Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Εξακρίβωση συνέχειας-ασυνέχειας). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 3 \\ -x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Δείξτε τα εξής:

(i) Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο 3.

(ii) Για κάθε $x \neq 3$ η f είναι συνεχής στο x.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 3 αρκεί να **βρούμε** μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \to 3$ και $f(x_n) \not\to f(3)$.

Επιλέγουμε $x_n = 3 + 1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n > 3$ και άρα $f(x_n) = \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)^2 + 1$ για κάθε $n \geq 1$. Έχουμε

$$\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \longrightarrow (3+0)^2 + 1 = 10.$$

Από την άλλη $f(3) = -3$. Επομένως $f(x_n) \not\to f(3)$.

(ii) Έστω $x \neq 3$. Από την Αρχή Μεταφοράς αρκεί να δείξουμε ότι **για κάθε** ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \to x$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

Θεωρούμε αρχικά ότι $x > 3$. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία με $x_n \to x$. Αφού $x > 3$ θα έχουμε $x_n > 3$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δείτε το πιο κάτω σχήμα:

Τότε $f(x_n) = x_n^2 + 1$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και επομένως $f(x_n) \to x_n^2 + 1 \to x^2 + 1 = f(x)$.

Η περίπτωση $x < 3$ αντιμετωπίζεται ομοίως. Απλώς παρατηρούμε ότι αν $x_n \to x$ θα έχουμε $x_n < 3$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2 (Αδυναμία Συνεχούς Επέκτασης). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ δεν έχει συνεχή επέκταση στο 0, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) = 1/x$ για κάθε $x \neq 0$, η F δεν είναι συνεχής στο 0.

Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F|(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = f$. Παίρνουμε την ακολουθία $x_n = 1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \to 0$ και $F(x_n) = f(x_n) = n \to +\infty$. Αφού $F(0) \in \mathbb{R}$ έχουμε $F(x_n) \not\to F(0)$.

Επομένως υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$ και $F(x_n) \not\to F(0)$. Από την Αρχή Μεταφοράς η F δεν είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 3 (Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δεν ισχύει στους ρητούς). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : f(x) = x^2 - 2$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση και εξετάστε αν ισχύει η ακόλουθη πρόταση: για κάθε $a, b, q \in \mathbb{Q}$ με $a < b$, αν το q είναι γνήσια ανάμεσα στο $f(a)$ και στο $f(b)$ τότε υπάρχει $p \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ με $f(p) = q$.

Λύση - υποδείξεις.

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής θεωρούμε $x \in \mathbb{Q}$ και ακολουθία ρητών αριθμών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \to \mathbb{Q}$. Από τις ιδιότητες του ορίου ακολουθίας έχουμε $x_n^2 \to x^2$ και $x_n^2 - 2 \to x^2 - 2$, δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$. Άρα η f είναι συνεχής στο x.

Δείχνουμε ότι η f δεν ικανοποιεί την πιο πάνω πρόταση. Παίρνουμε $a = -2, b = 3$ και $q = 0$. Τότε

$$f(0) = -2 < 0 < f(3) = 7, \quad \text{δηλαδή} \quad f(a) < q < f(b).$$

Αν υπήρχε $p \in \mathbb{Q} \cap (a, b) = \mathbb{Q} \cap (0, 3)$ με $f(p) = q = 0$, τότε $p^2 = 2$ και άρα $p = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, άτοπο.

Σχόλιο. Αυτή η άσκηση μας λέει ότι το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής **δεν ισχύει** για τους ρητούς αριθμούς ή ακριβέστερα για την τετράδα $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$. Δεδομένου ότι το Αξίωμα Πληρότητας είναι το μοναδικό από τα αξιώματα που έχουμε δεχθεί, το οποίο διακρίνει την τετράδα $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ από την $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, προκύπτει ότι το **Αξίωμα Πληρότητας χρησιμοποιείται ουσιαστικά σε οποιαδήποτε απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής**.

Άσκηση 4 (Συνέχεια συνάρτησης σε μεμονωμένο σημείο). Θεωρούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε την $f : [0, 1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0, 1], \\ \\ 9856792783456124918513, & x = 2. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[0, 1] \cup \{2\}$ με $x_n \to 2$. Τότε $x_n = 2$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. (Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon = 1$.)

Επομένως $f(x_n) = f(2)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $f(x_n) \to f(2)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο 2. Παρατηρήστε ότι δεν παίζει κανέναν ρόλο η g ούτε και η τιμή της f στο 2.

Άσκηση 5 (Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(x) = \sqrt{|\sin x|}.$$

Βρείτε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $h = g \circ f$.

(ii) Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι επίσης συνεχής, όπου τα X, Y και Z είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Παίρνουμε $f : \mathbb{R} \to [0, \infty) : f(x) = |\sin x|$ και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R} : g(y) = \sqrt{y}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|\sin x|) = \sqrt{|\sin x|} = h(x).$$

Άρα $h = g \circ f$.

Σχόλιο: Όταν σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τοποθετούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της στον οριζόντιο άξονα που δηλώνεται συνήθως με $x'x$ και γι' αυτό έχει επικρατήσει κατά κάποιο τρόπο η χρήση του συμβόλου x για να δηλώσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της. Στην περίπτωση της πιο πάνω g θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή πάλι με x, αλλά είναι πιο εύκολο στην κατανόηση να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο σύμβολο, π.χ. το y. Απλώς πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην περίπτωση που μας ζητηθεί να σχεδιάσουμε τη γραφική παράστασή της. Τότε το y, δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή, πρέπει να τοποθετηθεί στον οριζόντιο άξονα.

Γενικά δεν υπάρχει κάποιος μαθηματικός λόγος που να μας *επιβάλλει* τη χρήση ενός συγκεκριμένου συμβόλου για να δηλώσουμε μια μεταβλητή, θα μπορούσαμε π.χ. να είχαμε $g(\natural) = \sqrt{\natural}$

για κάθε $\natural \in [0, \infty)$. Φυσικά *δεν* μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύμβολο στο οποίο έχουμε ήδη αποδώσει το νόημα *κάποιου άλλου* μαθηματικού αντικειμένου που έχουμε ήδη ορίσει, π.χ. δεν θα μπορούσαμε να είχαμε τα $\emptyset$, ∞ στη θέση του $\natural$.

(ii) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω $x \in X$ και μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του X με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $h(x_n) \to h(x)$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x και $x_n \to x$, έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς ότι $f(x_n) \to f(x)$. Η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_n = f(x_n)$ για κάθε $n \geq 1$, αποτελείται από στοιχεία του Y και ικανοποιεί $y_n \to y$ όπου $y = f(x) \in Y$. Αφού η g είναι συνεχής στο y από την Αρχή Μεταφοράς έχουμε $g(y_n) \to g(y)$. Άρα

$$h(x_n) = (g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \;\longrightarrow\; g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x).$$

Επαναλαμβάνουμε μια από τις ασκήσεις από προηγούμενο φυλλάδιο (σε μια ελαφρώς πιο ισχυρή μορφή), καθώς είναι χρήσιμη στη συνέχεια.

Άσκηση 6 (Πυκνότητα ρητών-αρρήτων και σύγκλιση ακολουθίας). Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ρητούς και από άρρητους αριθμούς αντίστοιχα έτσι ώστε $q_n \to x$ και $x_n \to x$.

Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $a < b$ υπάρχει ρητός q και άρρητος y με $a < q < b$ και $a < y < b$.

Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n \geq 1$. Εφαρμόζουμε την υπόδειξη στους πραγματικούς αριθμούς $x - 1/n < x + 1/n$. Τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός q_n με $x - 1/n < q_n < x + 1/n$ και ένας άρρητος x_n με $x - 1/n < x_n < x + 1/n$.

Αφού το n είναι τυχαίο έχουμε δύο ακολουθίες $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ρητούς και άρρητους αριθμούς αντίστοιχα. Προφανώς $x \pm 1/n \to x$ και άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $q_n \to x$ και $x_n \to x$.

Άσκηση 7 (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Υποθέτουμε ότι η $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και ότι $f(q) = 0$ για κάθε ρητό αριθμό $q \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Λύση - υποδείξεις.

Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε λόγω της πυκνότητας των ρητών υπάρχει ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $q_n \in \mathbb{Q}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} q_n = x\,.$$

Αφού η f είναι συνεχής έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς ότι $f(q_n) \to f(x)$.

Από την άλλη $f(q_n) = 0$ γιατί $q_n \in \mathbb{Q}$ άρα $f(q_n) \to 0$. Από τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι $f(x) = 0$.

Άσκηση 8 (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(q) = q^2$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Υπολογίστε την τιμή $f(\sqrt{2})$.

Λύση - υποδείξεις.

Από την πυκνότητα των ρητών αριθμών υπάρχει ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}$ με $q_n \to \sqrt{2}$. Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς ότι $f(q_n) \to f(\sqrt{2})$.

Επίσης $f(q_n) = q_n^2$ γιατί $q_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $f(\sqrt{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n^2$. Από την άλλη $q_n \to \sqrt{2}$, άρα $q_n^2 \to (\sqrt{2})^2 = 2$. Από τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι $f(\sqrt{2}) = 2$.

Άσκηση 9 (Διατήρηση προσήμου τοπικά). Έστω συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) > 0$.

Υπόδειξη. Για την επίλυση με βάση την Αρχή Μεταφοράς πρέπει να χρησιμοποιηθεί η απαγωγή σε άτοπο.

Λύση - υποδείξεις.

Έστω προς άτοπο ότι δεν συμβαίνει το ζητούμενο. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ έτσι ώστε $f(x_\delta) \leq 0$. Εφαρμόζουμε το τελευταίο για $\delta = 1/n$ και βρίσκουμε $x_n \in (x_0-1/n, x_0+1/n)$ έτσι ώστε $f(x_n) \leq 0$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Αυτό δίνει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο x_0 και για την οποία ισχύει $f(x_n) \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n \in (a,b)$ για κάθε n, αλλιώς αντί για $\delta = 1/n$ παίρνουμε $\delta = 1/(n+n_0)$ για ένα αρκετά μεγάλο n_0 έτσι που το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να περιέχεται στο (a,b).)

Από την Αρχή Μεταφοράς έχουμε $f(x_n) \to f(x_0)$ και αφού $f(x_n) \leq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, προκύπτει ότι $f(x_0) \leq 0$, άτοπο.

Σχόλιο: Στα συνηθισμένα παραδείγματα μια συνάρτηση είναι συνεχής "σχεδόν σε όλα τα σημεία" του πεδίου ορισμού της. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις με "πάρα πολλά" σημεία ασυνέχειας:

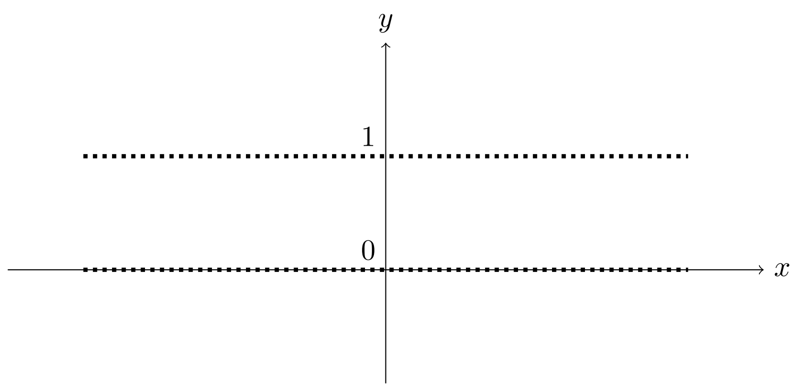
Άσκηση 10 (Συνάρτηση Dirichlet). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας!

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Dirichlet μπορούμε να τη σχεδιάσουμε μόνο κατά προσέγγιση.



Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε ένα $x \in \mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \to x$ και $f(x_n) \not\to f(x)$.

1η περίπτωση: $x \in \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 1$. Από την Άσκηση 6 υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από άρρητους αριθμούς με $x_n \to x$. Αφού $x_n \notin \mathbb{Q}$ θα έχουμε $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, επομένως $f(x_n) \not\to 1 = f(x)$.

2η περίπτωση: $x \notin \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 0$. Από την Άσκηση 6 υπάρχει ακολουθία $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ρητούς αριθμούς με $q_n \to x$. Αφού $q_n \in \mathbb{Q}$ θα έχουμε $f(q_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$, επομένως $f(q_n) \not\to 0 = f(x)$.

Άσκηση 11. Δείξτε ότι η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$.

Λύση - υποδείξεις.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R} : f(x) = \cos(x^2) - x$. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0 \quad \text{και} \quad f(\sqrt{\pi/2}) = \cos(\pi/2) - \sqrt{\pi/2} = -\sqrt{\pi/2} < 0.$$

Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει ένα $\xi \in (0, \pi/2)$ με $f(\xi) = 0$, δηλαδή $\cos(\xi^2) = \xi$.

Σχετικά με τη μοναδικότητα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$. Αν έχουμε $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^2 < x_2^2$ και άρα $\cos(x_2^2) < \cos(x_1^2)$. Επομένως

$$f(x_2) = \cos(x_2^2) - x_2 < \cos(x_1^2) - x_2 < \cos(x_1^2) - x_1 = f(x_1)$$

και άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$. Ειδικότερα η f είναι $1-1$ σε αυτό το διάστημα. Αν έχουμε λοιπόν $\cos(x^2) = x$ για κάποιο $x \in [0, \pi/2]$, τότε $f(x) = 0 = f(\xi)$ και άρα $x = \xi$. Με άλλα λόγια η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει μοναδική λύση στο $[0, \pi/2]$.

Σχόλιο: Μπορεί να αποδειχθεί ότι η η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει μοναδική λύση σε όλο το $\mathbb{R}$ ως εξής. Αν $x > \pi/2$ τότε $x > 1$ και άρα $\cos(x^2) - x < \cos(x^2) - 1 < 0$. Αν $x < -\pi/2$ τότε $x < -1$ και άρα $\cos(x^2) - x > -1 - x > 0$. Τέλος αν $x \in [-\pi/2, 0)$ τότε $\cos(x^2) > 0 > x$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\cos(x^2) \neq x$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (\pi/2, +\infty)$.

Άσκηση 12 (Διερεύνηση ορίου). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x < 0. \end{cases}.$$

Εξετάστε αν υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τα όρια των πιο πάνω συναρτήσεων όταν το x τείνει στο 0 και αν ναι να υπολογίσετε το εν λόγω όριο.

Λύση - υποδείξεις.
Σχετικά με την f, θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x_n^2 \to 0$ και $f(x_n) = 1/x_n^2 \to \infty$, όπου στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε ότι $x_n^2 \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Σχετικά με τη g παίρνουμε τις ακολουθίες $x_n = 1/n$ και $y_n = -1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ καθώς και $x_n, y_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την άλλη $g(x_n) = n^2 \to +\infty$ ενώ $g(y_n) = -n^2 \to -\infty$. Άρα δεν υπάρχει το όριο της g όταν το x τείνει στο 0.

Άσκηση 13 (Όριο συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου στα $\pm\infty$). Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τα όρια των συναρτήσεων $\cos(x)$, $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και όμοια όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Λύση - υποδείξεις.
Για τη συνάρτηση του συνημιτόνου παίρνουμε τις ακολουθίες $x_n = 2\pi n$ και $y_n = 2\pi n + \pi/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $x_n \to \infty$ και $y_n \to \infty$. Από την άλλη $\cos(x_n) = 1$ και $\cos(y_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \to \infty} \cos(x)$. Για το όριο όταν το x τείνει στο $-\infty$ θεωρούμε τις ακολουθίες $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(-y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ οι οποίες συγκλίνουν στο $-\infty$. Ισχύει $\cos(-x_n) = \cos(x_n) = 1$ και $\cos(-y_n) = \cos(y_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \to -\infty} \cos(x)$.

Το συμπέρασμα για τη συνάρτηση του ημιτόνου προκύπτει με τον ίδιο τρόπο –και μάλιστα με τις ίδιες ακολουθίες.

Άσκηση 14 (Ιδιότητες ορίου συνάρτησης). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δείξτε ότι αν $\lim_{x \to b} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \to b} g(x) = \ell_2$, όπου $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x \to b} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2 .$$

Λύση - υποδείξεις.

Χρησιμοποιούμε την Αρχή Μεταφοράς για όρια. Θεωρούμε μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A για την οποία ισχύει $x_n \to b$ και $x_n \neq b$ για κάθε $n \geq 1$. Αφού $\lim_{x\to b} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to b} g(x) = \ell_2$ έχουμε $f(x_n) \to \ell_1$ και $g(x_n) \to \ell_2$. Επομένως

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to \ell_1 + \ell_2.$$

Άρα $\lim_{x\to b}[f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$.

Άσκηση 15 (Όριο συνάρτησης και άπειρο). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x\to b} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

(ii) Αν $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x\to b} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

Μπορείτε να πάρετε δεδομένα τα αντίστοιχα αποτελέσματα για ακολουθίες.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A με $x_n \to b$ και $x_n \neq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεσή μας έχουμε $f(x_n) \to +\infty$ και $g(x_n) \to +\infty$. Επιπλέον από τις ιδιότητες των ακολουθιών προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = +\infty.$$

Άρα $\lim_{x\to b} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

(ii) Όμοια με το (i).

Άσκηση 16 (Όρια πολυωνύμων).

(i) Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$.

Υπόδειξη: Γράψτε το πολυώνυμο ως γινόμενο $x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)$.

(ii) Γενικότερα δείξτε ότι αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι θετικός άρτιος τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι περιττός τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

Λύση - υποδείξεις.

(i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}(x^3 - 3x^2 + 1) &= \lim_{x\to\infty}\left[x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)\right] = \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to\infty}(1 - 3/x + 1/x^3) \\ &= \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - 3 \cdot 0 + 0) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty, \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim_{x\to\infty} 1/x^k = 0$ για κάθε $k \geq 1$.

Σχετικά με τα υπόλοιπα ερωτήματα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$p(x) = x^k \cdot \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^k}\right).$$

Ισχύει

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right)=a_k+0+\cdots+0=a_k.$$

Άρα από τους γνωστούς κανόνες

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}x^k\cdot\lim_{x\to\infty}\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^k}\right)=a_k\cdot\lim_{x\to\infty}x^k.$$

(ii) Από τον κανόνα $\infty\cdot\infty=\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=\infty$ και από τα προηγούμενα έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=a_k\cdot\lim_{x\to\infty}x^k=a_k\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k>0\\ -\infty, & \text{αν } a_k<0.\end{cases}$$

(iii) Από τον κανόνα $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=\infty$ για θετικό άρτιο αριθμό k, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=a_k\cdot\lim_{x\to-\infty}x^k=a_k\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k>0\\ -\infty, & \text{αν } a_k<0.\end{cases}$$

(iv) Από τους κανόνες $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$ και $(-\infty)\cdot\infty=-\infty$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to\infty}x^k=-\infty$ για περιττό αριθμό k. Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=a_k\cdot\lim_{x\to-\infty}x^k=a_k\cdot(-\infty)=\begin{cases}\infty, & \text{αν } a_k<0\\ -\infty, & \text{αν } a_k>0.\end{cases}$$

Άσκηση 17 (Κανόνας de L' Hospital). Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\ell_1=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{5x^2+4x}$$

$$\ell_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{x^2+1}$$

$$\ell_3=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$$

Λύση - υποδείξεις.
Στο πρώτο όριο έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞ (Άσκηση 16). Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες. Ελέγχουμε $(5x^2+4x)'=10x+4\neq0$ για κάθε $x>0$. (Είναι αναγκαίο η παράγωγος του παρονομαστή να μην μηδενίζεται στο διάστημα I που παίρνουμε το όριο.) Επομένως από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_1=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{10x+4}\,.$$

Αυτό οδηγεί πάλι σε μια απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Επειδή $(10x+4)'=10\neq0$ έχουμε ξανά με εφαρμογή του Κανόνα de L' Hospital,

$$\ell_1=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{5x^2+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{10x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\,.$$

Στο ℓ_2 παρατηρούμε ότι πάλι έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $-\infty/\infty$. Ελέγχουμε τις παραγώγους $(x^2+1)'=2x\neq0$ για κάθε $x>0$, $(2x)'=2\neq0$ (τη δεύτερη παράγωγο την παίρνουμε γιατί θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε δύο φορές τον Κανόνα de L' Hospital). Έχουμε

$$\ell_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-6}{2}=\lim_{x\to-\infty}(3x-3)=-\infty.$$

Στην τρίτη ισότητα εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα de L' Hospital γιατί το όριο μετά από παραγώγιση οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\infty/(-\infty)$

Σχόλιο. Τα ℓ_1 και ℓ_2 μπορούν να υπολογιστούν και με πιο στοιχειώδεις μεθόδους. Όπως στις ακολουθίες μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του x και να χρησιμοποιήσουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x^k = \lim\limits_{x\to-\infty} 1/x^k = 0$.

Στο ℓ_3 έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Η παράγωγος του παρονομαστή είναι $e^x \neq 0$ για κάθε x. Από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_3 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 2 \cdot 0 = 0,$$

όπου στην τρίτη ισότητα εφαρμόσαμε πάλι τον Κανόνα de L' Hospital γιατί έχουμε την απροσδιοριστία ∞/∞.

Άσκηση 18 (Κριτήριο Παρεμβολής για όρια συναρτήσεων). Θεωρούμε ένα διάστημα I και ένα $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ που είναι σημείο συσσώρευσης του I. Αν οι συναρτήσεις $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \text{για κάθε } x \in I,$$

και αν $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \ell$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο Παρεμβολής για ακολουθίες.

Λύση - υποδείξεις.
Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του I με $x_n \to c$ και $x_n \neq c$ για κάθε $n \geq 1$.

Έχουμε $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια και την υπόθεση $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$ έχουμε $\ell = \lim\limits_{x_n\to c} f(x_n) = \lim\limits_{x_n\to c} g(x_n)$.

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής για τις ακολουθίες έχουμε $\lim\limits_{x_n\to c} h(x_n) = \ell$. Με άλλα λόγια δείξαμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του I με $x_n \to c$ και $x_n \neq c$ για όλα τα $n \geq 1$, έχουμε $h(x_n) \to c$. Από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια προκύπτει $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \ell$.

Άσκηση 19 (Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων). Δείξτε ότι

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1) \text{ και } \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση - υποδείξεις.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \pi/2) \to (-1,1) : f(t) = \cos t$. Η f είναι $1-1$, επί και $\arccos = f^{-1}$. Έστω $x \in (-1,1)$, τότε $x = f(t) = \cos t$ για κάποιο $t \in (0, \pi/2)$. Έχουμε $f'(t) = -\sin t \neq 0$ επειδή $t \in (0, \pi/2)$. Άρα από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η arccos είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$\arccos'(x) = \frac{1}{f'(t)} = -\frac{1}{\sin t}\ .$$

Εκφράζουμε την ποσότητα $\sin t$ συναρτήσει του $x = \cos t$. Από τον τύπο $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ έχουμε

$$\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Αφού $t \in (0, \pi/2)$ έχουμε $\sin t > 0$ άρα $t = \sqrt{1-x^2}$ και επομένως

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Για το επόμενο θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} : g(t) = \tan t$. Η g είναι $1-1$, επί και $\arctan = g^{-1}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε $x = g(t) = \tan t$ για κάποιο $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Έχουμε

$$g'(t) = \frac{\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot (-\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \neq 0.$$

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η arccos είναι παραγωγίσιμη στο x και

$$\arctan'(x) = \frac{1}{g'(t)} = \cos^2 t.$$

Εκφράζουμε την ποσότητα $\cos^2 t$ συναρτήσει του $x = \tan t$. Παίρνουμε τον τύπο $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, διαιρούμε με το $\cos^2 t$ και λαμβάνουμε

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} ,$$

άρα $x^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ και $\cos^2 t = 1/(1 + x^2)$. Καταλήγουμε

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} .$$

Άσκηση 20 (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy). Έστω $a < b$ και $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και διαφορίσιμες σε κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (a, b)$ με

$$f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) .$$

Υπόδειξη. Αν $g(a) \neq g(b)$ θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x), \quad x \in [a, b].$$

Λύση - υποδείξεις.
Αν $g(a) = g(b)$ τότε $f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle στη συνάρτηση g και βρίσκουμε $c \in (a, b)$ με $g'(c) = 0$, έτσι που $g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) = 0$.

Αν $g(a) \neq g(b)$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x), \quad x \in [a, b].$$

Η h είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε κάθε $x \in (a, b)$. Επιπλέον μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$h(a) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} = h(b).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $c \in (a, b)$ με

$$h'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

απ΄ όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Σχόλιο. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy χρησιμεύει στην απόδειξη του Κανόνα de L' Hospital.

Άσκηση 21 (Ιδιάζουσες Συναρτήσεις). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = x \cdot f_1(x), \quad f_3(x) = x^2 \cdot f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x)$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_2 είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_3 είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος f_3' δίνεται ως εξής:

$$f_3'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η f_3' συνεχής;

Υπόδειξη. Στα $x \neq 0$ μπορείτε να παραγωγίσετε την f_3 με τον συνήθη τρόπο.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Ορίζουμε $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$ για κάθε $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ και $x_n, y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Επιπλέον

$$f_1(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

και

$$f_1(y_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ και από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια έχουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f_1 όταν το x τείνει στο 0.

(ii) Για να δείξουμε ότι η f_2 είναι συνεχής στο 0 εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$. Δείχνουμε ότι $f_2(x_n) \to 0$. Παρατηρούμε ότι $|f_1(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως

$$|f_2(x_n)| = |x_n \cdot f_1(x_n)| \leq |x_n| \longrightarrow 0.$$

Άρα $f_2(x_n) \to 0 = f_2(0)$.

Για να δείξουμε ότι η f_2 δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 θεωρούμε $x \neq 0$ και τον λόγο

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot f_1(x) - 0}{x} = f_1(x).$$

Επομένως, αν υπήρχε η παράγωγος της f_2 στο 0, δηλαδή αν υπήρχε το όριο του πιο πάνω λόγου όταν το x τείνει στο 0, θα υπήρχε και το όριο της f_1 όταν το x τείνει στο 0, που είναι άτοπο από το (i).

(iii) Με τους συνήθεις κανόνες παραγώγισης βρίσκουμε στα $x \neq 0$,

$$f_3'(x) = (x^2 \cdot \sin(1/x))' = 2x\sin(1/x) + x^2 \cdot (-1/x^2)\cos(1/x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Στο 0 έχουμε για $x \neq 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot f_1(x) - 0}{x - 0} = x \cdot f_1(x) = f_2(x).$$

Άρα

$$f_3'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} f_2(x) = f_2(0) = 0 \cdot f_1(0) = 0,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η f_2 είναι συνεχής στο 0.

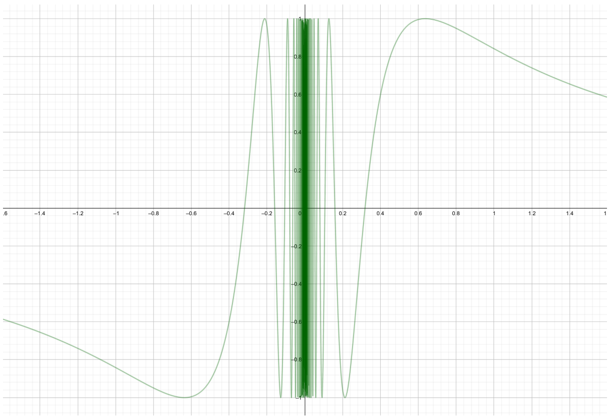
Τέλος η f_3' δεν είναι συνεχής στο 0. Για να το δείξουμε θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \to 0$ αλλά

$$f_3'(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = 0 - 1 = -1$$

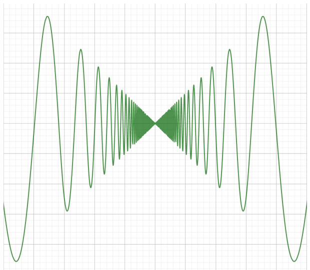
για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $f_3'(x_n) \not\to 0 = f_3'(0)$. Από την Αρχή Μεταφοράς η f_3' δεν είναι συνεχής στο 0.

Δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2, f_3, ο οποίες κοντά στο $x = 0$ μπορούν να κατασκευαστούν μόνο κατά προσέγγιση.

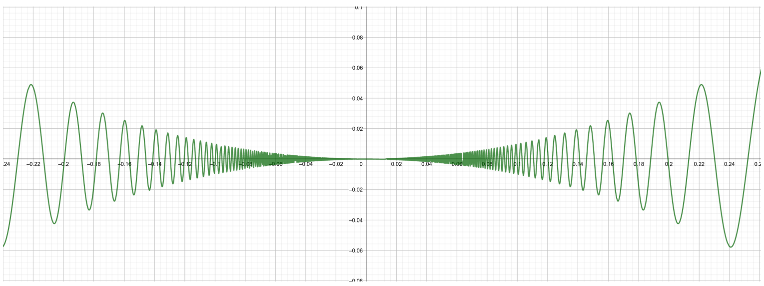
f_1 :



f_2 :



f_3 :



Άσκηση 22 (Αδυναμία εφαρμογής του Κανόνα de L' Hospital).

(i) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0,1) \to \mathbb{R} : f(x) = x+1$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ διαφέρουν. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital;

(ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + \sin x$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν υπάρχει το όριο της f'/g' ούτε είναι $\pm\infty$ όταν το x τείνει στο ∞. (Επομένως δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας de L' Hospital.)

Λύση - υποδείξεις.

(i) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1.$$

(Παρατηρήστε ότι $x > 0$ στα πιο πάνω όρια γιατί οι συναρτήσεις ορίζονται στο $(0,1)$.)

Άρα τα δύο όρια διαφέρουν. Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital γιατί ενώ το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ είναι 0, το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ **δεν είναι** 0, είναι 1. Άρα δεν είμαστε σε κάποια από τις περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται ο κανόνας.

(iii) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x+\sin x \geq x-1$. Επειδή $\lim_{x\to\infty} x-1=\infty$ έχουμε επίσης $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

και παίρνοντας το όριο $x\to\infty$ έχουμε $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+0=1.$$

Από την άλλη $f'(x) = 1+\cos x$ και $g'(x)=1$, άρα $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1+\cos x$. Δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $1+\cos x$ όταν το x τείνει στο ∞. Προς αυτό βρίσκουμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$ και $\lim_{n\to\infty} 1+\cos x_n \neq \lim_{n\to\infty} 1+\cos y_n$.

Παίρνουμε $x_n = 2\pi\cdot n$ και $y_n = 2\pi n+\pi/2$. Τότε $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$, $1+\cos x_n = 1+\cos(2\pi n) = 1+1=2$ για κάθε $n\geq 1$, ενώ $1+\cos y_n = 1+\cos(2\pi n+\pi/2) = 1+0=1$ για κάθε $n\geq 1$. Άρα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $1+\cos x$ όταν το x τείνει στο ∞.

Άσκηση 23 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης). Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x+2.$$

Δείξτε ότι η f είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια υπολογίστε την παράγωγο $(f^{-1})'(2)$.

Λύση - υποδείξεις.

Αφού $f'(x) = x^2+5/3>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα ένα-προς-ένα. Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

και συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής η f είναι επί του $\mathbb{R}$. Ορίζεται επομένως η

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

και σύμφωνα με το θεώρημα για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης θα έχουμε

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}.$$

Όμως

$$f^{-1}(2) = x \Leftrightarrow x=0.$$

Επομένως

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = 3/5.$$

Άσκηση 24. Δείξτε ότι

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Λύση - υποδείξεις.

Έστω $x,y\in\mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x<y$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \arctan t$ στο διάστημα $[x,y]$, τότε βρίσκουμε $\xi\in(x,y)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|\arctan x-\arctan y|}{|x-y|} = \frac{\arctan x - \arctan y}{x-y} = (\arctan)'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 25. Έστω ότι η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, διαφορίσιμη στο (a,b) και $f(a)=f(b)=0$. Δείξτε οτι για κάθε $\gamma\in\mathbb{R}$, υπάρχει $x_0\in(a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\gamma f(x_0)+f'(x_0)=0\,.$$

Λύση - υποδείξεις.
Έστω $\gamma\in\mathbb{R}$. Αν θέσουμε $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=e^{\gamma x}f(x)\,,$$

τότε $g(\alpha)=g(\beta)=0$ και επομένως ικανοποιούνται για την g οι προυποθέσεις του Θεωρήματος Rolle. Θα υπάρχει συνεπώς $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$g'(x_0)=0\Leftrightarrow \gamma f(x_0)+f'(x_0)=0\,.$$

Άσκηση 26. Να δείξετε ότι $\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=2\arctan(x),\;$ για κάθε $x\geq 0\,.$

Υπόδειξη. Πώς σχετίζονται οι παράγωγοι των πιο πάνω συναρτήσεων για $x>0$;

Λύση - υποδείξεις.
Η συνάρτηση arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x)=\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 0$. Έχουμε λοιπόν για κάθε $x>0$

$$\begin{aligned}\left(\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'\\ &= \dots\\ &= \frac{2}{1+x^2}\\ &= (2\arctan(x))'\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε για κάθε $x>0$ να έχουμε ότι

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=2\arctan(x)+c\,.$$

Θέτοντας $x=1$ στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}&\arccos\left(\frac{1-1^2}{1+1^2}\right)=2\arctan(1)+c\\ \Longleftrightarrow\;&\arccos(0)=2\cdot\frac{\pi}{4}+c\\ \Longleftrightarrow\;&\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+c.\\ \Longleftrightarrow\;&c=0.\end{aligned}$$

Τέλος για $x=0$ είναι σαφές ότι

$$\arccos\left(\frac{1-0^2}{1+0^2}\right)=\arccos(1)=0=2\arctan(0),$$

συνεπώς

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=2\arctan(x),\;\text{ για κάθε } x\geq 0\,.$$

Άσκηση 27. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι **τοπικά σταθερή** αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει $\delta > 0$, που πιθανώς εξαρτάται από το x, τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$.

Δείξτε ότι κάθε τοπικά σταθερή παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Λύση - υποδείξεις.

Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η παράγωγος $f'(x)$ είναι ίση με 0.

Αφού η f είναι τοπικά σταθερή, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στο $(x-\delta, x+\delta)$. (Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δ είναι αρκετά μικρό ώστε το τελευταίο διάστημα να περιέχεται στο πεδίο ορισμού (α, β).)

Θεωρούμε μια ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(-\delta, \delta)$ με $h_n \to 0$ και $h_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι που $x + h_n \in (x - \delta, x + \delta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{h_n} = 0.$$

Επομένως η f είναι σταθερή συνάρτηση.