Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Εξακρίβωση συνέχειας-ασυνέχειας). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 3 \\ -x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Δείξτε τα εξής:

(i) Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο 3.

(ii) Για κάθε $x \neq 3$ η f είναι συνεχής στο x.

Άσκηση 2 (Αδυναμία Συνεχούς Επέκτασης). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ δεν έχει συνεχή επέκταση στο 0, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) = 1/x$ για κάθε $x \neq 0$, η F δεν είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 3 (Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δεν ισχύει στους ρητούς). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : f(x) = x^2 - 2$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση και εξετάστε αν ισχύει η ακόλουθη πρόταση: για κάθε $a, b, q \in \mathbb{Q}$ με $a < b$, αν το q είναι γνήσια ανάμεσα στο $f(a)$ και στο $f(b)$ τότε υπάρχει $p \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ με $f(p) = q$.

Άσκηση 4 (Συνέχεια συνάρτησης σε μεμονωμένο σημείο). Θεωρούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε την $f : [0, 1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0, 1], \\ 9856792783456124918513, & x = 2. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

Άσκηση 5 (Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(x) = \sqrt{|\sin x|}.$$

Βρείτε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $h = g \circ f$.

(ii) Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι επίσης συνεχής, όπου τα X, Y και Z είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Επαναλαμβάνουμε μια από τις ασκήσεις από προηγούμενο φυλλάδιο (σε μια ελαφρώς πιο ισχυρή μορφή), καθώς είναι χρήσιμη στη συνέχεια.

Άσκηση 6 (Πυκνότητα ρητών-αρρήτων και σύγκλιση ακολουθίας). Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ρητούς και από άρρητους αριθμούς αντίστοιχα έτσι ώστε $q_n \to x$ και $x_n \to x$.

Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $a < b$ υπάρχει ρητός q και άρρητος y με $a < q < b$ και $a < y < b$.

Άσκηση 7 (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Υποθέτουμε ότι η $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και ότι $f(q) = 0$ για κάθε ρητό αριθμό $q \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Άσκηση 8 (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(q) = q^2$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Υπολογίστε την τιμή $f(\sqrt{2})$.

Άσκηση 9 (Διατήρηση προσήμου τοπικά). Έστω συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) > 0$.

Υπόδειξη. Για την επίλυση με βάση την Αρχή Μεταφοράς πρέπει να χρησιμοποιηθεί η απαγωγή σε άτοπο.

Σχόλιο: Στα συνηθισμένα παραδείγματα μια συνάρτηση είναι συνεχής "σχεδόν σε όλα τα σημεία" του πεδίου ορισμού της. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις με "πάρα πολλά" σημεία ασυνέχειας:

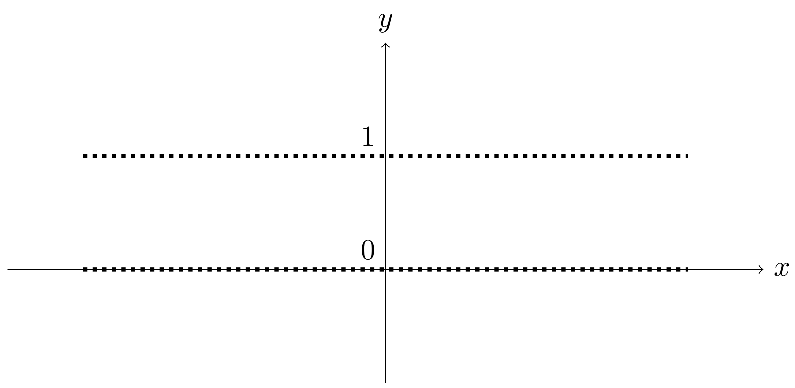
Άσκηση 10 (Συνάρτηση Dirichlet). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας!

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Dirichlet μπορούμε να τη σχεδιάσουμε μόνο κατά προσέγγιση.



Άσκηση 11. Δείξτε ότι η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$.

Άσκηση 12 (Διερεύνηση ορίου). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\ , \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x < 0. \end{cases}.$$

Εξετάστε αν υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τα όρια των πιο πάνω συναρτήσεων όταν το x τείνει στο 0 και αν ναι να υπολογίσετε το εν λόγω όριο.

Άσκηση 13 (Όριο συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου στα $\pm\infty$). Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τα όρια των συναρτήσεων $\cos(x)$, $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και όμοια όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Άσκηση 14 (Ιδιότητες ορίου συνάρτησης). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δείξτε ότι αν $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell_2$, όπου $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x\to b}\ [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2\ .$$

Άσκηση 15 (Όριο συνάρτησης και άπειρο). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to b} g(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to b} f(x)\cdot g(x) = +\infty$.

(ii) Αν $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to b} g(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to b} f(x)\cdot g(x) = -\infty$.

Μπορείτε να πάρετε δεδομένα τα αντίστοιχα αποτελέσματα για ακολουθίες.

Άσκηση 16 (Όρια πολυωνύμων).

(i) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$.

Υπόδειξη: Γράψτε το πολυώνυμο ως γινόμενο $x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)$.

(ii) Γενικότερα δείξτε ότι αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ τότε

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι θετικός άρτιος τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Αν $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι περιττός τότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

Άσκηση 17 (Κανόνας de L' Hospital). Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\ell_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 4x}$$

$$\ell_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\ell_3 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Άσκηση 18 (Κριτήριο Παρεμβολής για όρια συναρτήσεων). Θεωρούμε ένα διάστημα I και ένα $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ που είναι σημείο συσσώρευσης του I. Αν οι συναρτήσεις $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \text{για κάθε } x \in I,$$

και αν $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \ell$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο Παρεμβολής για ακολουθίες.

Άσκηση 19 (Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων). Δείξτε ότι

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1) \text{ και } \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 20 (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy). Έστω $a < b$ και $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς και διαφορίσιμες σε κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (a, b)$ με

$$f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) \ .$$

Υπόδειξη. Αν $g(a) \neq g(b)$ θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x), \quad x \in [a, b].$$

Άσκηση 21 (Ιδιάζουσες Συναρτήσεις). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = x \cdot f_1(x), \quad f_3(x) = x^2 \cdot f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_2 είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_3 είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος f_3' δίνεται ως εξής:

$$f_3'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η f_3' συνεχής;

Υπόδειξη. Στα $x \neq 0$ μπορείτε να παραγωγίσετε την f_3 με τον συνήθη τρόπο.

Άσκηση 22 (Αδυναμία εφαρμογής του Κανόνα de L' Hospital).

(i) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0,1) \to \mathbb{R} : f(x) = x + 1$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι τα όρια $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ διαφέρουν. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital;

(ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + \sin x$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν υπάρχει το όριο της f'/g' ούτε είναι $\pm\infty$ όταν το x τείνει στο ∞. (Επομένως δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας de L' Hospital.)

Άσκηση 23 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης). Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 2.$$

Δείξτε ότι η f είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια υπολογίστε την παράγωγο $(f^{-1})'(2)$.

Άσκηση 24. Δείξτε ότι

$$|\arctan x - \arctan y| \le |x - y|\,, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Άσκηση 25. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, διαφορίσιμη στο (a,b) και $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε οτι για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\gamma f(x_0) + f'(x_0) = 0\,.$$

Άσκηση 26. Να δείξετε ότι $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan(x)$, για κάθε $x \ge 0$.

Υπόδειξη. Πώς σχετίζονται οι παράγωγοι των πιο πάνω συναρτήσεων για $x > 0$;

Άσκηση 27. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι **τοπικά σταθερή** αν για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ υπάρχει $\delta > 0$, που πιθανώς εξαρτάται από το x, τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στο $(x-\delta, x+\delta)$.

Δείξτε ότι κάθε τοπικά σταθερή παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή.