ισχύει
$$|f''(x)| \leq 1.$$
Δείξτε ότι για κάθε $|x| \leq 1$ έχουμε
$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\,.$$

Άσκηση 18 (Taylor και ανισώσεις). Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα Taylor της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1+x}$ στο 0 μέχρι 3ης τάξης και να δείξετε ότι
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}\,, \text{ για κάθε } x > 0\,.$$

Άσκηση 19 (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι
$$0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}\,, \text{ για κάθε } x > 0\,.$$

Άσκηση 20 (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, για κάθε $x \in [-\pi, 0]$.

Άσκηση 21 (Taylor και τοπικό ελάχιστο - Απαιτητική). Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη και
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0\,,$$
για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $f^{(2n)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της f καθώς και ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση h, αν $h(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $h(x) > 0$.

Άσκηση 22 (Taylor και σταθερή συνάρτηση - Απαιτητική). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με
$$f(x) \geq 0\,, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$
Υποθέτουμε ότι
$$f''(x) \leq 0\,, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$
Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $f'(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της f στο σημείο x_0.

Δυναμοσειρές

Άσκηση 23 (Ερωτήσεις Κατανόησης). Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

(i) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Σωστό ή Λάθος;

(ii) Οι δυναμοσειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\displaystyle\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$. Σωστό ή Λάθος;

(iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;

(iv) Δίνεται μια δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (3, 8)$ και αποκλίνει για $x = 8$. Ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Άσκηση 24 (Αναγνώριση δυναμοσειράς). Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές a_n, $n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Άσκηση 25 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης).

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 24 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Άσκηση 26 (Δυναμοσειρά Εκθετικής συνάρτησης). Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(ii) Βρείτε την παράγωγο f'. Τι παρατηρείτε;

(iii) Δείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 27 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και υπόλοιπο Taylor). Με χρήση του υπολοίπου Taylor αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης καθώς και τον τύπο των πολυωνύμων Taylor της συνάρτησης ημίτονο (βλ. Άσκηση 11):

$$P_{2n+1}(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right).$$

Άσκηση 28 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad |x|<1 \quad \text{και} \quad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} \quad x\in\mathbb{R}.$$

(i) Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα I:

$$f_1(x)=\frac{1}{1+x} \quad x\neq -1, \qquad f_2(x)=\frac{1}{3-x} \quad x\neq 3,$$

$$f_3(x)=\frac{x}{2+5x} \quad x\neq -\frac{2}{5}\ , \qquad f_4(x)=x\cdot\sin(x^2) \quad x\in\mathbb{R}.$$

(ii) Έστω $x\neq 0$. Εκφράστε την παράσταση $x\cdot\sin(1/x)$ σε μορφή σειράς.

Άσκηση 29 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και παραγώγιση). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad |x|<1 \quad \text{και} \quad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε δυναμοσειρά σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα.

$$g_1(x)=\frac{1}{(1+x)^2} \quad x\neq -1, \qquad g_2(x)=\frac{1}{(1-x)^3} \quad x\neq 1,$$

$$g_3(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2} \quad x\in\mathbb{R}, \qquad g_4(x)=\cos(x) \quad x\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση 30. Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό.

Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Θέλουμε να βρούμε την παράγωγό της.

Για ευκολία γράφουμε τη δυναμοσειρά αναλυτικά ως άπειρο άθροισμα

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}-\ldots.$$

Έπειτα παραγωγίζουμε όρο προς όρο (Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n}-\ldots \\ &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}-\ldots. \qquad (3)\end{aligned}$$

Από την άλλη μπορούμε να παραγωγίσουμε κατευθείαν σύμφωνα με τον τύπο που μας δίνεται στο Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών, προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n=1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n} \\ &= -\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}-\ldots. \qquad (4)\end{aligned}$$

Από τις (9) και (10) παίρνουμε **δύο διαφορετικές εκφράσεις** για την παράγωγο $f'(x)$. (!)

Αυτές οι εκφράσεις είναι όντως διαφορετικές γιατί για $x = 0$ η (9) δίνει την τιμή 1 ενώ η (10) την τιμή 0.

Μπορούμε επίσης να δούμε ότι οι (9) και (10) διαφέρουν αφαιρώντας την δεύτερη από την πρώτη και βλέποντας ότι η διάφορά τους είναι ίση με 1.

Άσκηση 31 (Παράγωγος δυναμοσειράς τάξης m). Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq 1$ κάθε δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ που συγκλίνει για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα I έχει παράγωγο m-τάξης στο I, η οποία δίνεται από του τύπους

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k)\cdot(m-1+k)\cdot\dots\cdot(1+k)\cdot a_{m+k}\cdot(x-c)^k \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-m+1)\cdot a_n\cdot(x-c)^{n-m} \qquad x \in I. \end{aligned}$$

Άσκηση 32 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και ολοκλήρωση). Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Άσκηση 33 (Εύρεση πολυωνύμων Taylor). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x\cdot e^{-x}, \qquad g(x) = e^{x^2} + \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 34 (Εύρεση σειράς MacLaurin και παραγώγων ανώτερης τάξης στο κέντρο).

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x\cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Βρείτε τις παραγώγους $f^{(6)}(0)$, $g^{(6)}(0)$, $h^{(6)}(0)$ και $h^{(7)}(0)$.