Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άλγεβρα Σειρών).

(i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ αποκλίνουν.

(ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ συγκλίνει επίσης.

(iii) Δείξτε ότι αν $c\neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Θέτουμε $a_n=1$ και $b_n=-1$ για κάθε $n\geq 1$. Τότε $a_n+b_n=0$ για κάθε $n\geq 1$. Αν θέσουμε $s_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$ τότε $s_n=0+\cdots+0$ (n φορές) και συνεπώς $s_n=0$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}s_n=0$.
Από την άλλη είναι σαφές ότι $a_n\not\to 0$ και $b_n\not\to 0$, συνεπώς οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ αποκλίνουν.

Προσοχή: Μη θεωρήσετε ότι η παραπάνω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}0$ μας οδηγεί σε "απροσδιοριστία του τύπου $0\cdot\infty$". Εδώ δεν υπάρχει καμία απροσδιοριστία: το άπειρο άθροισμα είναι σαφώς ορισμένο ως το όριο της ακολουθίας των πεπερασμένων αθροισμάτων. Αν κάθε πεπερασμένο άθροισμα είναι 0 τότε το όριο της σειράς είναι και αυτό 0.

(ii) Παρατηρούμε ότι $b_n=a_n+b_n+(-1)\cdot a_n$ για κάθε $n\geq 1$. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot a_n$. Επιπλέον αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n+b_n+(-1)\cdot a_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

συγκλίνει επίσης. (Άθροισμα συγκλινουσών σειρών.)

(iii) Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}c^{-1}\cdot(c\cdot a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Άσκηση 2 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε ως προς τη σύγλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\quad \text{όπου } |x|\geq 1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right].$$

Λύση - υποδείξεις.

Αν $|x| \geq 1$ τότε $|x^n| = |x|^n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως $x^n \not\to 0$ και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ αποκλίνει. (Μπορεί να δειχθεί σχετικά εύκολα ότι $|x^n| \to +\infty$ όταν $|x| > 1$.)

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$ συνέκλινε τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-1} \cdot \frac{5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ θα συνέκλινε επίσης που είναι άτοπο.

Σχετικά με την τρίτη σειρά θέτουμε $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Αν ο n είναι άρτιος τότε $a_n = 1 + (-1) = 0$ και αν ο n είναι περιττός αριθμός τότε $a_n = -1 + 1 = 0$. Επομένως $a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και $s_n = a_1 + \cdots + a_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα $s_n \to 0$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ και ειδικότερα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 3 (Πεπερασμένο άθροισμα γεωμετρικής προόδου). Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x} .$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \ldots .$

Λύση - υποδείξεις.

Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε

$$\begin{aligned}
(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} x^k \\
&= x^0 + x^1 + \cdots + x^{n-1} \\
&\quad - (x^1 + \cdots + x^{n-1} + x^n) \\
&= x^0 - x^n \\
&= 1 - x^n.
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 - x^n$$

και διαιρώντας με το $1 - x$,

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} .$$

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα έχουμε
$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} \ .$$

Άσκηση 4 (Εύρεση ορίου σειράς). Να προσδιορίσετε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$
και
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$
Στη συνέχεια, για αυτά τα x, να βρείτε τον αριθμό στον οποίο συγκλίνουν.

Λύση - υποδείξεις.
Πρόκειται για γεωμετρικές σειρές με λόγο $\lambda = -x$ και $\lambda = -x^2$ αντίστοιχα. Συνεπώς συγκλίνουν για $|x| < 1$. Γι' αυτά τα x έχουμε
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι τα πιο πάνω όρια των σειρών είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\arctan(x)$ και $\ln(1+x)$, $|x| < 1$.

Άσκηση 5 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \ .$$

Λύση - υποδείξεις.

Στις πρώτες δύο σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ καθώς και τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{8}{125} \cdot \frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{875}$$
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} - \frac{4^2}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{16}{5} \cdot 4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{9}{10} - \frac{64}{5} \\
&= \frac{9-128}{10} = -\frac{119}{10} \,.
\end{aligned}
$$

Η τρίτη σειρά είναι τηλεσκοπική. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \,.$$

Επομένως αν θέσουμε $a_n = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \\
a_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
a_3 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \\
&\vdots \qquad \vdots \\
a_n &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \,.
\end{aligned}
$$

Άρα $a_1 + \cdots + a_n = 1 - \dfrac{1}{2n+1} \longrightarrow 1$ και επομένως $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$

Άσκηση 6 (Εύρεση ορίου σειράς). Αποδείξτε ότι αν $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$ και $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1}\,, n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta \,.$$

Λύση - υποδείξεις.
Πρόκειται για τηλεσκοπική σειρά αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι η

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2 - \beta_3 + \ldots + \beta_n - \beta_{n+1} = \beta_1 - \beta_{n+1} \longrightarrow \beta_1 - \beta$$

και συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_n = \beta_1 - \beta \,.$$

Άσκηση 7 (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \,.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\sin x \le x$ για κάθε $x \ge 0$.

Λύση - υποδείξεις.
Σχετικά με την πρώτη σειρά έχουμε

$$\left|\frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}$ συγκλίνει απολύτως και άρα και κανονικά.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$, έχουμε

$$\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Στην τρίτη σειρά παρατηρούμε ότι $3n-2 < 3n$ και επομένως $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$ για κάθε $n \geq 1$. Αν συνέκλινε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ τότε από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε και σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Επομένως θα συνέκλινε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι άτοπο.

Άσκηση 8 (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}\,.$$

Λύση - υποδείξεις.
Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ συγκλίνει. (Για την ακρίβεια συγκλίνει απολύτως αλλά μια και η ακολουθία αποτελείται από θετικούς όρους δεν κάνει διαφορά τι από τα δύο θα πούμε.)

Στη δεύτερη

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ συγκλίνει.

Σχετικά με την τρίτη σειρά

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{5^n \cdot n!} \\ &= \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

$$= 5 \cdot (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n}$$
$$= 5 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= 5 \cdot \frac{1}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{5}{e} > 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$ αποκλίνει.

Άσκηση 9 (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Λύση - υποδείξεις.
Εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

Σχετικά με την τελευταία σειρά

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{-n^2}} = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \longrightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 10 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \dfrac{n^3}{n^5} = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Λύση - υποδείξεις.

Σχετικά με την πρώτη σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\ , \quad b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\cdot n^2 = \frac{n^5+n^2}{4n^5-3n+1} = \frac{1+1/n^3}{4-3/n^4+1/n^5} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, επομένως συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}$.

Προχωράμε στη δεύτερη σειρά. Θέτουμε

$$a_n = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\ , \quad b_n = \frac{n^3}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\cdot n^{1/2} = \frac{n^{7/2}+2n^{3/2}+n^{1/2}}{n^{7/2}+2} = \frac{1+2/n^2+1/n^3}{1+2/n^{7/2}} \longrightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}$ αποκλίνει επίσης.

Στην τελευταία σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{4^n-5}{2^n}\ , \quad b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n-5}{2^n}\cdot 2^{-n} = \frac{2^{2n}\cdot 2^{-n} - 5\cdot 2^{-n}}{2^n} = \frac{2^n - 5\cdot 2^{-n}}{2^n} = 1 - \frac{5}{4^n} \longrightarrow 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}$ αποκλίνει επίσης.

2ος τρόπος για την τελευταία σειρά: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{4^n-5}{2^n} = 2^n - \frac{5}{2^n} \geq 1$$

για κάθε $n \geq \mathbf{2}$. (Η ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή.) Άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = \dfrac{4^n - 5}{2^n}$, $n \geq 1$ δεν συγκλίνει στο 0 (για την ακρίβεια συγκλίνει στο $+\infty$) και επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

Άσκηση 11 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}\,, \qquad (\beta)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+7}\,.$$

Λύση - υποδείξεις.
(α) Έχουμε ότι

$$0 < \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} < \frac{1}{n^2}\,, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.
(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{5n+7} = \frac{2}{5} \neq 0$$

και άρα η σειρά αποκλίνει.

Άσκηση 12 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}\,,$$

ως προς τη σύγκλιση.

Λύση - υποδείξεις.
Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad 0 < 1$$

επομένως από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ συγκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \frac{1+|\cos(n)|}{3^n} \leq \frac{1+1}{3^n} = \frac{2}{3^n}\,,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα $|x+y| \leq |x| + |y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ συγκλίνει επίσης.

Εφόσον $\left|\frac{1+\cos(n)}{3^n}\right| \leq \frac{2}{3^n}$ για κάθε $n \geq 1$, από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}$ συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει και με τη συνήθη έννοια.

Σχετικά με την τρίτη σειρά μπορούμε να εφαρμόσουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με $a_n = \dfrac{1}{4n^2-3}$ και $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4n^2-3} \cdot n^2 = \frac{n^2}{4n^2-3} = \frac{1}{4-3/n^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4} > 0.$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}$.

β' τρόπος: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $4n^2-3 \geq n^2$ για κάθε n, (ισοδύναμα $4n^2-n^2 \geq 3$ που ισχύει). Άρα $\frac{1}{4n^2-3} \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}$.

Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}} = \frac{5+1/n}{2^2} \longrightarrow \frac{5}{4} > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

Στην τελευταία σειρά έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}\cdot((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\
&= \frac{4n^2+4n+2n+2}{2(n^2+2n+1)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n+1} \\
&= \frac{2+3/n+1/n^2}{1+2/n+1/n^2} \longrightarrow 2 > 1.
\end{aligned}$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}$ αποκλίνει.

Άσκηση 13 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(3n)!}, \qquad (\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4^n}, (\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Λύση - υποδείξεις.

(α) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Λόγου. Είναι

$$\frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!n!}{(3n)!}} = \frac{n+1}{3(3n+1)(3n+2)} \to 0 < 1$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Λόγου:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{4^n}}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.

(γ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e > 1$$

και άρα από το Κριτήριο Λόγου η σειρά αποκλίνει.

Άσκηση 14 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Λύση - υποδείξεις.

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{1}{n} \to 0$ και συνεπώς $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}} \to 0$. Επιπλέον είναι σαφές ότι $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \geq 1$. Από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ που αποκλίνει. Άρα η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Σχετικά με τη δεύτερη σειρά βλέπουμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.

Άσκηση 15 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right)$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη: Δείξτε αρχικά ότι $\sin\left(n \cdot \pi + \dfrac{1}{n}\right) = (-1)^n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ για κάθε n.

(ii) Δείξτε ότι η προηγούμενη σειρά **δεν** συγκλίνει **απολύτως**.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\dfrac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$, όπου $x \in [0, \pi/2]$.

(iii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iv) Εξετάστε τη σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)$$
ως προς τη σύγκλιση.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι
$$\sin\left(n\cdot\pi+\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{n}\right), & n\text{: άρτιος}\\ \\ -\sin\left(\frac{1}{n}\right), & n\text{: περιττός}\end{cases}=(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Η ακολουθία $(\sin(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 0, επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\cdot\pi+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
συγκλίνει.

(ii) Για την απόλυτη σύγκλιση έχουμε
$$\left|\sin\left(n\cdot\pi+\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$
για κάθε $n\geq 1$.

Εφαρμόζουμε την ανισότητα $\frac{2}{\pi}\cdot x\leq\sin x$ $\big($για $x\in[0,\pi/2]\big)$ στο $x=\frac{1}{n}\leq 1\leq\frac{\pi}{2}$ και έχουμε
$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\sin\left(\frac{1}{n}\right)\geq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$$
για κάθε $n\geq 1$. Επομένως αν η σειρά συνέκλινε απολύτως, από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$. Άρα θα συνέκλινε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, άτοπο.

(iii) Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης για $a_n=\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}$ και $b_n=\frac{1}{n^2}$, $n\geq 1$. Έχουμε
$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}\cdot n^2=\frac{n^2}{2n^2-\sqrt{n}}=\frac{1}{2-1/n^{3/2}}\longrightarrow\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}>0.$$
Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}$.

β' τρόπος: Προσπαθούμε να δείξουμε ότι η ποσότητα $2n^2-\sqrt{n}$ είναι μεγαλύτερη-ίση κάποιου $k_n\geq 0$ με την ιδιότητα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}$ να συγκλίνει. Τότε θα έχουμε $\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}\leq\frac{1}{k_n}$ και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά θα συγκλίνει.

Δοκιμάζουμε $k_n=n^2$:
$$2n^2-\sqrt{n}\geq n^2\iff 2n^2-n^2\geq\sqrt{n}\iff n^2\geq\sqrt{n}$$
που ισχύει γιατί $n\geq 1$.

Άρα ισχύει $\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n^2}$ και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

(iv) Παρατηρούμε ότι η σειρά δεν είναι τηλεσκοπική - αυτό δεν απαιτείται στη λύση αλλά είναι βοηθητικό. Για να δούμε γιατί δεν είναι τηλεσκοπική ελέγχουμε μερικούς όρους:

$$\begin{aligned} a_1 &: \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ a_2 &: \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\ a_3 &: \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} \\ a_4 &: \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}\,. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι δεν προκύπτουν διαγραφές όπως σε ένα τηλεσκοπικό άθροισμα.
Για την επίλυση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} &= \frac{\sqrt{n+1}+1-\sqrt{n+1}+1}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-1} \\ &= \frac{2}{n+1-1} \\ &= \frac{2}{n}\,. \end{aligned}$$

Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ αποκλίνει.

Άσκηση 16 (Ανισότητα Young με εκθέτη το 2). Δείξτε ότι για $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|a \cdot b| \leq \frac{a^2+b^2}{2}\,.$$

Λύση - υποδείξεις.
Έχουμε

$$0 \leq (|a|-|b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = a^2 - 2|ab| + b^2.$$

Άσκηση 17. Έστω ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\alpha_n| < 1$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ συγκλίνει επίσης. Ισχύει το αντίστροφο?

(iii) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη. Στο (i) να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και στα (ii), (iii) το κριτήριο σύγκρισης. Θα χρειαστείτε και την ανισότητα Young.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Αφού η σειρά συγκλίνει θα έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Συνεπώς, από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\alpha_n| < 1$.

(ii) Από το (i) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\alpha_n| < 1$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε
$$0 < \alpha_n^2 < |\alpha_n|.$$
Οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού για παράδειγμα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ συγκλίνει ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει.

(iii) Από την ανισότητα Young έχουμε ότι
$$|\alpha_n \beta_n| \leq \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2}.$$
Από το (ii) οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ συγκλίνουν. Επομένως από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση 18 (Σύγκλιση σειράς). Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2 + n^2 \alpha_n}$$
συγκλίνει.

Λύση - υποδείξεις.
Έχουμε ότι
$$0 \leq \frac{\alpha_n}{2 + n^2 \alpha_n} \leq \frac{\alpha_n}{n^2 \alpha_n} = \frac{1}{n^2},$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.

Άσκηση 19. Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } a_1 > 0.$$
Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + \frac{1}{n}).$$
Υπόδειξη. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα κάτω φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

Λύση - υποδείξεις.
Είναι σαφές ότι $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2} \leq \frac{a_n}{2} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον αποδεικνύεται με επαγωγή ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο προκύπτει ότι $a(2 + a^2) = a$ και συνεπώς $a = 0$.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε για την πρώτη σειρά το κριτήριο λόγου.
$$\left| \frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n^2 a_n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 \cdot \frac{1}{2 + a_n^2} \longrightarrow \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} < 1.$$

Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ συγκλίνει.

Σχετικά με τη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\left(a_n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και ότι συγκλίνει στο 0. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + \dfrac{1}{n})$ συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz.